ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

ΑΘΗΝΑ 1999

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία: Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Συντονιστές: Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed.
Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος
Σίδερης Πολυχρόνης, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Συντάκτες κειμένων: Βογιατζόγλου Σωτήρης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Μέτης Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

ISBN: 960-541-039-7

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Β΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε τρεις κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για την λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.
- Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν τρεις αστερίσκοι (***). Αυτές υπερβαίνουν τους στόχους της διδασκαλίας στο σχολείο και μπορούν να παραλειφθούν.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 1999

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ   Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2^x$ (Σχ.1) είναι

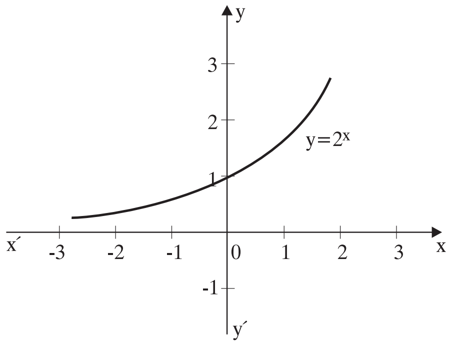
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R - {1}

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.1

2. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Σχ. 2) είναι

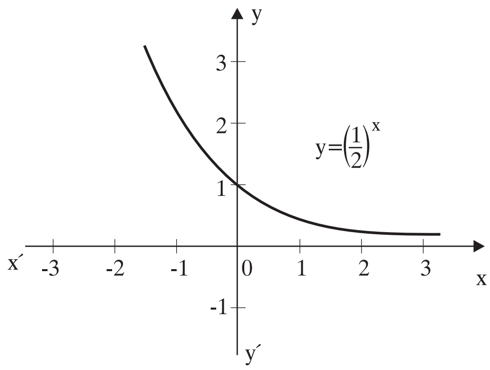
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το σύνολο R

Γ το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το σύνολο R - {1}

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.2

3. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R - $\{1\}$ **Δ.** το σύνολο R **Ε.** το σύνολο R^*

4. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$ (Σχ.3) είναι

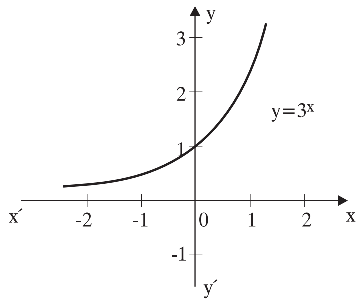
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$

Δ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.3

5. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (Σχ. 4) είναι

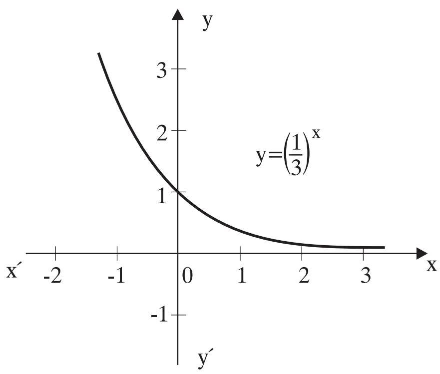
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0]$

Δ. το σύνολο R^*

Ε. το διάστημα $(0,+\infty)$



Σχ.4

6. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει σύνολο τιμών

Α. το διάστημα $(0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$ **Δ.** το διάστημα $[0,+\infty)$

Ε. το σύνολο R^*

7. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 4^x$ (Σχ. 5)

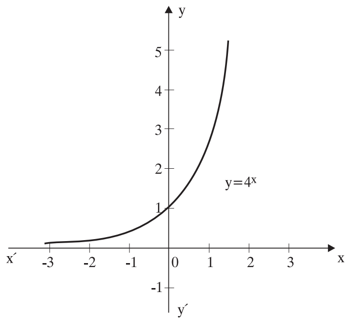
Α. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

Β. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0,1).

Γ. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Δ. έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.



Σχ.5

8. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (Σχ.6)

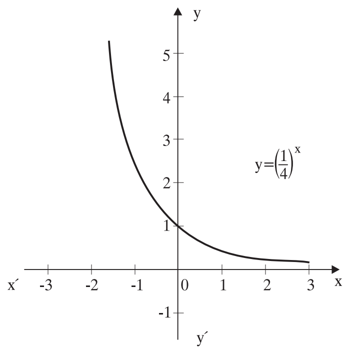
Α. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

Β. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Γ. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 1).

Δ. έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Ox

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.



Σχ.6

9. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$

Α. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 1)

Β. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

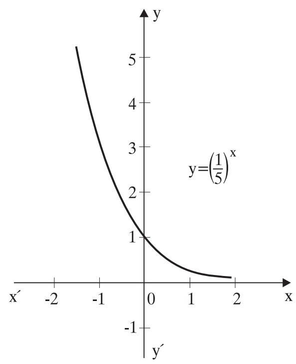
Γ. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Δ. έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη του y΄y

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

10. ***** Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ (Σχ.7) είναι:

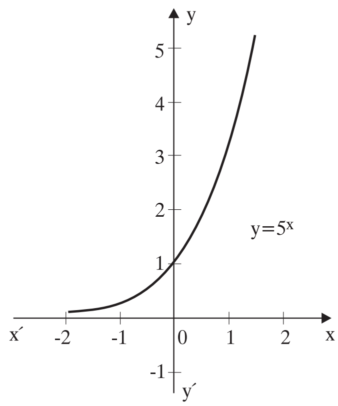
Α. γνησίως φθίνουσα
Β. άρτια
Γ. περιττή
Δ. γνησίως αύξουσα
Ε. δεν είναι μονότονη



Σχ.7

11. ***** Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 5^X$ (Σχ.8) είναι

Α. γνησίως φθίνουσα
Β. άρτια
Γ. περιττή
Δ. γνησίως αύξουσα
Ε. δεν είναι μονότονη



Σχ.8

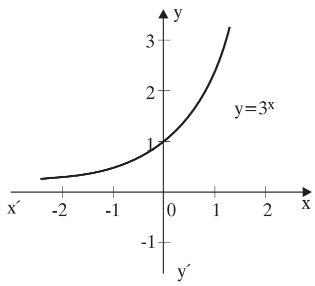
12. ***** Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α < 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως φθίνουσα **Β.** σταθερή **Γ.** περιοδική
Δ. γνησίως αύξουσα **Ε.** δεν είναι μονότονη

13. ***** Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $α > 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως φθίνουσα **Β.** άρτια **Γ.** περιττή
Δ. γνησίως αύξουσα **Ε.** δεν είναι μονότονη

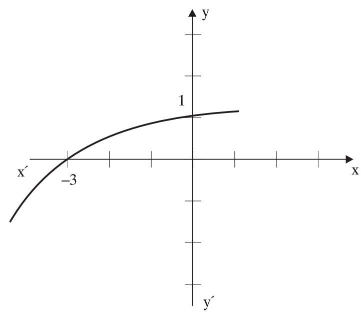
4. * Στο Σχ. 9 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$



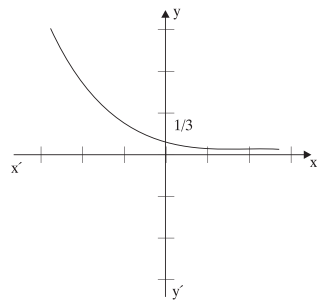
Σχ.9

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = -3^x$ είναι

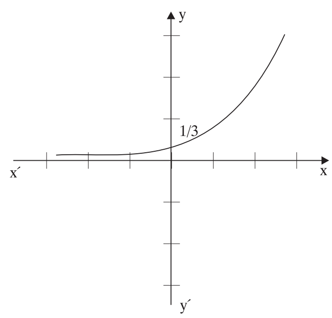
Α.



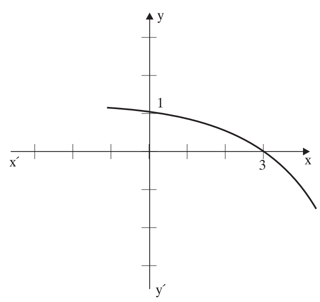
Γ.



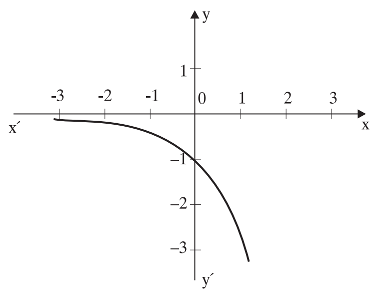
Β.



Δ.

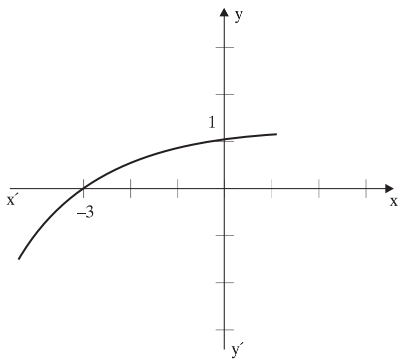


Ε.

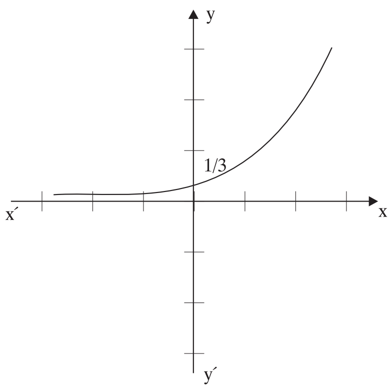


β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο h (x) = 3^{-x} είναι

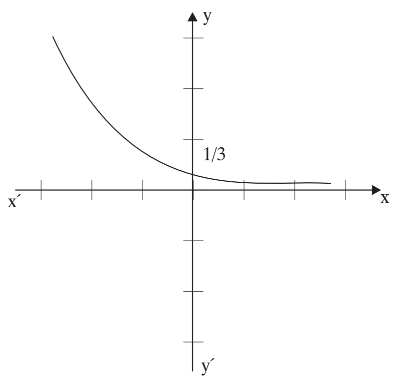
Α.



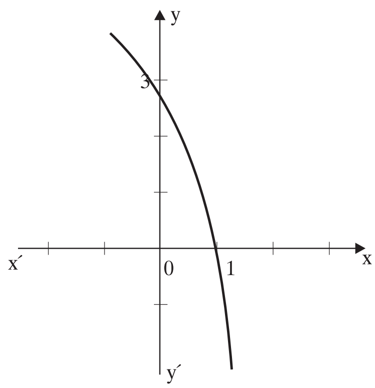
Β.



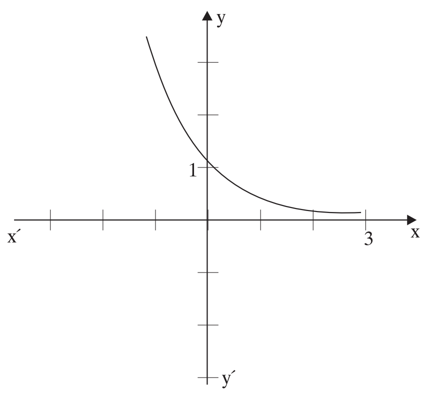
Γ.



Δ.



Ε.



15. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x) = - 2^x είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της f (x) = 2^x (Σχ.11) ως προς

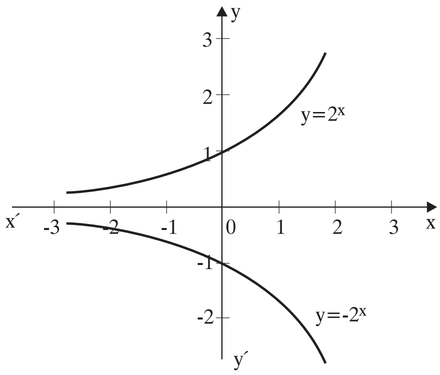
Α. τον άξονα y΄y

Β. την ευθεία y = x

Γ. την ευθεία y = -x

Δ. τον άξονα x΄x

Ε. κέντρο το Ο(0,0)



Σχ. 11

6. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x) = $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της f (x) = 5^x (Σχ.12) ως προς

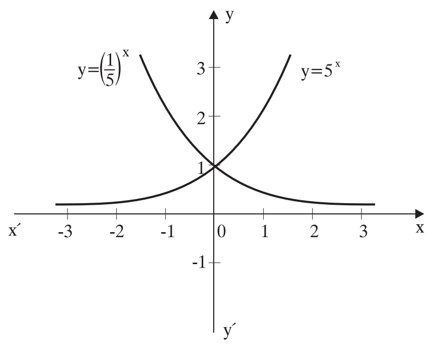
Α. τον άξονα x΄x

Β. τον άξονα y΄y

Γ. την ευθεία y = $\frac{1}{5}$

Δ. την ευθεία y = 5

Ε. κέντρο το Ο(0, 0)



Σχ. 12

17. ***** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. η f έχει σύνολο τιμών το σύνολο R

Γ. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού οης

Δ. η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο σημείο Α(0, 1)

Ε. η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.

18. ***** Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Δ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο Μ (0, 1/2)

Ε. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο σημείο Ν (1, 0)

19. ***** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2^x$ τότε ισχύει

Α. $f(2) > f(3)$ **Β.** $f(2) < f(3)$ **Γ.** $f(2) \geq f(3)$

Δ. $f(2) = 2f(3)$ **Ε.** $f(2) = f(3)$

20. ***** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ τότε ισχύει

Α. $f(2) < f(3)$ **Β.** $f(2) \leq f(3)$ **Γ.** $f(2) > f(3)$

Δ. $f(2) = 3f(3)$ **Ε.** $f(2) = f(3)$

21. ***** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^x$ τότε **δεν** είναι σωστή η

Α. $f(0{,}5) < f(0{,}8)$ **Β.** $f(-2) > f(-3)$ **Γ.** $f\left(\frac{1}{5}\right) > f\left(\frac{1}{7}\right)$

Δ. $f(1, 3) > f(-1, 3)$ **Ε.** $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$

22. ***** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^{x}$ τότε i $\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$ είναι ίσος με

Α. $\frac{3}{2}$ **Β.** $\frac{4}{9}$ **Γ.** 9 **Δ.** 3 **Ε.** $\sqrt{3}$

23. ***** Αν $\alpha > 0$, μ, ν θετικιί ακέραιοι με $\nu \geq 2$ τότε το $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ισούται με

Α. $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$ **Β.** $\left(\sqrt{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}$ **Γ.** $\left(\sqrt{\alpha^{\nu}}\right)^{\mu}$ **Δ.** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

24. ***** Το $32^{\frac{1}{5}}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{32^5}$ **Β.** 2 **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** 32^{-5} **Ε.** $\frac{1}{\sqrt[5]{32}}$

25. ***** Αν $3^{\sqrt{x}} = 27$, τότε το x είναι

Α: 27 **Β:** 1/9 **Γ:** 0 **Δ:** 3 **Ε:** 9

26. ***** Δίνεται η εξίσωση $2^{x^2-5x+10} = 16$. Τότε το x είναι

Α. 1 ή -1 **Β.** 2 ή 3 **Γ.** -2 ή -3 **Δ.** 0

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

27. ***** Αν $2^{2^x} = 16$, τότε το x είναι

Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** -1 **Ε.** -2

28. ***** Αν $f(x) = 2^{x}$, τότε το $f(f(2))$ ισούται με

Α. 16 **Β.** 8 **Γ.** 32 **Δ.** 1 **Ε.** 4

29. ***** Η εξίσωση $3^{x} + 2^{x} = 2$ έχει λύση τον αριθμό

Α. -2 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** 0

30. *****Η εξίσωση $3^{x} + 3^{-x} = -1$

Α. έχει λύση ένα θετικό αριθμό

Β. έχει λύση ένα αρνητικό αριθμό

Γ. έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό ≠ 0

Δ. είναι αδύνατη

Ε. έχει λύση την x = 0

31. Δίνεται η ανίσωση $3^{x-2} > 1$. Τότε ισχύει

Α. x > 2 **Β.** x = 0 **Γ.** x < 2 **Δ.** x ≤ 2 **Ε.** x = 2

32. ***** Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$. Τότε ισχύει

Α. x ≥ 2 **Β.** x = -1 **Γ.** x ≤ 1 **Δ.** x > 1 **Ε.** x > 2

33. ***** Δίνεται η ανίσωση $5^{x+1} < 625$. Τότε ισχύει

Α. x = 3 **Β.** x ≥ 3 **Γ.** x = 5 **Δ.** x > 3 **Ε.** x < 3

34. ***** Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{16}{81}$. Τότε ισχύει

Α. x ≥ 16 **Β.** x ≤ 4 **Γ.** x > 4 **Δ.** x = 16

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

35. ***** Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < 2$ αληθεύει

Α. Για $x \in (-\infty, -1)$ **Β.** Για $x \in (-\infty, -1]$ **Γ.** Για $x \in (-\infty, 0)$

Δ. Για $x \in (-1, +\infty)$ **Ε.** Για κάθε $x \in R$

36. ***** Έστω η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α \neq 1$.

Ποιο από τα παρακάτω σημεία αποκλείεται να ανήκει στη γραφική παράσταση της f;

Α. (-2, 8), **Β.** (0, 1), **Γ.** (3, -27), **Δ.** (3, 2) **Ε.** (2, 3)

37. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = e^x$. Τότε ισχύει ότι

Α. $f(e) = g(e)$ **Β.** $f(e) > g(e)$ **Γ.** $f(2) < g(2)$

Δ. $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$ **Ε.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$

38. ****** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $y = e$ (Σχ.13) που τέμνονται στο σημείο $A(x_o, e)$. Το x_o είναι ίσο με

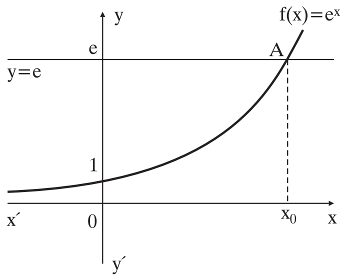
Α. e

Β. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $\sqrt{e}$

Ε. $\frac{3}{2}$



Σχ.13

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$A = 3^{0,5}$ $B = \frac{1}{3}$ $\Gamma = 3^{\sqrt{3}}$ $\Delta = 1$ $E = 3$

2. ***** Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

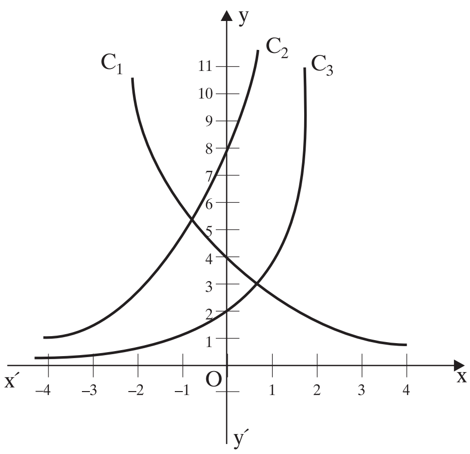
$A = 0,5^2$ $B = 2$ $\Gamma = 0,5^{0,5}$ $\Delta = 1$ $E = 0,5^{\sqrt{2}}$

3. ****** Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, αν $x \in R$

$A = 0,5^x$ $B = 2^x$ $\Gamma = 3^x$ $\Delta = 1$ $E = e^x$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

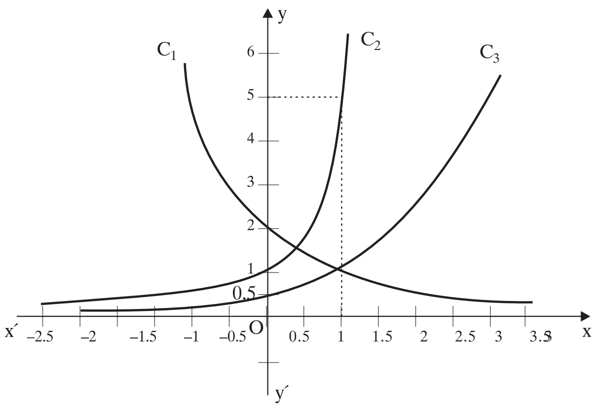
1. Στη στήλη Α υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>
Σχ.14</td><td>$f_1(x) = 2 \cdot 4^x$
$f_2(x) = 8 \cdot 2^x$
$f_3(x) = 4 \cdot 2^x$
$f_4(x) = 2 \cdot 4^{-x}$
$f_5(x) = 4 \cdot 2^{-x}$</td></tr>
</table>

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

C_1	C_2	C_3

2. Στη στήλη Α υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>


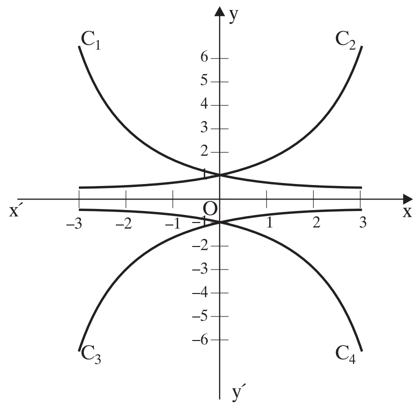
Σχ.15
</td><td>
$f_1(x) = 5^x$
$f_2(x)=2^x$
$f_3(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^x$
$f_4(x)=2\cdot 3^{-x}$
$f_5(x)=3^{-x}$
</td></tr>
</table>

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

C_1	C_2	C_3

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση C_1 της $f\ (x) = 2^{-x}$, η καμπύλη C_2 συμμετρική της C_1 ως προς τον άξονα y΄y, η καμπύλη C_3 συμμετρική της C_1 ως προς τον άξονα x΄x και η καμπύλη C_4 συμμετρική της C_1 ως προς την αρχή O (0,0) των αξόνων.



Σχ.16

Να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα τους τύπους των συναρτήσεων $f_2(x)$, $f_3(x)$ και $f_4(x)$ των οποίων οι C_2, C_3 και C_4 αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα.

Καμπύλη	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**
Τύπος συνάρτησης	$f_1(x) = 2^{-x}$	$f_2(x) =$	$f_3(x) =$	$f_4(x) =$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ***** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ **ii)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 27$ **iii)** $2^{-x} = 32$

iv) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 27$ **v)** $\frac{1}{2^{x}} = 16$

2. ***** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^{x^2-5x+6} = 1$ **ii)** $\left[3^{\left(x^2-9\right)}\right]^{(x-2)} = 1$ **iii)** $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

iv) $9^x - 2\,3^x - 3 = 0$ **v)** $3^{2x-2} + 3^x = 4$ **vi)** $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

3. ***** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ **ii)** $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$ **iii)** $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

iv) $2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0$ **v)** $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

4. ****** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1$ **ii)** $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

5. ****** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **ii)** $3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$

iii) $2^{\eta\mu x} \cdot \left(4^{\eta\mu x}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

6. ****** Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{x^2-7x+6}<1$ **ii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$

iii) $(0{,}5)^{5x-x^2-1}<0{,}125$ **iv)** $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

7. ****** Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 9^{x+1}=3^{y+3} \\ 4^{x+y}=8\cdot 2^x \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6}=1 \\ x+y=8 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 4^y=1 \\ 3^x\cdot 3^{y-1}=9 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} 3^x-5^y=4 \\ 9\cdot 3^{-x}+5^y=6 \end{cases}$

8. **** i)** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ και } g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

9. ****** Αν f και g δύο συναρτήσεις με $f(x)=\frac{1}{2}(\alpha^x+\alpha^{-x})$ και $g(x)=\frac{1}{2}(\alpha^x-\alpha^{-x})$

να αποδείξετε ότι: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y)$.

10. **** i)** Να βρείτε το ($\alpha \neq 5$) ώστε η $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το α, ($\alpha \neq 0$) ώστε η $g(x)=\left(1-\frac{5}{\alpha}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

11. ****** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(1-k^2\right)^x$.

α) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f;

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο Σ (2, 1).

12. ****** Σ’ ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) Θ (t) του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των 36,5°C.

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

13. ******* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = k\alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $k \in R$

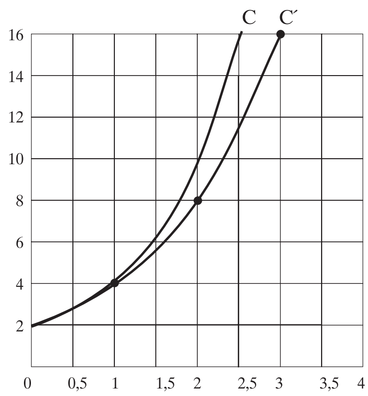
i) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}, \frac{f(x+2)}{f(x+1)}, \frac{f(x+7)}{f(x+6)}$$

ii) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+3)}{f(x)}, \frac{f(x+6)}{f(x+3)}, \frac{f(x+16)}{f(x+13)}$$

iii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των τιμών της f (x) που αντιστοιχούν σε ζεύγη τιμών της μεταβλητής x που ισαπέχουν είναι σταθερές. (Ζεύγη τιμών που ισαπέχουν είναι (x, x+3), (x+3, x+6), (x+12, x+15) κ.λπ.



Σχ.17

iv) Στο σχήμα 17 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας εκθετικής συνάρτησης και μιας παραβολής.

Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (iii), να βρείτε ποια είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής.

Παρατήρηση: Το ερώτημα (iii) εφαρμόζεται ως *κριτήριο αναγνώρισης* μίας καμπύλης αν είναι γραφική παράσταση εκθετική και ως *κριτήριο αναγνώρισης* αν ένας πίνακας τιμών x, y ορίζει μία εκθετική συνάρτηση.

14. ****** Ένα δείγμα 5 Kgr ενός ραδιενεργού ισοτόπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t) = Q_o \cdot e^{-kt}$ όπου Q (t) παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t, $Q_o = Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για t = 0) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min., να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

15. ** Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

i) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400.

ii) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3.200.

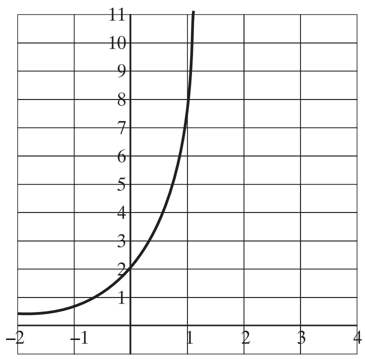
Αν ο ούπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_o \cdot 2^{kt}$, όπου P(t) ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t, P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων τότε:

α) Να βρείτε τη σταθερά k.

β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

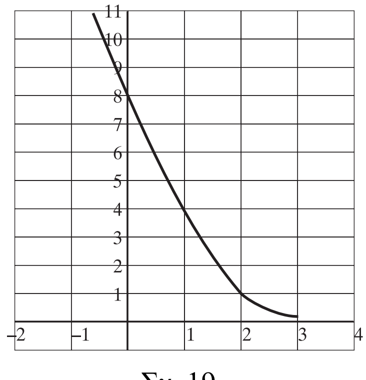
γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

16. ** **α)** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = k \cdot 4^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 18 να βρείτε το k.



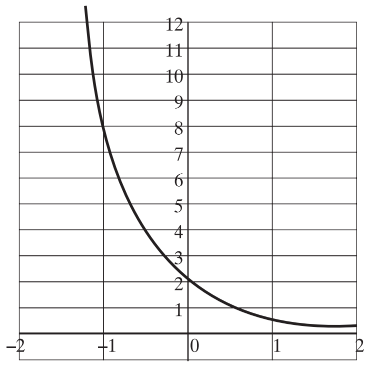
Σχ.18

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 8 \cdot \alpha^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 19 να βρείτε το α.



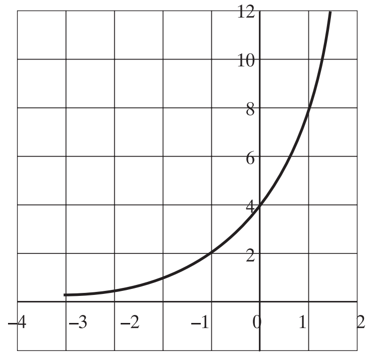
Σχ. 19

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $2 \cdot \alpha^{-x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 20 να βρείτε το α.



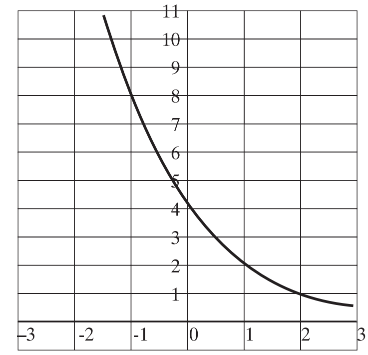
Σχ. 20

δ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $k\alpha^{x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 21 να βρείτε τα k, α.



Σχ. 21

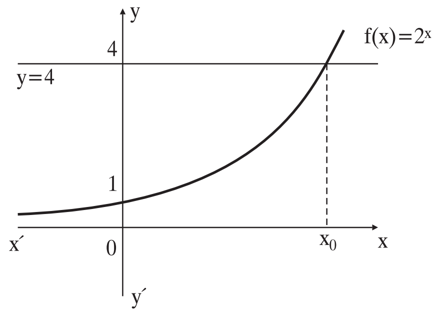
ε) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $k \cdot \alpha^{x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 22 να βρείτε τα k, α.



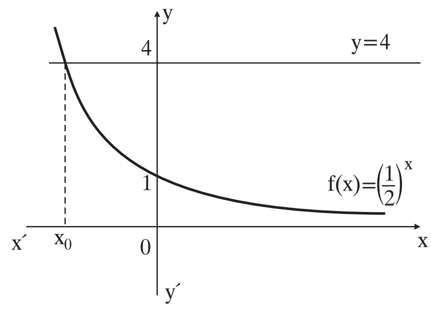
Σχ. 22

17. ***** Να βρείτε το σημείο x_o σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

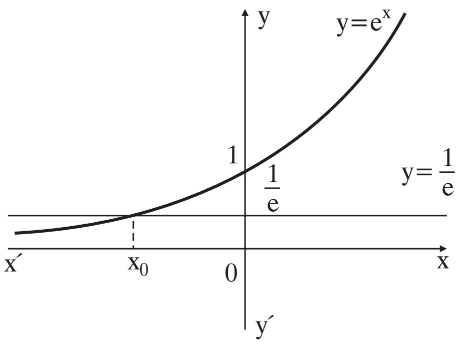
i)



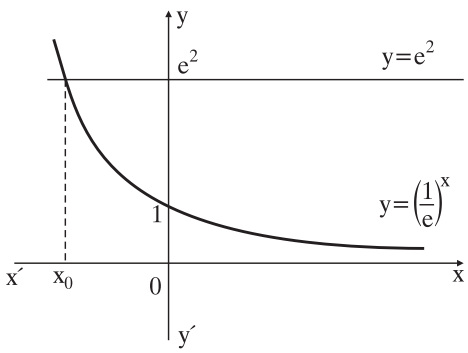
ii)



iii)



iv)

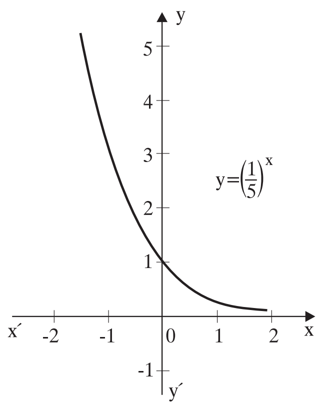


Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1. Στο σχήμα 23 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



Σχ.23

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το R **Σ** **Λ**

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R **Σ** **Λ**

iii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Σ** **Λ**

iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y **Σ** **Λ**

v) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x **Σ** **Λ**

vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας τον y΄y προς τη γραφική παράσταση της $g(x) = 5^x$. **Σ** **Λ**

vii) Ισχύει ότι f (2) > f (1/5) **Σ** **Λ**

viii) Ισχύει ότι $f(2^{1999}) > f(2^{2000})$ **Σ** **Λ**

ix) Το σημείο Α (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f **Σ** **Λ**

x) Το σημείο $M\left(\sqrt[5]{2}, -5^{-2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **Σ** **Λ**

2. ***** Ισχύει ότι:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

ii) $\left(\sqrt{3}\right)^x \neq \left(\sqrt{5}\right)^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

iii) $\left(\sqrt{3}\right)^{-x} > 3^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

iv) $(-1)^{2x} = 1^{2x}$, αν x ακέραιος **Σ** **Λ**

v) $(-1)^{2x+1} = -1$, αν x ακέραιος **Σ** **Λ**

3. ***** Ισχύει ότι:

i) $(x+1)^{x-1} = 1$ αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

ii) $(x-1)^x = 1$, αν $x = 0$ **Σ** **Λ**

iii) $x^{1+x} = 1$, αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

iv) $x^{x-1} = 1$, αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

v) $(1-x)^{x+1} = 1$ αν $x = -1$ **Σ** **Λ**

4. ***** Ισχύει ότι:

i) $(0,8)^x > (0,8)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

ii) $(1,5)^x < (1,5)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

iv) $(0,31)^x < (0,31)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

v) $(2e)^x > (2e)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

vi) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο f (x) = $\log_2 x$ (Σχ.1) είναι

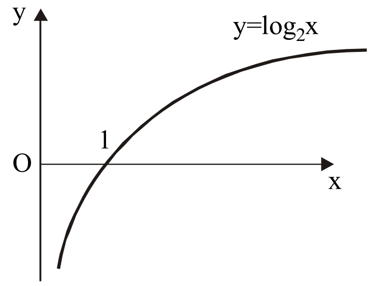
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R -{1}



Σχ. 1

2. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο f (x) = $\log_{\frac{1}{2}} x$ (Σχ.2) είναι

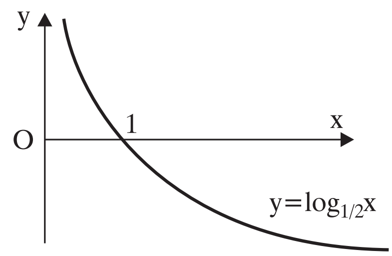
Α. το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. το διάστημα $[0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R-{1}



Σχ.2

3. ***** Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο f (x) = $\log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R

Γ. Το διάστημα $(0,+\infty)$ **Δ.** Το σύνολο R* **Ε.** Το σύνολο R-{1}

4. ***** Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_3 x$ (Σχ.3) είναι

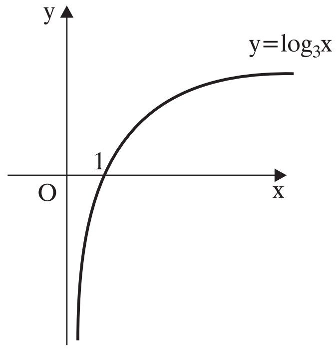
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0)$

Γ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το διάστημα $(-\infty,0)$

Ε. το σύνολο R



Σχ. 3

5. ***** Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (Σχ.4) είναι

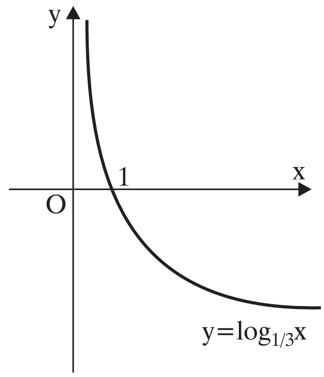
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0)$

Γ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το σύνολο R

Ε. το διάστημα $(-\infty,0)$



Σχ. 4

6. ***** Το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R **Γ.** Το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. Το διάστημα $(-\infty,0)$ **Ε.** Το διάστημα $(-\infty,0]$

7. ***** Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_4 x$ (Σχ.5) τέμνει

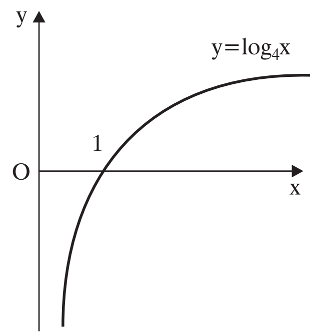
Α. μόνο τον άξονα y΄y

Β. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y

Γ. μόνο τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)

Δ. τον άξονα x΄x σε δύο σημεία

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα



Σχ. 5

8. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ (Σχ.6) τέμνει

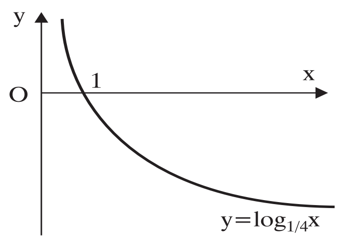
Α. μόνο τον άξονα y΄y

Β. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y

Γ. μόνο τον άξονα x΄x σε δύο σημεία

Δ. τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)

Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 6

9. ***** Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $o < \alpha \neq 1$ έχει γραφική παράσταση που τέμνει

Α. μόνο τον άξονα y΄y

Β. τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)

Γ. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y

Δ. τον άξονα x΄x σε δύο σημεία

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

10. ***** Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $o < \alpha < 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως αύξουσα **Β.** σταθερή **Γ.** άρτια

Δ. γνησίως φθίνουσα **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

11. ***** Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $\alpha > 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως αύξουσα **Β.** περιττή **Γ.** σταθερή

Δ. γνησίως φθίνουσα **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

12. ***** Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ (Σχ.7) είναι

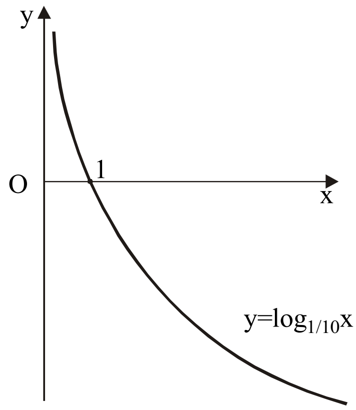
Α. γνησίως αύξουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα



Σχ. 7

3. ***** Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log x$ (Σχ.8) είναι

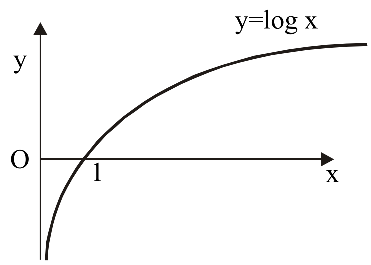
Α. γνησίως αύξουσα

Β. περιοδική

Γ. σταθερή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 8

4. ***** Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$ (Σχ.9) είναι

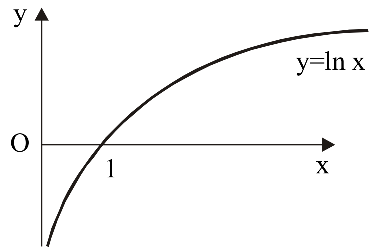
Α. γνησίως αύξουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 9

5. ****** Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\ln x|$ (Σχ.10) **δεν** ισχύει ότι

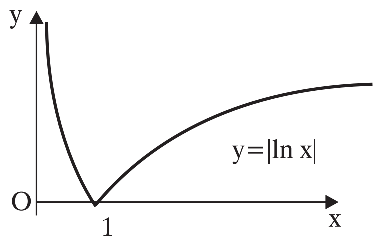
Α. έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,+\infty)$

Γ. έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Ε. τέμνει τον άξονα y΄y.



Σχ. 10

16. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \log_2 x$ (Σχ. 11) ως προς

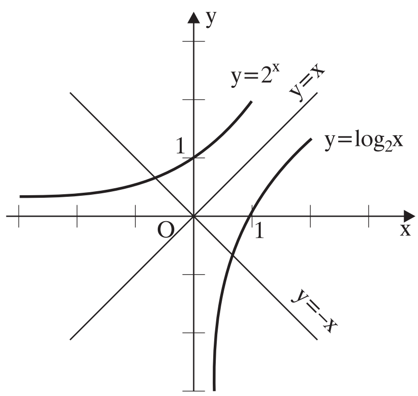
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0,0)

Γ. την ευθεία $y = x$

Δ. την ευθεία $y = -x$

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 11

7. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g(x)= $\log_{\frac{1}{2}} x$ (Σχ.12) ως προς

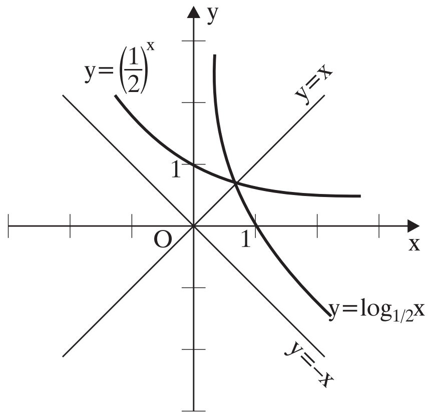
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0,0)

Γ. την ευθεία y = - x

Δ. την ευθεία y = x

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 12

18. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = e^x είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x)= lnx (Σχ.13) ως προς

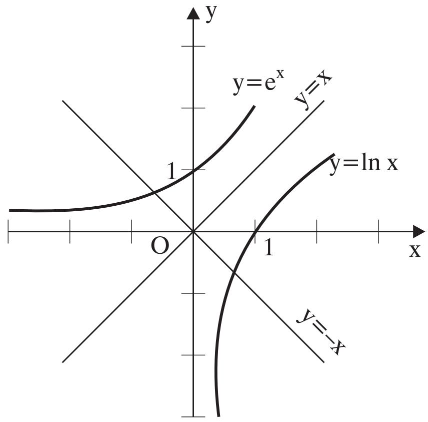
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0,0)

Γ. την ευθεία y= x

Δ. την ευθεία y= -x

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 13

19. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \log_\alpha x$ όταν $0<\alpha\neq 1$ ως προς

Α. τον άξονα $y'y$ **Β.** την ευθεία $y = x$ **Γ.** το σημείο $(0,0)$

Δ. την ευθεία $y = -x$ **Ε.** τον άξονα $x'x$

20. ***** Η ισοδυναμία $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow x = \alpha^y$ ισχύει πάντοτε με τις προϋποθέσεις

Α. $x \in R$ και $\alpha > 0$ **Β.** $x \in [0,+\infty)$ και $0 \leq \alpha \neq 1$

Γ. $x \in (0,+\infty)$ και $o < \alpha \neq 1$ **Δ.** $x \in R$ και $\alpha \neq 1$

Ε. $x \geq 0$ και $\alpha \geq 0$

21. ***** Αν $\log_x 32 = 5$ τότε το x είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** 2 **Γ.** -2 **Δ.**1 **Ε.** 10

22. ***** Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 7 **Β.** 12 **Γ.** 64 **Δ.** 81 **Ε:** 9

23. ***** Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 32 **Β.** 16 **Γ.** 128 **Δ.** 12 **Ε.** 6

24.* Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με

Α. 1 **Β.** log5 **Γ.** 5 **Δ.** log3 **Ε.** 0

25.* Η παράσταση $\log_\alpha \alpha$ με $0<\alpha\neq 1$ είναι ίση με

Α. α^2 **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2α

26. ***** Η παράσταση $\log_\alpha 1$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι ίση με

Α. α^2 **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2α

27. ***** Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 10 **Δ.** 100 **Ε.** 10.000

28. ***** Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

29. ***** Η παράσταση log12 - log3 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log15 **Γ.** log36 **Δ.** 12log3 **Ε.** log4

30. ***** Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με

Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

31. ***** Η παράσταση $\frac{\log 2}{\log 3}$ είναι ίση με

Α. $\log\frac{2}{3}$ **Β.** $\log_2 3$ **Γ.** $\log_3 2$ **Δ.** $\log\frac{3}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

32. ***** Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με

Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ.** 1 **Ε.** log200

33. ***** Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_5 2 < \log_5 \frac{1}{2}$ **Β.** $\log_5 2 \leq \log_5 \frac{1}{2}$

Γ. $\log_5 2 > \log_5 \frac{1}{2}$ **Δ.** $\log_5 2 = \log_5 \frac{1}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

34. ***** Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Β.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 \leq \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Γ.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} 7$

Δ. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

35. ***** Ο $\log(4-x^2)$ ορίζεται αν

Α. $x > 2$ **Β.** $-2 < x < 2$ **Γ.** $x < -2$ **Δ.** $x = 2$ **Ε.** $x = -2$

36. ***** Ο $\log|x-1|$ **δεν** ορίζεται αν

Α. $x > 1$ **Β.** $x \neq 1$ **Γ.** $-1 < x < 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x = 1$

37. ***** Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται αν

Α. $x = 6$ **Β.** $x < 6$ **Γ.** $x > 7$ **Δ.** $x = 7$ **Ε.** $6 < x < 7$

38. ***** Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 12 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 10

39. ****** Αν $\log\theta = 1{,}62$ τότε ο θ ανήκει στο διάστημα

Α. (0,1) **Β.** (1,2) **Γ.** (2,5) **Δ.** (5,10) **Ε.** (10,100)

40. ****** Αν ισχύει $\log(\eta\mu x) = 0$ τότε είναι

Α. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ **Β.** $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2\kappa\pi$

Δ. $x = 2\kappa\pi + \pi$ **Ε.** $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

41. ****** Αν ισχύει log(εφx)= 0 τότε είναι

Α. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ **Β.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

Δ. $x = k\pi$ **Ε.** $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$

42. ***** Αν log50 - log2 = logx τότε το x είναι ίσο με

Α. 100 **Β.** 52 **Γ.** 25 **Δ.** 48 **Ε.** 12,5

43. ***** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = \ln x$ και $y = \frac{1}{2}$ τέμνονται στο σημείο $A(x_o, \frac{1}{2})$ (Σχ.14). Τότε το x_o είναι ίσο με

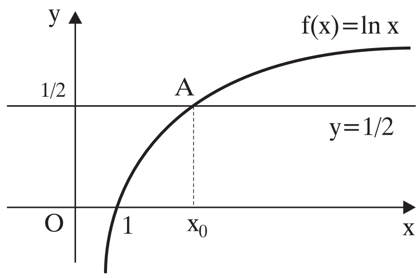
Α. e

Β. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $\sqrt{e}$

Ε. $\frac{3}{2}$

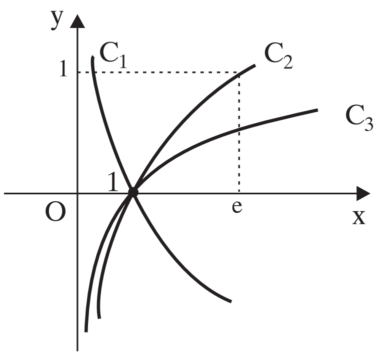


Σχ. 14

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Στη στήλη Α υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>



Σχ.15

</td><td>

$f_1(x) = \log x$
$f_2(x) = \ln x$
$f_3(x) = \log_2 x + 1$
$f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$f_5(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 1$

</td></tr>
</table>

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

C_1	C_2	C_3

2. ***** Κάθε ισότητα της στήλης Α ισοδυναμεί με μια ισότητα της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α. $\alpha^8 = 3$
1. $\log_\alpha 3 = 8$	**Β.** $\omega = e^x$
2. $\log_8 \alpha = 3$	**Γ.** $x^\omega = e$
3. $\ln x = 1+\omega$	**Δ.** $\alpha = 8^3$
4. $\omega \ln x = 1$	**Ε.** $x = e^{\omega+1}$
	ΣΤ. $\alpha = 3^8$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε ισότητα της στήλης Α να αντιστοιχεί η ισοδύναμή της ισότητα που βρίσκεται στη στήλη Β.

1	2	3	4

3. * Στη στήλη Α υπάρχουν λογαριθμικές παραστάσεις και στη στήλη Β διάφορα αναπτύγματα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\log\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$ **2.** $\ln(xy^2)$ **3.** $\ln(10xy)$	**Α.** 3logx-2logy **Β.** lnx+2lny **Γ.** 2logx-3logy **Δ.** ln10+lnx+lny **Ε.** 1+lnx+lny

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε λογαριθμική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί το ανάπτυγμά της που βρίσκεται στη στήλη Β.

1	2	3

4. ***** Στη στήλη Α υπάρχουν αναπτύγματα και στη στήλη Β κάποιες παραστάσεις.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. log4-logx+2logy **2.** logα+2logβ-logγ **3.** lnx-2lny+2	**Α.** $\log\left(\frac{4y^2}{x}\right)$ **Β.** $\ln\left(\frac{xe^2}{y^2}\right)$ **Γ.** $\ln\left(\frac{2x}{y^2}\right)$ **Δ.** $\ln\left[(x+e)(e-x)\right]$ **Ε.** $\log\left(\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\right)$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε ανάπτυγμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η ισοδύναμή του παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

1	**2**	**3**

Ερωτήσεις διάταξης

Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

1. ***** $Α = \log 0{,}5$ $\quad Β = \log\sqrt{2}$ $\quad Γ = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad Δ = 0$ $\quad Ε = 1$

2. ***** $Α = \log_2 \frac{1}{2}$ $\quad Β = \log_2 \frac{1}{3}$ $\quad Γ = \log_2 \sqrt{5}$ $\quad Δ = 0$ $\quad Ε = 1$

3. ***** $Α = \log_{0.5} \frac{1}{4}$ $\quad Β = \log_{0.5} 4$ $\quad Γ = \log_{0.5} 10$ $\quad Δ = 0$ $\quad Ε = 1$

Να τοποθετήσετε κατά σειρά μεγέθους τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

4. ***** $Α = \log_{0.5} x$ $\quad Β = \log_2 x$ $\quad Γ = \log_3 x$ $\quad Δ = 0$

α) Αν $0 < x < 1$

β) Αν $x > 1$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\log_5 \cdots = 2$

ii) $\log_5 25 = \cdots$

iii) $\log_2 \cdots = -3$

iv) $\log_{\frac{1}{2}} \cdots = -3$

v) $\log_\alpha (\alpha^\rho) = \cdots$, $\rho \in R$

vi) $\log_5 \sqrt{5} = \cdots$

vii) $\log_6 \frac{1}{6} = \cdots$

viii) $\log_6 \cdots = 2$

ix) $\ln \cdots = 2$

x) $\ln \cdots = -1$

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\log_\alpha 1 = \cdots$

ii) $\log_\alpha \alpha = \cdots$

iii) $\log_\alpha \sqrt{\alpha} = \cdots$

iv) $\log_{\dots} \alpha = 1$

v) $\log_\alpha \frac{1}{\alpha} = \cdots$

vi) $\log_{\dots} \sqrt{k} = \frac{1}{2}$

vii) $\log_\alpha \cdots = \frac{1}{3}$

viii) $\log_{\dots} \alpha^2 = 1$

ix) $\log_{\dots} \alpha^3 = 3$

x) $\log_\alpha \cdots = 0$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ***** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x)=\log(1-x)$ **ii)** $\log(1+x)=1+\log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$ **iv)** $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$

2. ****** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$ **ii)** $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

iii) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$

3. ****** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$ **ii)** $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$

4. ****** **α)** Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$.

5. ******* Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1=\log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $\alpha_2=\log_3 81$.

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_\omega x^3}-9\cdot 3^{\log_\omega x^2}-9\cdot 3^{\log_\omega x}+81=0$.

6. ****** **i)** Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x}=x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$

7. **** i)** Να αποδείξετε ότι: $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$ αν $0<x\neq 1$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $\alpha^{\log_\beta \gamma}=\gamma^{\log_\beta \alpha}$ με $(0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1)$

8. **** i)** Να αποδείξετε ότι $x^{\log y}=y^{\log x}$ με $x,y>0$

ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{x\cdot y}=1 \end{cases}$

iii) Αν οι λύσεις του (**ii**) είναι ρίζες της εξίσωσης:

$\log[\log(x^2+x\log\theta-110)]=0$ να βρείτε το $\theta\in R_+^*$

9. ******* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\log_2\dfrac{x-2}{x(x-1)}-\log_{\sqrt{2}}2\cdot[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)]$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\log_2\dfrac{(x-2)(x-1)}{x}$

iii) Να λύσετε ως προς $\lambda\in R$ την εξίσωση: $2\lambda f(4)=\log_2 3^{\lambda-2}+(2-\lambda)\cdot\log_2 2$.

10. ****** Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$.

11. ****** Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

12. ****** Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

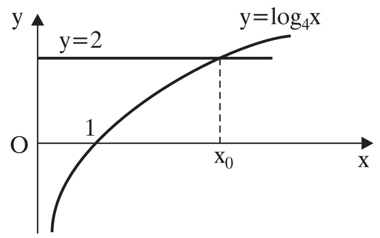
$$\log x+\log x^3+\log x^5+\cdots+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2$$

13. ****** Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει $\alpha_\rho = k \cdot \alpha_1$, όπου ο α_ρ ο όρος τάξεως ρ, α ο πρώτος της όρος, και λ ο λόγος της να αποδείξετε ότι:

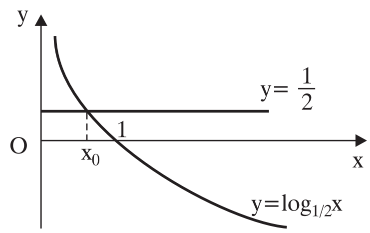
$$(\rho-1)\log\lambda = \log k$$

14. ****** Να βρείτε το x_o σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

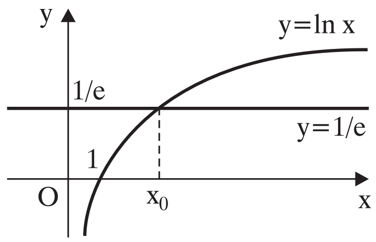
i)



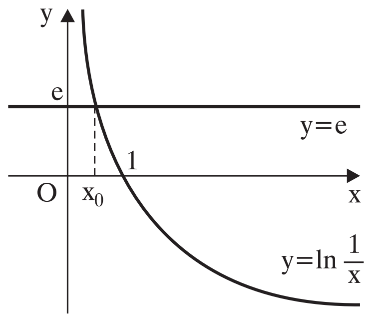
ii)



iii)

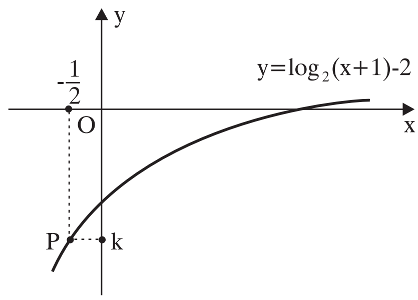


iv)



5. ****** Να βρείτε: **α)** τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_2(x+1) - 2$ (Σχ.16).

β) Το k ώστε το σημείο $P\left(-\frac{1}{2}, k\right)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση.



Σχ. 16

16. ****** Να λύσετε την εξίσωση ln(συνx) = 0.

17. ****** Ο θόρυβος y ενός ήχου σε dB (ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο $y = 20\log\frac{x}{20}$ όπου x η πίεση που ασκεί το ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρούμενη σε μP (μικρο Pascals, 1μP= 10^{-6}P).

α) Πόση πίεση ασκεί ένα αθόρυβο κύμα στα μόρια του αέρα;

β) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $x = 2{\cdot}10^{6,5}$ μP στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Πόσο dB ήταν ο θόρυβος που προξένησε;

Δίνεται ότι: Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβός της είναι το 20dB (όσος δηλαδή ο θόρυβος του θροΐσματος των φύλλων ενός δέντρου σε ελαφρύ φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-).

18. ****** Ο θόρυβος L σε dB (ντεσιμπέλ) που προκαλεί μια ηχητική πηγή δίνεται από τον τύπο $L = 120 + 10\log(10^{-12}I)$ όπου I το μέτρο της έντασης του ήχου σε Watt/m^2.

α) Πόση πρέπει να είναι (το πολύ) η ένταση μια "αθόρυβης" ηλεκτρικής συσκευής;

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Είδος θορύβου	**Θόρυβος σε dB**	**Ένταση ήχου σε Watt/m^2**
Μηχανές αεροπλάνου Jet (σε απόσταση 30m)	140	
Μουσική Rock (1,5m μακριά από το ηχείο)		10^{12}
Μοτοσικλέτα (με κανονική εξάτμιση)	80	
Συνομιλία (σε ήρεμο κλίμα)		10^{6}

γ) Σ' ένα πεζοδρόμιο δουλεύουν ταυτόχρονα σε πολύ μικρή απόσταση 2 κομπρεσέρ που το καθένα ξεχωριστά προκαλεί θόρυβο 130 dB. Πόσος είναι ο συνολικός θόρυβος που προκαλεί και τα δύο μαζί;

Δίνονται: **i)** Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβος της είναι 20dB (όσος δηλαδή είναι ο θόρυβος του θροίσματος των φύλλων του δένδρου σε ελαφρό φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-).

ii) $\log 2 \cong 0{,}30$.

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει η ισοδυναμία.

$\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$. **Σ** **Λ**

2. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = \alpha$ **Σ** **Λ**

3. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ **Σ** **Λ**

4. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha 1 = 1$ **Σ** **Λ**

5. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha = 1$ **Σ** **Λ**

6. * Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(10\theta) = 1 + \log\theta$ **Σ** **Λ**

7. * Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\left(\frac{\theta}{10}\right) = 1 - \log\theta$ **Σ** **Λ**

8. * Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\theta^{10} = \theta$ **Σ** **Λ**

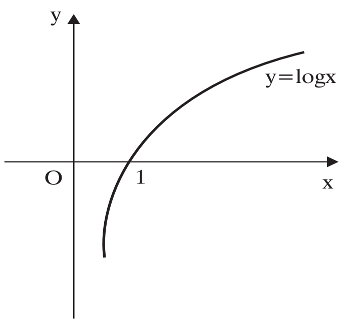
9. * Ισχύει ότι $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$ **Σ** **Λ**

0. * Ισχύει ότι $\ln 27 = \left(e^3\right)^9$ **Σ** **Λ**

1. * Στο σχήμα 17 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \log x$$

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



Σχ. 17

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$. **Σ** **Λ**

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R **Σ** **Λ**

iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R **Σ** **Λ**

iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x. Σ Λ

v) Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των y΄y Σ Λ

vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=10^x$ ως προς την ευθεία y = x. Σ Λ

vii) Ισχύει ότι $f(2)<f(3)$ Σ Λ

viii) Το σημείο (1,0) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

ix) Το σημείο (0,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

x) Το σημείο (10,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

12. * Ισχύει ότι:

i) $\log x > \ln e$, για κάθε x > 0 Σ Λ

ii) $\log x^{-2} < \ln e^{-2}$ για κάθε x > 0 Σ Λ

iii) $\log 10^2=2$ Σ Λ

iv) $\ln e^3=3$ Σ Λ

v) $\log\frac{10}{e}=1-\log e$ Σ Λ

3. * **I)** Αν x < y τότε $\log x<\log y$ Σ Λ

ii) Αν x < y τότε $\ln x > \ln y$ Σ Λ

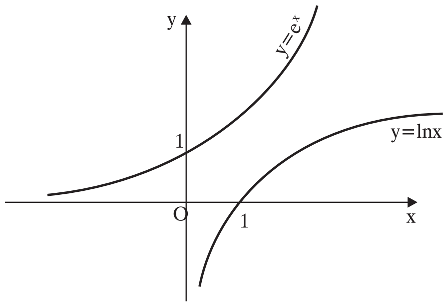
iii) Αν x < y τότε $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$ Σ Λ

iv) Αν x < y τότε $\log_3 x > \log_3 y$ Σ Λ

4. * Στο σχήμα 18 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους

$$f(x) = \ln x \text{ και } g(x) = e^x.$$

Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:



Σχ. 18

i) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι συμμετρικές ως την ευθεία y = x. **Σ** **Λ**

ii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν τέμνονται. **Σ** **Λ**

iii) Οι γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο (1,0). **Σ** **Λ**

iv) Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο (0,1). **Σ** **Λ**

v) Ισχύει ότι $f(2) < g(2)$ **Σ** **Λ**

vi) Ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ **Σ** **Λ**

vii) Η f και η g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στα πεδία ορισμού τους. **Σ** **Λ**

Σ Χ Ε Δ Ι Α Κ Ρ Ι Τ Η Ρ Ι Ω Ν
Α Ξ Ι Ο Λ Ο Γ Η Σ Η Σ Τ Ο Υ
Μ Α Θ Η Τ Η Σ Τ Η Ν Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

α) Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R **Δ.** το σύνολο R - {1} **Ε.** το σύνολο R^*

β) Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α \neq 1$ έχει σύνολο τιμών

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$ **Δ.** το διάστημα $(0,+\infty)$ **Ε.** Το σύνολο R^*

γ) Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_α x$ με $0 < α \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R **Γ.** Το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. Το σύνολο R* **Ε.** Το σύνολο R-{1}

δ) Το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x)=\log_α x$ με $0 < α \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R **Γ.** Το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. Το διάστημα $(-\infty,0)$ **Ε.** Το διάστημα $(-\infty,0]$

ε) Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_α x$ με ο< $α \neq 1$ έχει γραφική παράσταση που τέμνει

Α. μόνο τον άξονα y΄y **Β.** τον άξονα x΄x στο σημείο (1, 0)

Γ. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y **Δ.** τον άξονα x΄x σε δύο σημεία

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

(10 μονάδες)

Θέμα 2ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $4^{x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (4 μονάδες)

Β. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$ (2 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x} - 2\cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$ (4 μονάδες)

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και ϑ, ϑ_1, ϑ_2 θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

α) $\log_\alpha(\vartheta_1 \cdot \vartheta_2) = \log_\alpha \vartheta_1 + \log_\alpha \vartheta_2$ και

β) $\log_\alpha \vartheta^k = k\log_\alpha \vartheta$, $k \in \Re$ (4 μονάδες)

Β. α) Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

β) Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με

Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

γ) Αν log50 + log2 = logx τότε το x είναι ίσο με

Α. 100 **Β.** 25 **Γ.** 52 **Δ.** 10 **Ε.** 2

δ) Η συνάρτηση f (x) = log (x - 6) + log (x - 7) ορίζεται αν

Α. x = 6 **Β.** x < 6 **Γ.** x > 7 **Δ.** x = 7 **Ε.** 6 < x < 7

ε) Αν log [log (x - 2)] = 0 τότε το x είναι ίσο με

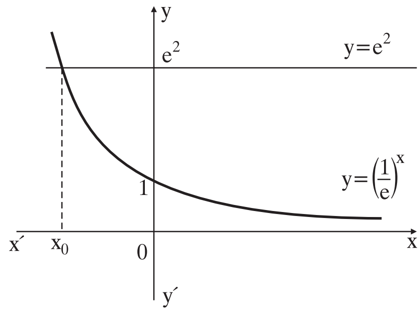
Α. 12 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 10

(10 μονάδες)

Θέμα.2ο

α) Να βρείτε το ($\alpha \neq 5$) ώστε η $f(x)=\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το x_0 (που είναι η τετμημένη του κοινού σημείου της ευθείας $y = e^2$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$.)



(6 μονάδες)

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Άλγεβρα (επαναληπτικό)
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. α) Τα πολυώνυμα $P(x) = α_μ x^μ + \ldots α_1x + α_0$ και $q(x) = β_ν x^ν + \ldots + β_1x + β_0$ με $μ \geq ν$ πότε λέμε ότι είναι ίσα; (2,5 μονάδες)

β) Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - ρ$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = ρ$. Είναι δηλαδή $υ = P(ρ)$. (5 μονάδες)

γ) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $α_νx^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + \ldots + α_1x + α_0 = 0$ με ακεραίους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $ρ \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε αποδείξτε ότι ο $ρ$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου $α_0$. (5 μονάδες)

Β. α) Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - βx + 5$ και $q(x) = x^3 + βx^2 + 5 - β$, $β \in R$ είναι ίσα όταν ο $β$ ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 5

β) Αν τα πολυώνυμα

$$P(x) = λ^{ν+1}x^ν + (2λ - 3)x^2 + x - 1 \text{ και } q(x) = λx^{1998} - 3x^2 + x - (λ + 1)$$

είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός $λ$ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1998

Ε. κάθε πραγματικό αριθμό

γ) Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 5$ το διαιρούμε το διώνυμο $x - ρ$. Αν $υ$ το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε ισχύει ότι

Α. $υ > 0$ **Β.** $υ < 0$ **Γ.** $υ = 0$ **Δ.** $υ \leq 0$ **Ε.** $υ = - 5$

δ) Το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2000} + x - 3$ το διαιρούμε το διώνυμο $x - 1$. Το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι

Α. 0 **Β.** - 3 **Γ.** 3 **Δ.** - 2 **Ε.** 2

ε) Η εξίσωση $x^3 - 5x^2 + κx + 2 = 0$, $κ \in Z$, αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό

Α. - 1 **Β.** 1 **Γ.** - 2 **Δ.** 2 **Ε.** 3

(12,5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι 120°.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 - \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2$. (10 μονάδες)

β) Αν $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{2}$, να βρείτε τις γωνίες Β και Γ. (15 μονάδες)

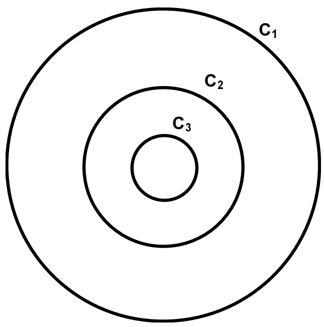
Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (10 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$. (15 μονάδες)

Θέμα 4ο



Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος c_1 έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ. Οι ομόκεντροί του κύκλοι c_2 και c_3 έχουν ακτίνα $\dfrac{R}{2}$ και $\dfrac{R}{4}$ αντιστοίχως. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία να κατασκευάζουμε κύκλους (κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα απ' αυτόν).

α) Να βρείτε, συναρτήσει του R, την ακτίνα των c_5, c_6

β) Να βρείτε το μήκος του κύκλου c_7

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου c_{12}

δ) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 5 πρώτων κύκλων

ε) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο. (25 μονάδες)

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Άλγεβρα (επαναληπτικό)
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. α) Να συμπληρώσετε τις ισότητες: $(0 < \alpha \neq 1$ και $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0)$

$\log_\alpha \alpha^x =$ …………………… $\log_\alpha 1 =$ ……………………

$\log_\alpha \alpha =$ ……………………. $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$ ……………………

$\log_\alpha (\theta_1\theta_2) =$ ……………….. (5 μονάδες)

β) Αν $0 < \alpha \neq 1$, $\theta > 0$ και $\kappa \in R$ να αποδείξετε την ισότητα: $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$.

(7,5 μονάδες)

Β. α) Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

β) Η παράσταση log12 - log3 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log15 **Γ.** log36 **Δ.**12log3 **Ε.** log4

γ) Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με

Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

δ) Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με

Α. 5 **Β.** log5 **Γ.** 3 **Δ.** log3 **Ε.** 0

ε) Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με

Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ.** 1 **Ε.** log200

(12,5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^5 + x^4 + κx + λ = 0$.

α) Να προσδιορίσετε τα κ, λ $\in$ R ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x + 1)^2$.

β) Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση.

(25 μονάδες)

Θέμα 3ο

Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $α_ν = 3ν + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $α_{ν+1}$. (2,5 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος. (7,5 μονάδες)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της. (7,5 μονάδες)

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62. (7,5 μονάδες)

Θέμα 4ο

Ένας φωτογράφος προετοιμάζοντας μια φωτογράφιση μέσα στο στούντιο τοποθέτησε τρεις προβολείς εδάφους στα σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε:

γωνΑ = 120° , ΒΓ = 5,19 m και ΑΒ = 3 m.

α) Επειδή ο φωτισμός, όταν οι γωνΓ και γωνΒ είναι μεγαλύτερες από 35° δεν επιτρέπει την σωστή φωτογράφιση, ελέγξτε αν ο φωτογράφος έστησε σωστά τους προβολείς υπολογίζοντας τις γωνίες Β και Γ. (10 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΓ. (7,5 μονάδες)

γ) Ο φωτογράφος επιλέγει να τοποθετήσει το κέντρο του θέματος της φωτογράφισης σ' ένα σημείο που δέχεται τον ίδιο φωτισμό και από τους τρεις προβολείς. Πόσο θα απέχει το σημείο αυτό από κάθε προβολέα;

(7,5 μονάδες)

(**Δίνεται** $\sqrt{3} = 1,73$ και ότι οι προβολείς έχουν την ίδια φωτεινότητα).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γ	**11. Δ**	**21. Ε**	**31. Α**
2. Β	**12. Α**	**22. Δ**	**32. Γ**
3. Δ	**13. Δ**	**23. Δ**	**33. Ε**
4. Δ	**14. α) Ε β) Ε**	**24. Β**	**34. Β**
5. Ε	**15. Δ**	**25. Ε**	**35. Δ**
6. Α	**16. Β**	**26. Β**	**36. Γ**
7. Β	**17. Ε**	**27. Γ**	**37. Γ**
8. Γ	**18. Β**	**28. Α**	**38. Β**
9. Α	**19. Β**	**29. Ε**	
10. Α	**20. Γ**	**30. Δ**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. Β < Δ < Α < Ε <Γ

2. Α < Ε < Γ <Δ < Β

3. **α)** αν x > 0: Γ > Ε > Β > Δ > Α

β) αν x = 0: Α = Β = Γ = Δ = Ε

γ) αν x < 0: Α > Δ > Β > Ε > Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

C_1	C_2	C_3
f_5	f_2	f_1

2.

C_1	C_2	C_3
f_4	f_1	f_3

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1.

C_1	C_2	C_3	C_4
$f_1(x) = 2^{-x}$	$f_2(x)=2^x$	$f_3(x)=-2^{-x}$	$f_4(x)=-2^x$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i) $x = -2$ ii) $x = -3$ iii) $x = -5$ iv) $x = 3$ v) $x = -4$

2. i) $x = 2$ ή $x = 3$ ii) $x = -3$ ή $x = 3$ ή $x = 2$
iii) $x = 1$ iv) $x = 1$ v) $x = 1$ vi) $x = 2$

3. i) $x = 0$ ή $x = 4$ ii) $x = \frac{1}{2}$ iii) $x = -1$ ή $x = 2$
iv) $x = 4$ v) $x = \frac{3}{2}$

4. i) $x = 1$ ή $x = 4$ ή $x = -2$ ή $x = 2$ ii) $x = 0$ ή $x = 1$

5. i) $x = k\pi - \frac{\pi}{12}$ ή $x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$ ii) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

iii) $x = k\pi$ ή $x = \frac{2}{3}k\pi$

6. i) $1 < x < 6$ ii) $x < -1$ ή $x > 5$ iii) $1 < x < 4$ iv) $1 < x < 2$

7. i) $(x,y) = (1,1)$ ii) $(x,y) = (3,5)$ ή $(2,6)$
iii) $(x,y) = (5,-2)$ iv) $(x,y) = (2,1)$

8. ii) **Υπόδειξη:** Παρατηρήστε ότι $f(-x) = g(x)$

10. i) $3 < \alpha < 5$ ii) $\alpha > 5$

11. α) $-1 < k < 1$ β) όχι γ) $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ) $k = 0$

12. α) $40^{o}C$ β) $t = 3$ γ) $36{,}25^{o}C$

13. i) $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x+2)}{f(x+1)} = \frac{f(x+7)}{f(x+6)} = \alpha$, ii) $\frac{f(x+3)}{f(x)} = \frac{f(x+6)}{f(x+3)} = \frac{f(x+16)}{f(x+13)} = \alpha^3$

iii) $\frac{f(x+\lambda)}{f(x)} = \frac{f(x+\beta+\lambda)}{f(x+\beta)} = \alpha^{\lambda}$, iv) η C'

14. 312,5gr

15. α) $k = \frac{3}{2}$ β) $P_0 = 50$ γ) $t = 40$min

16. α) $k = 2$ β) $\alpha = \frac{1}{2}$ γ) $\alpha = 4$ δ) $k = 4$, $\alpha = 2$

ε) $k = 4$, $\alpha = \frac{1}{2}$

17. i) $x_0 = 2$ ii) $x_0 = -2$ iii) $x_0 = -1$ iv) $x_0 = -2$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**i)**	**Σ**	**2.**	**i)**	**Λ**	**3.**	**i)**	**Σ**	**4.**	**i)**	**Σ**
	ii)	**Λ**		**ii)**	**Λ**		**ii)**	**Σ**		**ii)**	**Σ**
	iii)	**Λ**		**iii)**	**Λ**		**iii)**	**Σ**		**iii)**	**Λ**
	iv)	**Λ**		**iv)**	**Σ**		**iv)**	**Σ**		**iv)**	**Σ**
	v)	**Σ**		**v)**	**Σ**		**v)**	**Σ**		**v)**	**Σ**
	vi)	**Σ**								**vi)**	**Λ**
	vii)	**Λ**									
	viii)	**Σ**									
	ix)	**Σ**									
	x)	**Λ**									

Λογαριθμικη Συναρτηση

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	**10. Δ**	**19. Β**	**28. Β**	**37. Ε**
2. Α	**11. Α**	**20. Γ**	**29. Ε**	**38. Α**
3. Γ	**12. Δ**	**21. Β**	**30. Δ**	**39. Ε**
4. Ε	**13. Α**	**22. Δ**	**31. Γ**	**40. Α**
5. Δ	**14. Α**	**23. Ε**	**32. Δ**	**41. Β**
6. Β	**15. Ε**	**24. Γ**	**33. Γ**	**42. Γ**
7. Γ	**16. Γ**	**25. Β**	**34. Δ**	**43. Δ**
8. Δ	**17. Δ**	**26. Δ**	**35. Β**	
9. Β	**18. Γ**	**27. Α**	**36. Ε**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

C_1	C_2	C_3
f_4	f_2	f_1

2.

1	2	3	4
Α	Δ	Ε	Γ

3.

1	2	3
Γ	Β	Δ

4.

1	2	3
Α	Ε	Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. **1.** Α < Γ < Δ < Β < Ε
2. **2.** Β < Α < Δ <Ε < Γ
3. **3.** Γ < Β < Δ < Ε < Α
4. **4.** **i)** Αν $0 < x < 1$: Β < Γ < Δ < Α

   ii) Αν $x > 1$: Α < Δ < Γ < Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. i) 25 ii) 2 iii) $\frac{1}{8}$ iv) 8 v) ρ vi) $\frac{1}{2}$ vii) -1

viii) 36 ix) e^2 x) $\frac{1}{e}$

2. i) 0 ii) 1 iii) $\frac{1}{2}$ iv) α v) -1 vi) k

vii) $\sqrt[3]{\alpha}$ viii) α^2 ix) α x) 1

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i) $x = 0$ ii) $x = \frac{9}{11}$ iii) $x = 1$ ή $x = \frac{5}{6}$ iv) $x = 4$

2. i) $x = 2$ ii) $x = 2$ iii) $x = 0$

3. i) $x = 16$ ii) $x = \sqrt{2}$ iii) $x = 8$

4. α) 3 β) $x = 10$

5. α) $\omega = 3$ β) $x = 3$ ή $x = 9$

6. ii) $x = 10^3$

7. ii) $x = 5^4$

8. ii) $x = y = 10$ iii) $\theta = 10^2$

9. i) $(2,+\infty)$ iii) $\lambda = -2$

10. $x = -0,9$ ή $x = 99$

11. $(x, y) = \left(\frac{1}{e^2}, e^4\right)$ ή $(x, y) = \left(e^4, \frac{1}{e^2}\right)$

12. $x = 100$

14. i) $x_o = 16$ ii) $x_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) $x_0 = e^{\frac{1}{e}}$ iv) $x_o = e^{-e}$

15. α) $A(3,0)$, $B(0,-2)$ β) $k = -3$

16. $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

17. α) $x = 200\mu P$ β) $y = 110dB$

18. α) $I = 100$ Watt/m^2
β) ένταση ήχου Jet $I = 10^{14}$ Watt/m^2
θόρυβος Rock 120dB
ένταση ήχου μοτοσικλέτας $I = 10^6$ Watt/m^2
θόρυβος συνομιλίας 60dB

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1. Σ	11. i) Σ	12. i) Λ	14. i) Σ
2. Λ	ii) Σ	ii) Λ	ii) Σ
3. Σ	iii) Λ	iii) Σ	iii) Σ
4. Λ	iv) Λ	iv)Σ	v) Σ
5. Σ	v) Σ	v) Σ	vi) Σ
6. Σ	vi) Σ	13. i) Σ	vii) Σ
7. Λ	vii) Σ	ii) Λ	
8. Λ	viii) Σ	iii) Σ	
9. Σ	ix) Λ	iv)Λ	
10. Λ	x) Σ		

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

Κανονικα Πολυγωνα

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Δύο κανονικά οκτάγωνα είναι όμοια.	**Σ**	**Λ**
2. * Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.	**Σ**	**Λ**
3. * Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό.	**Σ**	**Λ**
4. * Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες είναι κανονικό.	**Σ**	**Λ**
5. * Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.	**Σ**	**Λ**
6. * Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι ίσες μεταξύ τους.	**Σ**	**Λ**
7. * Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα, έχουν ίσα εμβαδά.	**Σ**	**Λ**
8. * Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας του.	**Σ**	**Λ**
9. * Ο λόγος των μηκών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους.	**Σ**	**Λ**
0. * Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους.	**Σ**	**Λ**
1. * Αν $\hat{\varphi}_\nu$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου, τότε $\hat{\varphi}_\nu = 360^\circ - \frac{180^\circ}{\nu}$.	**Σ**	**Λ**

2. * Η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^o}{\nu}$. Σ Λ

3. * Ακτίνα ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του. Σ Λ

4. * Ο περιγεγραμμένος και εγγεγραμμένος κύκλος κάθε κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι κύκλοι. Σ Λ

5. * Η πλευρά ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Σ Λ

6. * Το απόστημα ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με την πλευρά του εξαγώνου. Σ Λ

7. * Το απόστημα ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου. Σ Λ

8. * Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν τα αποστήματα δύο διαδοχικών πλευρών του. Σ Λ

9. * Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές. Σ Λ

0. * Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. Σ Λ

1. * Σε δύο όμοια κανονικά πολύγωνα, ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου των ακτίνων τους. Σ Λ

2. * Ένα περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με όλες τις πλευρές ίσες είναι κανονικό. Σ Λ

3. * Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου έχουν ίσα εμβαδά. Σ Λ

4. * Ο τύπος $4\alpha_\nu^2 = 4R^2 - \lambda_\nu^2$ συνδέει την πλευρά λ_ν, το απόστημα α_ν και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού ν-γώνου. **Σ** **Λ**

5. * Ο λόγος του μήκους κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του ισούται με π. **Σ** **Λ**

6. * Το μήκος κύκλου ακτίνας 1 είναι π. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, η πλευρά του είναι

Α. $R^2\sqrt{2}$ **Β.** $R\sqrt{2}$ **Γ.** $2R$ **Δ.** $2R^2$ **Ε.** $\sqrt{R}$

2. * Εάν η πλευρά κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $R\sqrt{3}$, το απόστημά του είναι

Α. R **Β.** $\frac{R}{3}$ **Γ.** $\frac{R}{2}$ **Δ.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Ε.** $3R$

3. * Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ η πλευρά του είναι

Α. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ **Β.** $2R$ **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** R **Ε.** $\frac{R}{2}$

4. ***** Η σχέση, που συνδέει τα στοιχεία α_ν και λ_ν (αποστήματος και πλευράς) κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{\alpha_\nu^2}{2}+\lambda_\nu^2=R^2$ **Β.** $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{2}=\frac{R^2}{2}$

Γ. $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{4}=R^2$ **Δ.** $\alpha_\nu^2+\lambda_\nu^2=R^2$

Ε. $\alpha_\nu^2+\lambda_\nu^2=\frac{R^2}{4}$

5. ***** Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι ορθή, είναι

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο

Γ. κανονικό πεντάγωνο **Δ.** κανονικό εξάγωνο

Ε. κανονικό δεκάγωνο

6. ***** Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι αμβλεία, είναι

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο

Γ. πεντάγωνο **Δ.** εξάγωνο **Ε.** οκτάγωνο

7. ***** Εάν η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι 60^o, τότε η πλευρά του (συναρτήσει του R) είναι

Α. $\frac{R}{2}$ **Β.** $R\sqrt{3}$ **Γ.** 2R **Δ.** $R\sqrt{2}$ **Ε.** R

8. ***** Αν $\hat{\varphi}_\nu$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου τότε $\hat{\varphi}_\nu$ ισούται με

Α. $180°+\frac{360°}{\nu}$ **Β.** $180°-\frac{360°}{\nu}$ **Γ.** $360°-\frac{180°}{\nu}$

Δ. $360°+\frac{180°}{\nu}$ **Ε.** $\frac{360°}{\nu}$

9. * Αν $P_ν$ η περίμετρος ενός κανονικού ν-γώνου, τότε το εμβαδό του $E_ν$ είναι

Α. $\frac{1}{2}λ_ν \cdot α_ν$ **Β.** $\frac{1}{2}P_ν \cdot α_ν$ **Γ.** $\frac{1}{2}P_ν \cdot λ_ν$

Δ. $\frac{1}{2}P_ν \cdot λ_ν^2$ **Ε.** $\frac{1}{2}νP_ν \cdot λ_ν$

10. * Η πλευρά $λ_6$ κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $R\sqrt{2}$ **Γ.** R **Δ.** $\frac{R}{2}$ **Ε.** $\frac{R}{3}$

11. * Η πλευρά $λ_4$ τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ **Β.** R **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** $R^2\sqrt{2}$ **Ε.** $\frac{1}{3}R\sqrt{2}$

12. * Η πλευρά $λ_3$ ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Β.** R **Γ.** $R\sqrt{3}$ **Δ.** $\frac{1}{2}R$ **Ε.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

13. * Το κανονικό πολύγωνο του οποίου η πλευρά $λ_ν$ ισούται με την ακτίνα R του περιγγεγραμμένου κύκλου είναι

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** πεντάγωνο

Δ. εξάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

14. * Το κανονικό πολύγωνο του οποίου το απόστημα $α_ν$ ισούται με το μισό της πλευράς $λ_ν$ είναι:

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** πεντάγωνο

Δ. εξάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

15. * Το μήκος S τόξου μ μοιρών που ανήκει σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{2πRμ}{180}$ **Β.** $\frac{πR^2μ}{180}$ **Γ.** $\frac{πRμ}{360}$ **Δ.** $\frac{πRμ}{180}$ **Ε.** $\frac{πR^2μ}{360}$

16. * Το εμβαδό Ε κυκλικού δίσκου (0, R) είναι

Α. $2\pi R$ **Β.** πR^2 **Γ.** $\pi^2 R$ **Δ.** $2\pi^2 R$ **Ε.** 2π

17. * Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 90° **Ε.** 120°

18. * Η κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 90° **Ε.** 120°

19. * Η γωνία κανονικού πενταγώνου είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 108° **Ε.** 120°

20. * Η γωνία κανονικού δεκαγώνου είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 120° **Δ.** 144° **Ε.** 150°

21. * Το κανονικό πολύγωνο με γωνία 108° είναι

Α. τετράγωνο **Β.** πεντάγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. οκτάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

22. * Το κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R με κεντρική γωνία 24° είναι

Α. εξάγωνο **Β.** οκτάγωνο **Γ.** δεκάγωνο

Δ. δωδεκάγωνο **Ε.** 15γωνο

23. * Το απόστημα α_3 ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ **Β.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ **Γ.** $\frac{1}{2}R$ **Δ.** $R\sqrt{3}$ **Ε.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

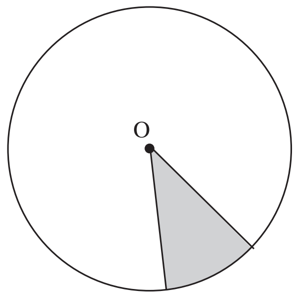
24. * Το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $R\sqrt{2}$ **Β.** $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ **Γ.** $\frac{1}{3}R\sqrt{2}$ **Δ.** $\frac{1}{4}R\sqrt{2}$ **Ε.** $R\sqrt{3}$

25. * Το εμβαδόν E_μ ενός κυκλικού τομέα μ μοιρών είναι

Α. $\frac{\pi R\mu}{360}$ **Β.** $\frac{\pi R^2\mu}{360}$ **Γ.** $\frac{\pi R^2\mu}{180}$ **Δ.** $\frac{\pi R\mu}{180}$ **Ε.** $\frac{\pi R\mu^2}{360}$

26. * Το γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι



Α. ημικύκλιο
Β. μηνίσκος,
Γ. τεταρτοκύκλιο
Δ. κυκλικός τομέας
Ε. κυκλικό τμήμα

27. * Το μήκος κύκλου ακτίνας R είναι

Α. πR **Β.** πR^2 **Γ.** $2\pi R$ **Δ.** $\frac{\pi R^2}{2}$ **Ε.** $2\pi R^2$

28. * Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν
Α. έχουν το ίδιο αριθμό πλευρών
Β. είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο
Γ. είναι κανονικά και έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών
Δ. είναι περιγεγραμμένα σε ομόκεντρους κύκλους
Ε. έχουν τον ίδιο αριθμό γωνιών

29. * Ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο

Α. είναι κανονικό.

Β. είναι όχι απαραίτητα κανονικό.

Γ. έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Δ. έχει όλες τις κεντρικές γωνίες του ίσες.

Ε. έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

30. * Αν ένα κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R) και το απόστημά του α_ν ισούται με το $\frac{R}{2}$, τότε το πολύγωνο είναι

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. οκτάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

31. * Ένα πολύγωνο το οποίο είναι εγγεγραμμένο και ταυτόχρονα περιγεγραμμένο σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι

Α. ισοσκελές τρίγωνο. **Β.** ισοσκελές τραπέζιο.

Γ. τυχόν τετράπλευρο. **Δ.** κανονικό.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

32. * Σε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο (2μ) πλήθος πλευρών η κεντρική του γωνία ω είναι

Α. $\frac{360°}{2}$ **Β.** $\frac{360°}{\mu+2}$ **Γ.** $\frac{360°}{2\mu+2}$

Δ. $\frac{180°}{\mu}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

33. * Κάθε κανονικό πολύγωνο που μπορεί να χωριστεί σε διαδοχικά ισόπλευρα και ίσα τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του πολυγώνου είναι

Α. τετράγωνο **Β.** πεντάγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. δεκάγωνο **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ακτίνας R ισούται με $\frac{R}{2}$, η πλευρά $λ_ν$ ισούται με .... και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

2. ***** Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, η πλευρά του $λ_ν$ ισούται με …..............και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

3. ***** Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, η πλευρά του $λ_ν$ ισούται με…............... και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

4. ***** Εάν η πλευρά $λ_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με R το απόστημά του $α_ν$ ισούται με…................ και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

5. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κανονικό πολύγωνο	**Κεντρική γωνία ($ω_ν$) σε μοίρες**	**Γωνία πολυγώνου ($φ_ν$) σε μοίρες**
τρίγωνο		
τετράγωνο		
οκτάγωνο		
δεκάγωνο		
εικοσάγωνο		

6. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κεντρική γωνία ($ω_ν$) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Πλήθος πλευρών (ν) κανονικού πολυγώνου**
6	
10	
15	
72	

7. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**$λ_ν$: πλευρά κανονικού ν-γώνου**	**$α_ν$: απόστημα κανονικού ν-γώνου**	**$Ε_ν$: εμβαδόν κανονικού ν-γώνου**
3			
4			
6			

8. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Γωνία ($φ_ν$) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Είδος κανονικού πολυγώνου**
60	
108	
135	
150	

9. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**α_ν: απόστημα κανονικού πολυγώνου**	**λ_ν: πλευρά κανονικού πολυγώνου**	**E_ν: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου**
$\nu = 3$	5cm		
$\nu = 4$			$144cm^2$
$\nu = 6$		10cm	

10. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Ακτίνα R κύκλου	**Μήκος L κύκλου**	**Εμβαδόν Ε κύκλου**
	30π	
	$20\pi\alpha$	
$2\alpha\sqrt{3}$		
		$15\pi\alpha^2$
		7π
$\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$		

11. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Ακτίνα R κύκλου	**Γωνία μ μοιρών κυκλ. τομέα**	**Μήκος τόξου S**	**Εμβαδόν Ε κυκλ. τομέα**
8			$\frac{16\pi}{3}$
9		$\frac{9\pi}{5}$	
5α	60		
	150		$\frac{\pi\alpha^2}{12}$
$2\alpha\sqrt{5}$	300		

12. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Τόξο μ μοιρών	**Μήκος τόξου**
10	
	$\frac{\pi R}{4}$
	$\frac{3\pi R}{4}$
180	

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Αντιστοιχίστε κάθε ένα κανονικό πολύγωνο της στήλης (Α) με το εμβαδό του στη στήλη (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R	**Εμβαδά καν. πολυγώνων συναρτήσει του R**
τρίγωνο	$4R^2$
	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
τετράγωνο	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$
εξάγωνο	$2R^2$
	$3R^2\sqrt{3}$

2. ***** Αντιστοιχίστε κάθε πλευρά κανονικού πολυγώνου της στήλης (Α) με το αντίστοιχο απόστημά του, στη στήλη (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Πλευρά λ_ν κανονικού πολυγώνου συναρτήσει του R	**Απόστημα α_ν καν. πολυγώνου συναρτήσει του R**
R	R
	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
	$\frac{R}{3}$

3. * Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Κεντρική γωνία ω_ν κανονικού πολυγώνου	**Πλευρά λ_ν κανονικού πολυγώνου (συναρτήσει του R)**
	$R\sqrt{2}$
60^o	$2R$
	R
90^o	$R\sqrt{3}$
120^o	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

4. * Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Ακτίνα κύκλου	**Εμβαδόν κύκλου**
2α	$\frac{\pi\alpha^2}{4}$
	$4\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{3}$	$\frac{3\pi\alpha^2}{2}$
$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$3\pi\alpha^2$
	$\frac{\pi\alpha^2}{2}$

5. ***** Στη στήλη (Α) αναγράφονται το μέτρο μ μοιρών τόξου και η ακτίνα του κύκλου του, R. Στη στήλη (Β) αναγράφεται το μήκος του S. Αντιστοιχίστε κάθε τόξο της στήλης (Α) με το μήκος του στη στήλη (Β).

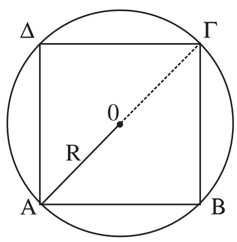
Στήλη Α	Στήλη Β
$\mu = 60^o \quad R = 1$	$S = \pi$
$\mu = 30^o \quad R = \sqrt{2}$	$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$
$\mu = 90^o \quad R = 2$	$S = 2\sqrt{3}\pi$
$\mu = 120^o \quad R = \sqrt{3}$	$S = \frac{\pi}{3}$
	$S = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
	$S = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Σε κύκλο ακτίνας R = 3 cm είναι περιγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο.
Να υπολογίσετε:
α) Την πλευρά του.
β) Το εμβαδόν του.

2. ****** Υπάρχει κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R του οποίου η κεντρική γωνία είναι 16°; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. ****** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R) και η ημιπερίμετρός του είναι 80 cm. Να υπολογιστούν:



α) Η ακτίνα R του κύκλου.

β) Ο λόγος $\dfrac{\text{εμβαδό τετραγώνου}}{\text{εμβαδό κύκλου}}$.

4. ****** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R).
Γνωρίζοντας (βλέπε το σχήμα της άσκησης 3), ότι ΑΓ - ΑΒ = 12 cm, να υπολογιστούν:
α) Η ακτίνα του κύκλου.
β) Το εμβαδόν του κύκλου.

5. ****** Αν είναι $\lambda_4 + \lambda_3 = 96$ cm όπου λ_4 και λ_3 πλευρές των εγγεγραμμένων σε κύκλο (0, R) τετραγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, να υπολογιστούν:
α) Η ακτίνα R του κύκλου.
β) Τα αποστήματα α_4 και α_3 των ανωτέρω κανονικών πολυγώνων.

6. ****** Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός κανονικού εξαγώνου είναι κορυφές επίσης κανονικού εξαγώνου.

7. ****** Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών οκταγώνων είναι $\frac{3}{4}$.

Να υπολογιστούν:

α) Ο λόγος των περιμέτρων τους.

β) Ο λόγος των εμβαδών τους.

8. ****** Κανονικού πολυγώνου, η ακτίνα R είναι 8 cm και το απόστημά του α είναι $4\sqrt{3}$ cm. Να υπολογιστούν:

α) Η πλευρά του λ.

β) Η κεντρική του γωνία ω σε μοίρες.

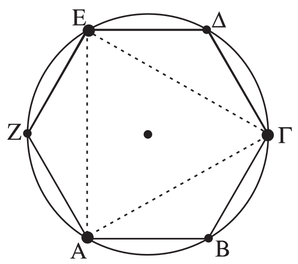
γ) Το πλήθος ν των πλευρών του.

9. ****** Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ.

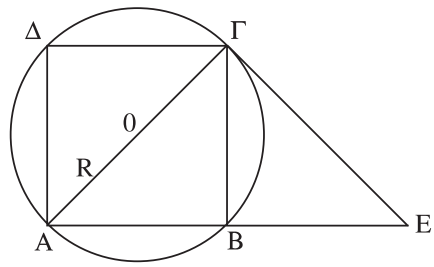
Να υπολογιστούν:

α) Η πλευρά ΑΓ, αν γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 6 cm.

β) Ο λόγος $\frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{(ΑΓΕ)}$ των εμβαδών τους.



0. ****** Δίνεται κύκλος (0, R) και το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ και πάνω στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΒΑ. Να δείξετε ότι:



α) ΑΓ = ΓΕ

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ είναι εφαπτόμενο του κύκλου (0, R) στο σημείο Γ.

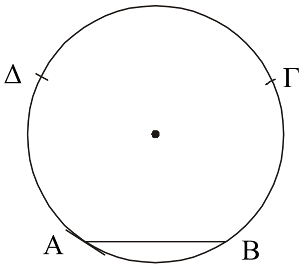
γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΕ (συναρτήσει του R).

1. ****** Σε κύκλο ακτίνας R παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = 60^\circ$, $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 90^\circ$, $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

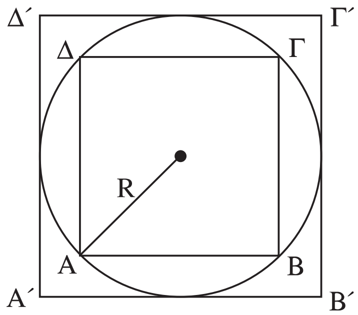
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



2. ****** Σε κύκλο ακτίνας R το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο και το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ περιγεγραμμένο τετράγωνο.

α) Να εκφραστούν οι πλευρές λ_4 και λ'_4 των δύο τετραγώνων συναρτήσει της ακτίνας R.

β) Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών τους $\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}'}$.

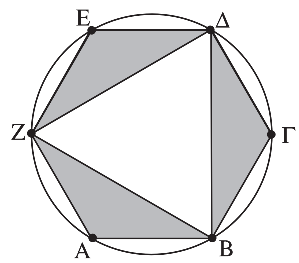


13. ****** Δύο ίσα κανονικά εξάγωνα έχουν μία πλευρά κοινή μήκους λ (τα εξάγωνα δεν ταυτίζονται). Να υπολογίσετε την απόσταση των κέντρων τους συναρτήσει του λ.

4. ****** Σε κύκλο ακτίνας R = 3 cm εγγράφονται ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

β) Το εμβαδόν των τριών γραμμοσκιασμένων μερών.



15. ****** Σε κύκλο ακτίνας R εγγράφουμε κανονικό πολύγωνο, με κεντρική γωνία ίση με τα $\frac{4}{3}$ μιας ορθής.

α) Ποιο είναι το πλήθος των πλευρών του κανονικού αυτού πολυγώνου;

β) Να βρείτε το εμβαδόν του πολυγώνου αυτού (συναρτήσει του R).

16. ****** Σε κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του εξαγώνου (συναρτήσει του R).

β) Το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται έξω από το εξάγωνο.

17. ****** Κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α. Να υπολογίσετε:

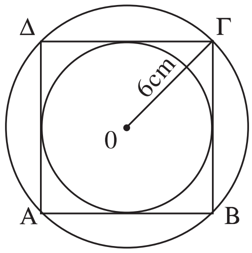
α) Το εμβαδόν του κύκλου (συναρτήσει του α).

β) Το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου, που βρίσκεται εκτός του κύκλου.

8. ****** Σ' ένα κύκλο με ακτίνα R = 6 cm εγγράφουμε τετράγωνο και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδό του τετραγώνου.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.



19. ****** Κύκλος ακτίνας R διαιρείται σε δύο κυκλικά τμήματα από την πλευρά ΑΒ ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Να υπολογιστούν:

α) Το μήκος του μικρότερου τόξου ΑΒ.

β) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ.

20. ****** Δύο ίσοι τεμνόμενοι κύκλοι (Ο, R) και (Ο΄, R) έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$ και κοινή χορδή ΑΒ. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ.

β) Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

21. ****** Σε κύκλο ακτίνας R η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί στην πλευρά λ_4 εγγεγραμμένου τετραγώνου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο κυκλικά τμήματα. Να βρεθούν:

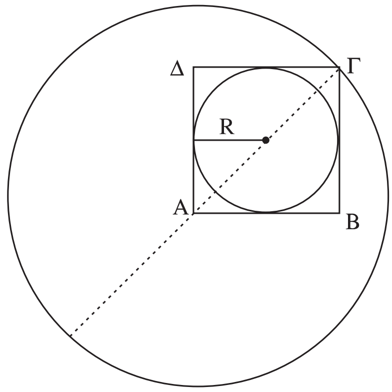
α) Το εμβαδόν του μικρότερου κυκλικού τμήματος του κύκλου.

β) Το εμβαδόν του μεγαλύτερου κυκλικού τμήματος.

2. ****** Κύκλος με ακτίνα R είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με κέντρο την κορυφή Α του τετραγώνου ΑΒΓΔ και ακτίνα την διαγώνιό του ΑΓ γράφουμε κύκλο. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν είναι γνωστή η ακτίνα R.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.



23. ****** Σε τετράγωνο πλευράς 2α εγγράφουμε και περιγράφουμε δύο κύκλους. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του εσωτερικού κύκλου.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.

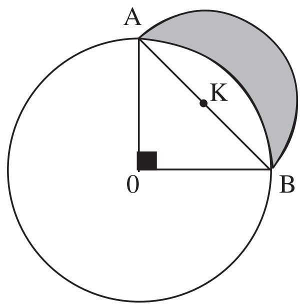
24. ****** Να δειχθεί ότι το εμβαδόν κύκλου, που έχει διάμετρο την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων κύκλων, που έχουν διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

5. ****** Σε κύκλο (0, R) θεωρούμε δύο κάθετες ακτίνες του ΟΑ και ΟΒ. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε εκτός του κύκλου ημικύκλιο.

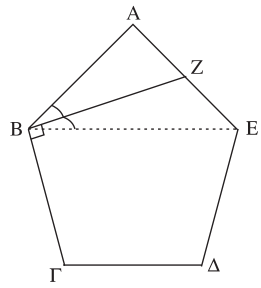
Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

β) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου ΟΑΒ.



6. ** Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΕ ενός κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι κάθετη στη πλευρά ΒΓ.

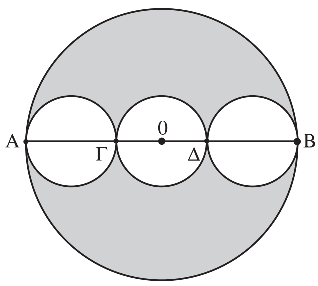


27. ** Να δείξετε ότι κάθε διαγώνιος κανονικού πενταγώνου είναι παράλληλη προς μία πλευρά του.

28. ** Δίνεται κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 3cm.
Να υπολογίσετε:
α) την πλευρά του β) το απόστημά του γ) το εμβαδόν του.

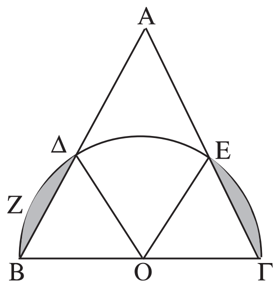
29. ** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς λ_3 = 9 cm εγγεγραμμένο σε κύκλο, ακτίνας R. Να υπολογιστούν:
α) Το μήκος του κύκλου.
β) Το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο.

0. ** Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ = 6α. Διαιρούμε την διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Με διαμέτρους τις ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ γράφουμε τρεις ίσους κύκλους. Να υπολογισθούν:



α) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την ΑΒ.
β) Το εμβαδόν καθενός των τριών ίσων κύκλων.
γ) Το λόγο του αθροίσματος των εμβαδών των τριών ίσων κύκλων προς το εμβαδό του κύκλου (Ο,ΟΑ).
δ) Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που βρίσκεται έξω από τους τρεις κύκλους.

1. ****** Με διάμετρο την πλευρά ΒΓ = α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε.



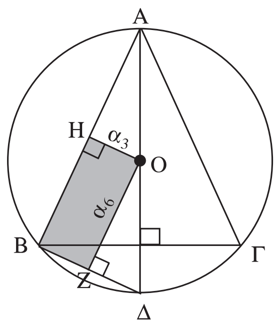
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΕΓ είναι ισόπλευρα.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΟΔΖΒ.

γ) Να υπολογισθούν τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων.

32. ****** Δείξτε ότι ο λόγος των εμβαδών του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου στον κύκλο (Ο, R) είναι $\frac{1}{4}$.

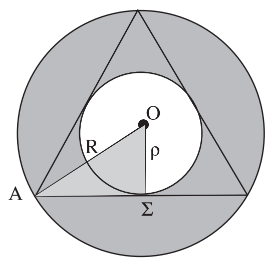
3. ****** Να αποδειχθεί:



α) ότι τα συγκεκριμένα αποστήματα α_3 και α_6 κανονικού τριγώνου και εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο ακτίνας R είναι μεταξύ τους κάθετα (βλ. διπλανό σχήμα) και

β) ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΟΒΔ είναι ισεμβαδικά.

4. ****** Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν Ε κυκλικής στεφάνης που σχηματίζεται μεταξύ των δύο κύκλων ακτίνων R και ρ (με R > ρ), ισούται με $\pi\,\frac{4\,(\text{ΟΑΣ})^2}{\rho^2}$.



35. ** Κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές ΑΒ,ΓΔ τέμνονται στο Ο. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου.

36. ** Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι $12\sqrt{3}\mathrm{cm}^2$. Αν στον ίδιο κύκλο εγγράψουμε τετράγωνο, να βρεθούν:

α) Η πλευρά του λ_4

β) Το απόστημα του α_4

γ) Το εμβαδόν του E_4

37. ** Μέσα σ' ένα χωράφι σχήματος τετραγώνου κατασκευάσαμε το μεγαλύτερο κυκλικό αλώνι που ήταν δυνατό ακτίνας 40 m.

α) Ποιο ήταν το μήκος της πλευράς του τετραγωνικού χωραφιού;

β) Ποια είναι η αξία του χωραφιού αν στην περιοχή αυτή η γη κοστίζει 10.000 δρχ./m^2;

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του χωραφιού που είναι έξω από το κυκλικό αλώνι;

38. ** Η διάμετρος τροχού ποδηλάτου είναι 0.50 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε μία διαδρομή 1 Km;

39. ** Στο εσωτερικό κυκλικού πάρκου ακτίνας 6 m θέλουμε να κάνουμε μια διακοσμητική πλακόστρωση σχήματος τετραγώνου με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.

α) Αν τα διακοσμητικά πλακάκια έχουν εμβαδό 0.09 m^2, πόσα θα χρειαστούν για τη διακόσμηση αυτή;

β) Στο μέρος του πάρκου που δεν θα πλακοστρωθεί θέλουμε να φυτέψουμε γκαζόν του οποίου το κόστος είναι 3.000 δρχ. ανά m^2. Πόσο θα κοστίσει το γκαζόν;

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Γεωμετρία
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Σε κύκλο (Ο, R) είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R

α) την πλευρά του

β) το απόστημά του.

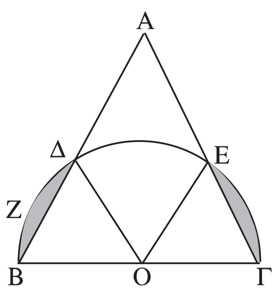
Β. Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο.

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας (λ_4 η πλευρά του, α_4 το απόστημά του και E_4 το εμβαδόν του)

ν	R	λ_4	α_4	E_4
4				225
4			6	
4	3			

Θέμα 2ο

Με διάμετρο την πλευρά ΒΓ = α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε ημικύκλιο προς το ίδιο μέρος του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε.



α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνο ΟΒΔ και ΟΕΓ είναι ισόπλευρα.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΔΖΒ.

γ) Να υπολογισθούν τα εμβαδά των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Γεωμετρία
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R.

α) την πλευρά του

β) το απόστημά του

Β. Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

(λ_3 η πλευρά του, α_3 το απόστημά του και E_3 το εμβαδό του).

ν	R	λ_3	E_3
3	6		
3		5	
3			$100\sqrt{3}$

Θέμα 2ο

Κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδό του κύκλου (συνάρτηση του α)

β) Το εμβαδό του μέρους του τετραγώνου, που βρίσκεται εκτός του κύκλου.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Γεωμετρία
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ένα κανονικό εξάγωνο.
Να υπολογισθούν συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου:
α) η πλευρά του λ_6
β) Το απόστημα α_6 και
γ) Το εμβαδόν του εξαγώνου

Β. α) Αν το απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι $5\sqrt{3}$ cm τότε η ακτίνα του κύκλου είναι (μετρημένη σε cm)
i) 5 **ii)** 10 **iii)** 15 **iv)** 20 **v)** 25

β) Αν η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 6 cm είναι 60^0 τότε η πλευρά του είναι (μετρημένη σε cm)
i) 3 **ii)** 6 **iii)** 9 **iv)** 20 **v)** 15

γ) Ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμένο σε κύκλο ακτίνας 4cm. Το εμβαδό του σε cm^2 είναι
i) $4\sqrt{3}$ **ii)** $8\sqrt{3}$ **iii)** $10\sqrt{3}$ **iv)** $16\sqrt{3}$ **v)** $24\sqrt{3}$

δ) Το κανονικό πολύγωνο του οποίου η πλευρά του λ_ν ισούται με την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου είναι
i) τρίγωνο **ii)** τετράγωνο **iii)** εξάγωνο **iv)** δεκάγωνο

ε) Κάθε κανονικό πολύγωνο που μπορεί να χωριστεί σε διαδοχικά ισόπλευρα και ίσα τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του πολυγώνου είναι
i) τετράγωνο **ii)** πεντάγωνο **iii)** εξάγωνο
iv) δεκάγωνο **v)** τίποτα από τα παραπάνω

Θέμα 2ο

Ισοσκελούς τραπεζίου η περίμετρός είναι 60m. Το εμβαδόν του είναι $160m^2$ και το ύψος του είναι 8m. Να βρείτε:

α) Τις μη παράλληλες πλευρές του.

β) Τη μεγάλη βάση του τραπεζίου.

γ) Τη μικρή βάση του τραπεζίου.

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $ΓΕ = \frac{α}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $γ^2 + β^2 - 2μ_α^2 = \frac{α^2}{2}$ **β)** $ΑΕ^2 = 3β^2 + γ^2 - 3μ_α^2$

Θέμα 4ο

Για να ρυμοτομηθεί τετραγωνικό αγροτεμάχιο πλευράς 600 m, κατασκευάζεται στο κέντρο του τετραγωνική πλατεία πλευρά 300m. Το υπόλοιπο αγροτεμάχιο χωρίζεται σε 8 ίσα οικόπεδα με πρόσοψη στην πλατεία.

α) Σχεδιάστε τις διαγωνίους του τετραγωνικού αγροτεμαχίου και υπολογίστε το μήκος τους.

β) Τοποθετήστε στο σχήμα την τετραγωνική πλατεία και υπολογίστε το εμβαδόν της.

γ) Ολοκληρώστε το σχήμα σχεδιάζοντας τα 8 ζητούμενα ίσα οικόπεδα. Τι σχήμα έχουν αυτά;

δ) Υπολογίστε για καθένα από τα 8 οικόπεδα:

i) το εμβαδόν του **ii)** την περίμετρό του

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή στη Γεωμετρία

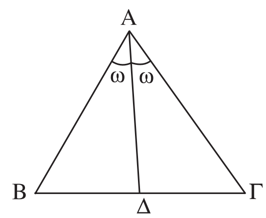
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να διατυπώσετε, κάνοντας το αντίστοιχο σχήμα, τα θεωρήματα

α) εσωτερικής διχοτόμου **β)** εξωτερικής διχοτόμου

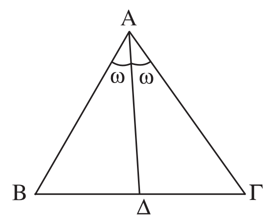
Β. α) Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Σωστή είναι η σχέση



i) ΔΒ·ΑΓ = ΔΓ·ΑΒ **ii)** ΔΒ.ΔΓ = ΑΒ·ΑΓ

iii) ΔΒ·ΑΒ = ΔΓ.ΑΓ **iv)** $\frac{\Delta B}{A\Gamma} = \frac{AB}{\Delta\Gamma}$ **v)** $\frac{\Delta B}{AB} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$

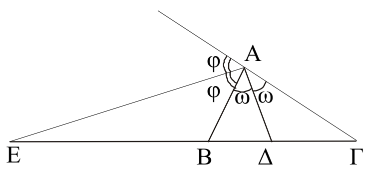
β) Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την ΑΔ διχοτόμο. Το ΒΔ ισούται με



i) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ **ii)** $\frac{\alpha+\gamma}{2\alpha\gamma}$

iii) $\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ **iv)** $\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ **v)** $\frac{\beta\gamma}{\beta-\gamma}$

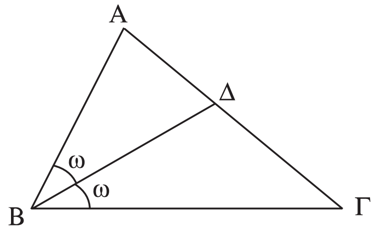
γ) Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α. Σωστή είναι η σχέση



i) $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{EB}$ **ii)** $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$ **iii)** $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$

iv) $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$ **v)** $\frac{EB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$

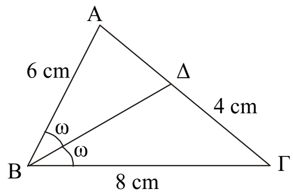
δ) Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ. Σωστή είναι η σχέση



i) $\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{AB}}$ **ii)** $\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{AB}}$

iii) $\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{AB}}$ **iv)** $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{A}\Gamma}$ **v)** $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B}\Delta=\Delta\Gamma\cdot\mathrm{B}\Gamma$

ε) Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ. Το τμήμα ΑΔ είναι



i) 5 cm **ii)** 4 cm **iii)** 3 cm
iv) 2 cm **v)** 1 cm

Θέμα 2ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του. Φέρνουμε ΟΛ⊥ΑΓ με ΟΛ=ΑΓ και ΟΜ⊥ΒΓ με ΟΜ=ΒΓ. Δείξτε ότι:

α) $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Lambda+\hat{\Gamma}=180^{o}$ **β)** (ΟΜΛ) = (ΑΒΓ)

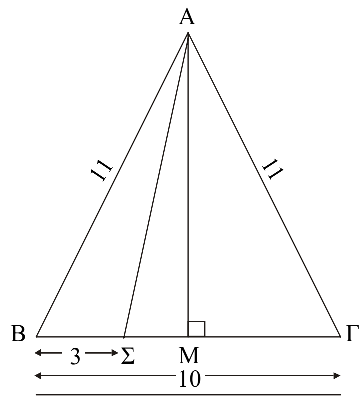
Θέμα 3ο

Σε κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ και περιγεγραμμένο τετράγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

α) Να εκφραστούν οι πλευρές λ_4, λ_4' των δύο τετραγώνων συναρτήσει του R.

β) Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών τους.

Θέμα 4ο



Σε τοπογραφικό διάγραμμα έχουν απεικονιστεί οι θέσεις των κοινοτήτων Α, Β, Μ, Γ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στο σημείο Σ χτίζεται ένα σχολείο για τις ανάγκες και των τεσσάρων κοινοτήτων. Οι κάτοικοι της κοινότητας Α διαμαρτύρονται διότι, όπως ισχυρίζονται, το σχολείο είναι πιο μακριά από το χωριό τους σε σχέση με τις άλλες κοινότητες. Για να ελέγξετε αν διαμαρτύρονται δικαίως οι κάτοικοι της κοινότητας Α, να υπολογίσετε:

α) Την απόσταση της κοινότητας Α από το σχολείο Σ.

β) Τις αποστάσεις των κοινοτήτων Γ και Μ από τα σχολείο Σ.

γ) Αν το σχολείο Σ μεταφερθεί στην κοινότητα Μ, ποιες θα είναι οι αποστάσεις των κοινοτήτων Α,Β και Γ από τη νέα θέση του σχολείο Σ;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κανονικα Πολυγωνα

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1. Σ	**10. Λ**	**19. Σ**
2. Σ	**11. Λ**	**20. Λ**
3. Λ	**12. Σ**	**21. Λ**
4. Λ	**13. Λ**	**22. Σ**
5. Λ	**14. Σ**	**23. Λ**
6. Λ	**15. Λ**	**24. Σ**
7. Σ	**16. Λ**	**25. Σ**
8. Λ	**17. Σ**	**26. Λ**
9. Σ	**18. Σ**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	**10. Γ**	**18. Ε**	**26. Δ**
2. Γ	**11. Γ**	**19. Δ**	**27. Γ**
3. Δ	**12. Γ**	**20. Δ**	**28. Γ**
4. Γ	**13. Δ**	**21. Β**	**29. Β**
5. Β	**14. Β**	**22. Ε**	**30. Α**
6. Α	**15. Δ**	**23. Γ**	**31. Δ**
7. Ε	**16. Β**	**24. Β**	**32. Δ**
8. Β	**17. Γ**	**25. Β**	**33. Γ**
9. Β			

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. $\lambda_\nu = R\sqrt{3}$ $\quad \nu = 3$

2. $\lambda_\nu = R$ $\quad \nu = 6$

3. $\lambda_\nu = R\sqrt{2}$ $\quad \nu = 4$

4. $\alpha_\nu = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ $\quad \nu = 6$

5.

Κανονικό πολύγωνο	**Κεντρική γωνία (ω_ν) σε μοίρες**	**Γωνία πολυγώνου (φ_ν) σε μοίρες**
τρίγωνο	120	60
τετράγωνο	90	90
οκτάγωνο	45	135
δεκάγωνο	36	144
εικοσάγωνο	18	162

6.

Κεντρική γωνία (ω_ν) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Πλήθος πλευρών (ν) κανονικού πολυγώνου**
6	60
10	36
15	24
72	5

7.

ν: πλευρές κανονικού πολυγώνου	**λ_ν: πλευρά κανονικού πολυγώνου**	**α_ν: απόστημα κανονικού πολυγώνου**	**E_ν: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου**
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$
4	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
6	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

8.

Γωνία (φ_ν) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Είδος κανονικού πολυγώνου**
60	ισόπλευρο τρίγωνο
108	κανονικό πεντάγωνο
135	κανονικό οκτάγωνο
150	κανονικό δωδεκάγωνο

9.

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**α_ν: απόστημα κανονικού πολυγώνου**	**λ_ν: πλευρά κανονικού πολυγώνου**	**E_ν: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου**
3	5cm	$10\sqrt{3}$cm	$75\sqrt{3}$cm^2
4	6cm	12cm	144cm^2
6	$5\sqrt{3}$cm	10cm	$150\sqrt{3}$cm^2

10.

Ακτίνα R κύκλου	**Μήκος L κύκλου**	**Εμβαδόν Ε κύκλου**
15	30π	225π
10α	20πα	$100\pi\alpha^2$
$2\alpha\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}\pi\alpha$	$12\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{15}$	$2\sqrt{15}\pi\alpha$	$15\pi\alpha^2$
$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}\pi$	7π
$\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\alpha$	$\frac{1}{3}\pi\alpha^2$

11.

Ακτίνα R κύκλου	**Γωνία μ μοιρών κυκλικού τομέα**	**Μήκος τόξου S**	**Εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα**
8	30	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{16\pi}{3}$
9	36	$\frac{9\pi}{5}$	8,1π
5α	60	$\frac{5}{3}\pi\alpha$	$\frac{25}{6}\pi\alpha^2$
$\frac{\alpha\sqrt{5}}{5}$	150	$\frac{\sqrt{5}}{6}\pi\alpha$	$\frac{\pi\alpha^2}{12}$
$2\alpha\sqrt{5}$	300	$\frac{10}{3}\sqrt{5}\pi\alpha$	$\frac{50}{3}\pi\alpha^2$

12.

Τόξο μ μοιρών	Μήκος τόξου
10	$\frac{\pi R}{18}$
45	$\frac{\pi R}{4}$
135	$\frac{3\pi R}{4}$
180	$\pi \cdot R$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

(A)	(B)
τρίγωνο	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
τετράγωνο	$2R^2$
εξάγωνο	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

2.

(A)	(B)
R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$

3.

(A)	(B)
60^o	R
90^o	$R\sqrt{2}$
120^o	$R\sqrt{3}$

4.

(A)	(B)
2α	$4\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{3}$	$3\pi\alpha^2$
$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi\alpha^2}{2}$

5.

(A)	(B)
$\mu = 60^o$ R=1	$S = \frac{\pi}{3}$
$\mu = 30^o$ R = $\sqrt{2}$	$S = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
$\mu = 90^o$ R = 2	$S = \pi$
$\mu = 120^o$ R = $\sqrt{3}$	$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\alpha = 6\sqrt{3}\text{cm}$ β) $E = 27\sqrt{3}\text{cm}^2$.

2. Όχι, γιατί το ν πρέπει να ανήκει στο N-{1,2}.

3. α) R $=20\sqrt{2}$ cm

β) Η πλευρά του τετραγώνου είναι α = 40cm.

Άρα $\lambda = \frac{E_{\text{τετραγώνου}}}{E_{\text{κύκλου}}} = \frac{1600\,\text{cm}^2}{\pi \cdot 800\,\text{cm}^2} = \frac{2}{\pi}$

4. α) $\text{ΑΓ}-\text{ΑΒ}=2R-R\sqrt{2}=12 \Rightarrow R=6(2+\sqrt{2})\text{cm}$

β) $E_{\text{κύκλου}} = 72\pi(3+2\sqrt{2})\text{cm}^2$

5. α) $R=96(\sqrt{3}-\sqrt{2})\text{cm}$

β) $\alpha_4 = 48(\sqrt{6}-2)\text{cm}$ $\alpha_3=48(\sqrt{3}-\sqrt{2})\text{cm}$

6. Με σύγκριση τριγώνων προκύπτει ότι το νέο εξάγωνο έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

7. Εάν $\frac{\alpha_8}{\alpha'_8} = \frac{3}{4}$ τότε α) $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{E}{E'} = \frac{9}{16}$

8. α) Με εφαρμογή Πυθαγορείου θεωρήματος προκύπτει λ_ν=8cm

β) $R = \lambda_\nu$ άρα $\omega_\nu = 60^o$

γ) $\nu = 6$

9. α) $ΑΓ = 6\sqrt{3}$ cm

β) $\lambda = \frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{(ΑΓΕ)} = 2$

10. α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές, αφού το ΓΒ είναι και διάμεσος και ύψος

β) Η γωνία ΑΓΕ είναι ορθή

γ) $(ΑΓΕ) = 2R^2$

11. α) $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = 90^o$ και ΑΒ//ΓΔ ($\hat{Β} + \hat{Γ} = 105^o + 75^o = 180^o$)

β) $ΑΒ = \lambda_6 = R$, $ΒΓ = \lambda_4 = R\sqrt{2}$, $ΓΔ = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, $ΑΔ = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

γ) $E = \frac{1}{4}(R + R\sqrt{3})^2$

12. α) $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\lambda'_4 = 2R$ β) $\lambda = \frac{E}{E'} = \frac{1}{2}$

13. $ΚΛ = 2\alpha_6 = \lambda\sqrt{3}$

14. α) $\lambda_6 = 3$ $\quad E_{(ΑΒΓΔΕΖ)} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}cm^2$

β) $E = E_{(ΑΒΓΔΕΖ)} - E_{(ΖΒΔ)} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}cm^2$

15. α) $\nu = 3$ $\quad$ β) $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ $\quad E_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

16. α) $E_6 = \dfrac{6 \cdot R^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad$ β) $E = \dfrac{R^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3})$

17. α) $E_{κύκλου} = \dfrac{\pi\alpha^2}{4}$ $\quad$ β) $E = \dfrac{\alpha^2}{4}(4-\pi)$

18. α) $\lambda_4 = 6\sqrt{2}cm$ $\quad E_{(ΑΒΓΔ)} = 72cm^2$ $\quad$ β) $\lambda = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2} = 2cm$

19. α) $S_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 120^o}{180^o} = \dfrac{2}{3}\pi R$

β) $E_{κ.τομ.} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^o}{360^o} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

20. α) $A\hat{O}B = 90^o$ $\quad E_{κ.τομ.AOB} = \dfrac{\pi \cdot R^2}{4}$

β) $E = \dfrac{R^2(\pi - 2)}{2}$

21. α) $AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}$ $\quad E = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

β) $E = \dfrac{R^2}{4}(3\pi + 2)$

22. α) $AB = 2R$, $E_{(ΑΒΓΔ)} = 4R^2$

β) $λ = \dfrac{π \cdot R^2}{π \cdot (ΑΓ)^2} = \dfrac{1}{8}$

23. α) $E = π\,α^2$ β) $λ = \dfrac{π \cdot α^2}{π \cdot (α\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$

24. Εάν α, β, γ οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει $α^2 = β^2 + γ^2$ και τότε

$\dfrac{π α^2}{4} = \dfrac{π β^2}{4} + \dfrac{π γ^2}{4}$.

25. α) $(ΑΟΒ) = \dfrac{R^2}{2}$

β) $E = E_{ημικυκλ.}(Κ, ΑΚ) - [E_{κυκλ.τομεαΑΟΒ} - (\overset{\Delta}{ΑΟΒ})] = \dfrac{R^2}{2}$

26. $\hat{A} = 108^o$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει $Α\hat{Β}Ε = 36^o$, $Γ\hat{Β}Ε = 72^o$.

Άρα $Γ\hat{Β}Ζ = 72^o + 18^o = 90^o$.

27. $Ε\hat{Β}Γ = 72^o$ και $\hat{Γ} = 108^o$. Άρα ΕΒ//ΓΔ.

28. α) η πλευρά $λ'_6$ του περιγεγραμμένου εξαγώνου είναι $2\sqrt{3}$cm

β) $α'_6 = 3$cm

γ) $E'_6 = 18\sqrt{3}\text{cm}^2$

29. α) Το μήκος του κύκλου $L = 6\pi\sqrt{3}\text{cm}$

β) Το εμβαδόν των χωρίων που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο είναι

$$\left(27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2 = 9\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2$$

30. α) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = 9\pi\alpha^2$

β) $\pi\alpha^2$ γ) $\frac{1}{3}$ δ) $6\pi\alpha^2$

31. α) Το ΟΒΔ τρίγωνο είναι ισοσκελές (ΟΔ = ΟΒ) με $\hat{B} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο. Όμοια και το τρίγωνο ΟΕΓ.

β) $E = \dfrac{\pi\alpha^2}{24}$ γ) $E = \alpha^2\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)\text{cm}^2$

32. $\dfrac{E_{\varepsilon\gamma/\nu o\upsilon}}{E_{\pi\varepsilon\rho/\nu o\upsilon}} = \left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha'_3}\right)^2 = \left(\dfrac{R/2}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

33. Η γωνία ΑΒΔ είναι ορθή (γιατί βαίνει σε ημικύκλιο).

$$(AOB) = \frac{\alpha_3 \cdot AB}{2} = \frac{R/2 \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$(OB\Delta) = \frac{\alpha_6 \cdot B\Delta}{2} = \frac{R\sqrt{3}/2 \cdot R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

34. $E_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi \cdot A\Sigma^2 = \pi\left[\dfrac{2(OA\Sigma)}{\rho}\right]^2 = \pi\dfrac{4(OA\Sigma)^2}{\rho^2}$

35. $(OA\Delta) = R^2\sqrt{3}$

36. $E_3 = 3\dfrac{\lambda_3 \alpha_3}{2} = \dfrac{3R\sqrt{3}\cdot R/2}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 4cm$

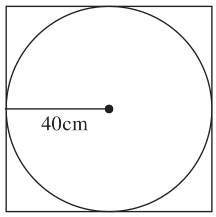
$\lambda_4 = R\sqrt{2} = 4\sqrt{2}cm$ $\qquad\qquad$ $\alpha_4 = 2\sqrt{2}\,cm$

$E_4 = 32\,cm^2$

7. α) 80m

β) 64.000.000 δρχ.

γ) $1.600(4\text{-}\pi)m^2$



38. L = 0,5π

Αν ν ο αριθμός στροφών, $\nu \cdot L = 1000 \quad \Rightarrow \quad \nu = \dfrac{2000}{\pi}$

39. α) 800 πλακάκια

β) 123.120 δρχ.

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Ο αριθμός $\frac{2\nu}{3}$, $\nu \in N$, είναι ανάγωγο κλάσμα για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

2. * Οι αριθμοί 2ν και $2\nu + 2$ είναι διαδοχικοί άρτιοι για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

3. * Αν ένας ισχυρισμός Ρ (ν) δεχθούμε ότι είναι αληθής για το φυσικό αριθμό ν και αποδείξουμε ότι ισχύει για τον $\nu + 1$, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ισχύει για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

4. * Αν η πρόταση «Ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 17$, $\nu \in N^*$, είναι πρώτος» ισχύει για $\nu = 1, 2, 3, ..., 16$, τότε θα ισχύει και για κάθε ν φυσικό αριθμό. **Σ** **Λ**

5. * Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο φυσικό αριθμό που είναι μοναδικός. **Σ** **Λ**

6. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = 3 \cdot \kappa + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < 3$. **Σ** **Λ**

7. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = (-3) \cdot \kappa + \upsilon$ με $\upsilon < -3$. **Σ** **Λ**

8. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 2 δια του 15 είναι 2. **Σ** **Λ**

9. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -19 δια του 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

10. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -17 δια του 3 είναι 1. **Σ** **Λ**

11. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -25 δια του - 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

12. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 25 δια του - 4 είναι 1. **Σ** **Λ**

13. * Έστω α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του α δια β εκφράζεται από τη σχέση $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, όπου υ οποιοσδήποτε ακέραιος. **Σ** **Λ**

14. * Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του α δια του β, όπου $\alpha, \beta \in Z^*$ είναι $0, 1, 2, 3, ..., |\beta| - 1$. **Σ** **Λ**

15. * Κάθε φυσικός αριθμός ν μπορεί να πάρει την μορφή $\nu = 4\kappa + 1$ ή $\nu = 4\kappa + 2$ ή $\nu = 4\kappa + 3$, $\kappa \in N$. **Σ** **Λ**

16. * Κάθε ακέραιος αριθμός κ μπορεί να πάρει την μορφή $\kappa = 3\rho$ ή $\kappa = 3\rho + 1$ ή $\kappa = 3\rho + 2$, $\rho \in Z$. **Σ** **Λ**

17. ** Οι φυσικοί αριθμοί μέχρι το 1.000.000 που διαιρούνται με το 3, είναι περισσότεροι από αυτούς που διαιρούνται με το 5. **Σ** **Λ**

18. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/β, τότε δ/υ. **Σ** **Λ**

19. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/υ, τότε ισχύει πάντα δ/β. **Σ** **Λ**

20. * Αν α/β τότε (-α)/β. **Σ** **Λ**

21. * Αν α/15 και 15/α, τότε $\alpha = 15$ ή $\alpha = -15$. **Σ** **Λ**

22. * Αν α/β + γ, τότε α/β και α/γ. **Σ** **Λ**

23. * Αν $-3/x$, $x > 0$, τότε ισχύει $3 \le x$.	**Σ**	**Λ**
24. * Αν α ακέραιος με 3/α και 5/α, τότε ισχύει 15/α.	**Σ**	**Λ**
25. * Κάθε πρώτος αριθμός διάφορος του 2 είναι περιττός.	**Σ**	**Λ**
26. * Κάθε ακέραιος αριθμός $\alpha \in Z^*$ είναι διαιρέτης του αριθμού 0.	**Σ**	**Λ**
27. * Υπάρχει ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδενός, ο οποίος διαιρείται με τον 0.	**Σ**	**Λ**
28. * Οι μόνοι ακέραιοι διαιρέτες του 1 είναι οι 1 και -1.	**Σ**	**Λ**
29. * Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης κάθε ακεραίου.	**Σ**	**Λ**
30. * Αν α/β και β/γ, τότε α/γ.	**Σ**	**Λ**
31. * Αν α/β και β/α, τότε ισχύει οπωσδήποτε α = β.	**Σ**	**Λ**
32. * Αν α - β = πολκ τότε θα είναι και $\alpha^\nu - \beta^\nu = \pi\text{ολκ}$ για κάθε $\nu \in N^*$, $\kappa \in Z$.	**Σ**	**Λ**
33. * Αν α, β ακέραιοι και ν άρτιος φυσικός αριθμός τότε $(\alpha + \beta) / (\alpha^\nu + \beta^\nu)$.	**Σ**	**Λ**
34. * Αν α και β είναι δύο θετικοί πρώτοι αριθμοί και α/β, τότε θα είναι α = β.	**Σ**	**Λ**
35. * Το γινόμενο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός.	**Σ**	**Λ**
36. * Ο α είναι θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ρ ακέραιος πρώτος ώστε ρ/α^2 και $\rho \le \alpha$.	**Σ**	**Λ**
37. * Ο 11 διαιρεί τον ακέραιο α·β (α, β ακέραιοι). Τότε ισχύει πάντα 11/α και 11/β.	**Σ**	**Λ**
38. ** Δύο αντίθετοι ακέραιοι έχουν τους ίδιους διαιρέτες.	**Σ**	**Λ**

39. ***** Η διαφορά δύο πολλαπλασίων του α είναι πολλαπλάσιο του α. **Σ** **Λ**

40. ***** Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός. **Σ** **Λ**

41. ***** Άθροισμα περιττού πλήθους άρτιων είναι περιττός. **Σ** **Λ**

42. ****** Αν το γινόμενο ακεραίων είναι περιττός, τότε όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί. **Σ** **Λ**

43. ***** Ο ακέραιος α - β, (α ≠ β) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}$ για κάθε ν ∈ N*. **Σ** **Λ**

44. ***** Ο μοναδικός πρώτος άρτιος είναι ο αριθμός 2. **Σ** **Λ**

45. ***** Ο Μ.Κ.Δ. των -12 και -8 είναι ο -4. **Σ** **Λ**

46. ***** Ισχύει (140, 280) = 70. **Σ** **Λ**

47. ***** Ισχύει (α, β) = (α, -β) **Σ** **Λ**

48. ***** Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $2 \cdot \alpha - \beta = 1$, τότε θα ισχύει (α, β) = 2. **Σ** **Λ**

49. ****** Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει 3/α, 6/β και (α, β) = γ, τότε θα ισχύει 3/γ. **Σ** **Λ**

50. ****** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/17·β, τότε ισχύει πάντα α/β. **Σ** **Λ**

51. ****** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/18·β, τότε ισχύει πάντα α/β. **Σ** **Λ**

52. ***** Ισχύει η ισότητα [18, 72] · (18, 72) = 18·72. **Σ** **Λ**

53. ***** Για κάθε ακέραιο α ισχύει [17, α] = 17α. **Σ** **Λ**

54. ***** Ο αριθμός α (α + 1) είναι σύνθετος (α ακέραιος). **Σ** **Λ**

55. ***** Αν (α, β) = γ, τότε (5α, 5β) = 5γ. **Σ** **Λ**

56. ****** Ισχύει $(1, \alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in N^*$. **Σ** **Λ**

57. ****** Αν $(\alpha, \beta) = 1$, τότε $\alpha = \beta = 1$. **Σ** **Λ**

58. ***** Αν $\alpha \in Z^*$, τότε $(\alpha, 0) = |\alpha|$. **Σ** **Λ**

59. ***** Αν β/α, με $\alpha \neq 0$, τότε $(\alpha, \beta) = |\alpha|$. **Σ** **Λ**

60. ***** Είναι $(\alpha, \beta) = 1$, τότε θα υπάρχουν ακέραιοι κ, λ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$. **Σ** **Λ**

61. ***** Για κάθε κ ακέραιο ισχύει $[\kappa\alpha, \kappa\beta] = \kappa\,[\alpha, \beta]$. **Σ** **Λ**

62. ***** Αν α, β, κ, λ ακέραιοι και ισχύει $\alpha\kappa + \beta\lambda = 1$ τότε $(\alpha, \beta) = (\alpha, \lambda) = (\beta, \kappa) = (\kappa, \lambda) = 1$. **Σ** **Λ**

63. ***** Δύο θετικοί αριθμοί που είναι διάφοροι μεταξύ τους και ο καθένας είναι πρώτος είναι και πρώτοι μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

64. ***** Δύο αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οπωσδήποτε πρώτοι αριθμοί. **Σ** **Λ**

65. ***** Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών α, β ($\alpha > 2$ και $\beta > 2$) είναι πάντα πρώτος αριθμός. **Σ** **Λ**

66. ****** Ένας ακέραιος αριθμός α που είναι πρώτος έχει διαιρέτες μόνο τον 1 και τον α. **Σ** **Λ**

67. ****** Αν ο ακέραιος αριθμός α είναι πρώτος, τότε και ο ακέραιος -α είναι πρώτος. **Σ** **Λ**

68. ****** Κάθε πρώτος ακέραιος ρ είναι πρώτος με τον εαυτό του. **Σ** **Λ**

69. ***** Υπάρχει δεκάδα διαδοχικών φυσικών αριθμών ώστε οι 4 από αυτούς να είναι πρώτοι. **Σ** **Λ**

70. ****** Ισχύει $(\alpha, \beta, \gamma) = ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma))$. **Σ** **Λ**

71. * Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $3x + y = 1$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

72. * Η ευθεία $y = x + 3$ διέρχεται από άπειρα το πλήθος σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

73. ** Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $αx + α^2y = β$ με $β \neq 0$ και $α > 1$ με $(α, β) = 1$ έχει (μία τουλάχιστον) λύση. **Σ** **Λ**

74. ** Αν μια ευθεία με εξίσωση $αx + βy = γ$, με α, β, γ, ακέραιους, διέρχεται από σημείο με ακέραιες συντεταγμένες, τότε θα διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

75. * Υπάρχει ευθεία που να διέρχεται μόνο από δύο σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

76. ** Η εξίσωση $αx + βy + κ = 0$ με α, β άρτιους και κ περιττό, έχει τουλάχιστον μία λύση στο Z. **Σ** **Λ**

77. * Η διοφαντική εξίσωση $3x + 6y = 5$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων P (ν), όταν

A. $ν \in R$ **B.** $ν \in Q$ **Γ.** $ν \in R^*$

Δ. $ν \in N$ **E.** κανένα από τα προηγούμενα

2. * Για τους ακεραίους α και $β \neq 0$ η σχέση της Ευκλείδειας διαίρεσης του α δια του β είναι η

A. $α = κβ + υ, \quad υ \geq 0$ **B.** $α = κβ + υ, \quad 0 \leq υ < β$

Γ. $α = κβ + υ, \quad 0 \leq υ < |β|$ **Δ.** $β = κα + υ, \quad υ < β$

E. $α = κβ + υ, \quad υ \leq β \leq |υ|$

3. ****** Αν η διαίρεση του α με τον $\beta \neq 0$ είναι τέλεια, τότε

Α. ο β είναι πολλαπλάσιο του α

Β. ο β είναι παράγοντας του α

Γ. ο α είναι διαιρέτης του β

Δ. ο β διαιρούμενος με τον α αφήνει υπόλοιπο 0

Ε. ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $\upsilon \neq 0$.

4. ****** Η Ευκλείδεια διαίρεση του -75 με το 24 περιγράφεται από την ισότητα $-75 = \beta \cdot 24 + \upsilon$, τότε το ζεύγος (β, υ) ισούται με

Α. (-3, -3) **Β.** (-4, 21) **Γ.** (-5, 45)

Δ. (3, -147) **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

5. ***** Από τις παρακάτω σχέσεις, για κάθε $\alpha \neq 0$, δεν ισχύει η

Α. 1/α **Β.** α/α **Γ.** α/0 **Δ.** α^2/α **Ε.** α/κα, $\kappa \in Z^*$

6. ***** Αν α/β με $\beta \neq 0$, τότε από τις προτάσεις

α/(-β) (1) (-α)/β (2) και (-α)/(-β) (3) ισχύει

Α. μόνο η (1) **Β.** μόνο η (2) **Γ.** μόνο η (3)

Δ. και οι τρεις **Ε.** καμία απ' τις προηγούμενες

7. ****** Αν α/β και β/α, τότε ισχύει

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha \neq \pm\beta$ **Γ.** $\alpha > \beta$

Δ. $\alpha = \beta$ είτε $\alpha = -\beta$ **Ε.** τίποτε από τα προηγούμενα

8. ****** Αν α/β είναι πάντα

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha > \beta$ **Γ.** $\alpha = \beta$ **Δ.** $\alpha \leq \beta$ **Ε.** $|\alpha| \leq |\beta|$

9. ****** Αν α, β μη μηδενικοί ακέραιοι α/β και β/α, τότε ισχύει πάντα

Α. $\alpha = \beta$ **Β.** $|\alpha| \neq |\beta|$ **Γ.** $\alpha = -\beta$

Δ. $|\alpha| = |\beta|$ **Ε.** $\alpha = \beta = 1$

10. ***** Αν $α \neq β$ και $α/β$, τότε ισχύει πάντα

Α. $α = κβ$ **Β.** $β > α$ **Γ.** $|β| \leq |α|$

Δ. $|β| > |α|$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

11. ****** Αν ο ρ δεν διαιρεί τον α και ο ρ δεν διαιρεί τον β, όπου α, β φυσικοί και ρ πρώτος, τότε

Α. ο ρ διαιρεί τον αβ **Β.** ο ρ δεν διαιρεί τον αβ

Γ. υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο ρ διαιρεί τον αβ

Δ. $ρ = α$ ή $ρ = β$ **Ε.** $ρ = αβ$

12. ****** Διαθέτουμε 1.000 δραχμές για την αγορά 6 κιλών ενός προϊόντος. Τα ρέστα που θα πάρουμε για οποιαδήποτε τιμή του προϊόντος δεν μπορεί να είναι λιγότερα από

Α. 10 δρχ. **Β.** 6 δρχ. **Γ.** 4 δρχ. **Δ.** 18 δρχ. **Ε.** 12 δρχ.

(υποδιαιρέσεις της δραχμής δεν είναι πλέον σε χρήση)

13. ****** Αν δ, κ, λ μη μηδενικοί ακέραιοι και $δ/κ\cdotλ$, τότε ισχύει πάντα

Α. $δ/κ$ **Β.** $δ/λ$ **Γ.** $δ/κ$ ή $δ/λ$ **Δ.** $δ/5.κλ$ **Ε.** $δ/κ$ και $δ/λ$

14. ****** Αν $α/γ$ και $β/γ$, τότε ο $α\cdotβ/γ$ όταν

Α. οι α, β είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί

Β. οι α, β είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί

Γ. ο α διαιρεί τον β

Δ. ο β διαιρεί τον α

Ε. οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί

15. ***** Για τους ακεραίους $α \neq 0$, β, γ ισχύει ότι $α/β$ και $α/γ$. Αν θεωρήσουμε τους τρεις αριθμούς $β + γ$, $β - γ$ και κα ($κ \in Z$), τότε ισχύει

Α. ο α διαιρεί μόνο τον $β + γ$ **Β.** ο α διαιρεί μόνο τον $β - γ$

Γ. ο α διαιρεί μόνο τον κα **Δ.** ο α διαιρεί και τους τρεις

Ε. ο α δεν διαιρεί κανέναν από τους τρεις αριθμούς.

16. ***** Για να είναι τετράγωνο ακεραίου ο αριθμός $3^2 \cdot 5^3 \cdot \kappa \cdot 7^2$ πρέπει ο πρώτος αριθμός κ, να ισούται με

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 11

17. ****** Το γινόμενο $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ διαιρείται με το γινόμενο $2 \cdot 3^\kappa \cdot 5$, $\kappa \neq 0$, τότε ο κ παίρνει την τιμή

Α. μόνο 1 **Β.** μόνο 2 **Γ.** 1 ή 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5

18. ****** Ο ακέραιος α + β, (α $\neq$ -β) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^\nu + \beta^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Α. μόνο αν α = β **Β.** μόνο αν α $\neq$ β

Γ. για κάθε ν άρτιο **Δ.** για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ **Ε.** για κάθε ν περιττό.

19. ****** Αν οι ακέραιοι α και β δεν είναι πολλαπλάσια του 3, τότε πάντα

Α. το άθροισμα τους διαιρείται με το 3

Β. η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Γ. το άθροισμα ή η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Δ. το άθροισμα και η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Ε. ούτε το άθροισμα ούτε η διαφορά τους διαιρείται με το 3

20. ***** Για τους αριθμούς 6^8 και 15^8 ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. είναι αντίστοιχα

Α. 3^8 και 90^8 **Β.** 6^8 και 15^8 **Γ.** 3^8 και 30^8

Δ. 3^8 και 90^8 **Ε.** 6^8 και 30^8.

21. ***** Για τους θετικούς ακέραιους α, β, κ ισχύει α = 11κ και β = 20κ. Τότε ισχύει

Α. (α, β) = 11κ **Β.** (α, β) = 20κ **Γ.** (α, β) = κ

Δ. (α, β) = κ^2 **Ε.** (α, β) = 2κ

22. ***** Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο διαδοχικών ακεραίων είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3

Δ. το γινόμενό τους **Ε.** κάποιος άλλος ακέραιος

23. ***** Αν ο κ είναι άρτιος, τότε ο Μ.Κ.Δ του 2κ και του 4 είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 8 **Ε.** -4

24. ***** Ένας ακέραιος αριθμός $\alpha \neq 0, \pm 1$ λέγεται πρώτος τότε και μόνο τότε αν οι διαιρέτες του είναι

Α. μόνο ο 1 **Β.** μόνο ο -1 **Γ.** μόνο ο α

Δ. μόνο ο -α **Ε.** οι -1, 1, -α, α

25. ***** Έστω $0 < \alpha < \beta < \gamma$ και $0 < \kappa < \lambda < \mu$ όπου α, β, γ, κ, λ, μ πρώτοι αριθμοί. Αν ισχύει $x = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ και $x = \kappa \cdot \lambda \cdot \mu$ τότε

Α. $\alpha \neq \kappa$

Β. $\kappa \cdot \lambda = \beta \cdot \gamma$

Γ. $\alpha = \kappa$ και $\beta = \mu$

Δ. $\alpha = \kappa$ και $\beta = \lambda$ και $\gamma = \mu$

Ε. $\alpha \neq \kappa$ και $\beta \neq \lambda$ και $\gamma \neq \mu$

26. ***** Για τους ακεραίους α, β ισχύει $2\alpha + 3\beta = 1$. Τότε

Α. $\alpha \cdot \beta > 0$ **Β.** $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ **Γ.** $(\alpha, \beta) = 1$

Δ. $(\alpha, \beta) = 2$ **Ε.** $(\alpha, \beta) = 3$

27. ****** Το τόξο θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \pi]$ και ισχύει $(4\eta\mu\theta, 8) = 4$. Τότε το τόξο θ θα ισούται με

Α. 0 **Β.** $\frac{\pi}{6}$ **Γ.** $\frac{5\pi}{6}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

28. ***** Αν α, β είναι δύο θετικοί ακέραιοι με $[\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$ τότε

Α. $\alpha = 1$ και β οποιοσδήποτε ακέραιος

Β. $\beta = 1$ και α οποιοσδήποτε ακέραιος **Γ.** $\alpha \neq \beta$

Δ. $\alpha = \beta$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

29. ****** Αν α, β $\in$ N* ώστε (α, β) = [α, β], τότε

Α $\alpha \neq \beta$ **Β.** $\alpha > \beta$ **Γ.** $\alpha = \beta$ **Δ.** (α, β) = 1 **Ε.** $\alpha < \beta$

30. ****** Αν οι αριθμοί ρ και $\rho^2 + 2$ με $\rho < 10$ είναι και οι δύο πρώτοι, τότε ο ρ είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 5 **Ε.** 7

31. ****** Έστω α θετικός ακέραιος και $\alpha = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ η κανονική μορφή του. Το πλήθος των θετικών διαιρετών του είναι

Α. 3 **Β.** 6 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** 8

32. ***** Αν α, β θετικοί ακέραιοι με $\alpha \neq \beta$ και β/α τότε ισχύει πάντα

Α. (α, β) = α **Β.** (α, β) = 1 **Γ.** (α, β) = β

Δ. [α, β] = β **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

33. ****** Αν ρ πρώτος και ρ/αβ (α, β φυσικοί) τότε

Α. ρ = 1 **Β.** ρ/α και ρ/β **Γ.** $\rho > \alpha$

Δ. ρ/α ή ρ/β **Ε.** (α,β) = 1

34. ****** Αν (α, β) = 1 και (x_0, y_0) είναι ακέραιη λύση της εξίσωσης αx + βy = γ (1) με α, β, γ, κ $\in$ Z τότε η εξίσωση (1) έχει και άλλες άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y) που δίνονται από τους τύπους

Α. $x = x_0 + \beta\kappa,\ y = y_0 + \alpha\kappa$ **Β.** $x = x_0 + \alpha\kappa,\ y = y_0 + \beta\kappa$

Γ. $x = x_0 + \beta\kappa,\ y = y_0 - \alpha\kappa$ **Δ.** $x = x_0 - \alpha\kappa,\ y = y_0 + \beta\kappa$

Ε. $x = x_0 - \beta\kappa,\ y = y_0 - \alpha\kappa$

35. ***** Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: 2x + y = 1 έχει λύση το ζεύγος

Α. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **Β.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **Γ.** (-1,2) **Δ.** (1,-3) **Ε.** (-1,3)

36. ** Η διοφαντική εξίσωση: $12x + 18y = κ$ έχει για λύση το ζεύγος $(-2, 1)$. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις που δίνονται όλες από τους τύπους

Α. $x = -2+3t$
$y = 1 - 2t,\ t > 0$

Β. $x = 1+3t$
$y = -2-2t$, t ακέραιος

Γ. $x = -2+3t$
$y = 1-2t$, t ακέραιος

Δ. $x = 2+3t$
$y = 1-2t$, t ακέραιος

Ε. $x = 1-3t$
$y = 2+2t$, t ακέραιος

37. ** Έστω η διοφαντική εξίσωση $(ν + 1)\ x - (ν + 2)\ y = 3$ με $ν \in N^*$. Μία λύση της είναι

Α. $(-3, -1)$ **Β.** $(1, -3)$ **Γ.** $(3, 2)$ **Δ.** $(-3, -3)$ **Ε.** $(-4, 1)$

38. ** Δίνεται η εξίσωση $αx + βy = γ$, $α, β, γ \in Z^*$ και $αβ > 0$ η οποία έχει μία ακέραια λύση. Τότε

Α. η εξίσωση έχει άπειρες θετικές λύσεις

Β. η εξίσωση δεν έχει αρνητικές λύσεις

Γ. η εξίσωση δεν έχει θετικές λύσεις

Δ. το πλήθος των θετικών λύσεων είναι πεπερασμένο

Ε. έχει μόνο ακέραιες λύσεις

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ****** Στη στήλη Α φαίνονται ζεύγη αριθμών (α, β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. (23, 3)	**Α.** -1
	Β. 2
2. (-35, 6)	**Γ.** 1
	Δ. 0
3. (-27, -5)	**Ε.** 3
4. (5, 7)	**ΣΤ.** 5

2. ***** Η στήλη Α περιέχει κατά σειρά τον διαιρετέο (Δ) και τον διαιρέτη (δ) μιας ευκλείδειας διαίρεσης και η στήλη Β το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ). Να γίνει αντιστοίχιση, ώστε τα δεδομένα να ανήκουν στην ίδια διαίρεση.

Στήλη Α			Στήλη Β		
	Δ	**δ**		**π**	**υ**
			Α.	-18	1
1.	34	5	**Β.**	6	4
2.	- 62	23	**Γ.**	3	4
3.	73	- 4	**Δ.**	18	- 4
			Ε.	-3	7

3. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της πρώτης στήλης με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β.

Αριθμός	**Διαιρέτης**
	Α. 2
1. 27λ	**Β.** 3
	Γ. 5
2. λ^3	**Δ.** λ^2
3. $\lambda(\lambda+1)$	**Ε.** λ^2+1

4. ****** Σε κάθε σχέση της πρώτης στήλης να αντιστοιχίσετε αυτήν η οποία συνεπάγεται (για κάθε μη μηδενικό ακέραιο β) στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	**Σχέση η οποία συνεπάγεται**
	Α. $35/\beta$
1. $5/7\cdot\beta$	**Β.** $3/\beta$
2. $14/\beta$	**Γ.** $5/\beta$
	Δ. $7/\beta$
3. $9/27+\beta$	**Ε.** $\beta/9$

5. ****** Εάν β = 3 + πολ5, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη (Β).

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
1. β^2	**Α.** πολ5
2. β^3	**Β.** 1 + πολ5
3. β^4	**Γ.** 2 + πολ5
	Δ. 3 + πολ5
	Ε. 4 + πολ5

6. ***** Να αντιστοιχίσετε τα ζεύγη ή τις τριάδες της στήλης Α με το Μ.Κ.Δ. τους της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 6, -28	**Α.** 1
2. 4, -3, 0	**Β.** 5
3. -6, 12, 72	**Γ.** 2
4. -40, -30	**Δ.** 7
5. 21, -14, 35	**Ε.** 4
	ΣΤ. 6
	Ζ. 10

7. * Από τη σχέση της πρώτης στήλης να προσδιορίσετε το ζεύγος των αριθμών που έχουν Μ.Κ.Δ. το δεύτερο μέλος της ισότητας. Το ζεύγος αυτό εμφανίζεται στη δεύτερη στήλη. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(-1)\cdot 85+2\cdot 51 = 17$	**Α.** 57, 38
	Β. 85, 51
2. $57+(-1)\cdot 38 = 19$	**Γ.** 38, 19
	Δ. 26, 65
3. $(-2)\cdot 26+65 = 13$	**Ε.** 65, 13

8. * Να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς της στήλης Α με το Ε.Κ.Π. τους της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α. 63
1. -2, -3, -5	**Β.** 1262
2. 7, -9, 1	**Γ.** 48
3. 631, -2	**Δ.** 30
4. 24, -12, 6	**Ε.** 322
5. 23, 7, 2	**ΣΤ.** -30
	Ζ. 24

9. ***** Η πρώτη στήλη περιέχει τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών που περιέχονται στη δεύτερη στήλη. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α			Στήλη Β
	Μ.Κ.Δ.	**Ε.Κ.Π.**	
1.	1	12	**Α.** 3, 4
2.	1	21	**Β.** 6, -12
3.	6	12	**Γ.** -6, 3
4.	16	48	**Δ.** 7, 3
			Ε. 48, -16
			ΣΤ. 48, 4

10. ***** Σε κάθε γραμμική διοφαντική εξίσωση της πρώτης στήλης να αντιστοιχίσετε τις λύσεις της στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση	**Λύσεις**
1. $2x + 3y = 5$	**Α.** $x = κ$, $y = -κ$, κ ακέραιος
2. $3x - 6y = 2$	**Β.** $x = 2+κ$, $y = 3-κ$, κ ακέραιος
3. $x + y = 0$	**Γ.** $x = 1+3κ$, $y = 1-2κ$, κ ακέραιος
	Δ. καμία λύση
	Ε. $x = 3 + κ$ $y = 6 - κ$, κ ακέραιος

11. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της Α στήλης με μια (ακέραια) λύση της στη Β στήλη. (Αν έχει ακέραιες λύσεις).

Α στήλη	**Β στήλη**
1. $2x - 3y = 7$	**Α.** $(x, y) = (-2, -3)$
2. $13x + 12y = 23$	**Β.** δεν έχει ακέραιες λύσεις
3. $-2x + 4y = 3$	**Γ.** $(x, y) = (3, 4)$
4. $4x - 5y = 7$	**Δ.** $(x, y) = (2, -1)$
	Ε. $(x, y) = (-1, 3)$
	ΣΤ. $(x, y) = (1,0)$

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:

α) (-34, -26) **β)** (39, -57) **γ)** (35, 55)
δ) (3, -4) **ε)** (-28, 52)

2. ***** Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:

α) [9, -4] **β)** [-2, 1] **γ)** [1, -1]
δ) [14, 21] **ε)** [-5, -15] **στ)** [17, 19]

3. ***** Να βάλετε σε μία σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) 48 : 3 **β)** -49 : 3 **γ)** 49 : -3
δ) 88 : 5 **ε)** -87 : -7

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. ***** Αν α πρώτος αριθμός να συμπληρωθούν τα κενά:

x	**y**	**(x, y)**	**[x, y]**
12	18		
$3α^2$	2α		
12		6	60
		α	α

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Παρατηρούμε ότι: $1=\frac{1(1+1)}{2}$

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}$$

$$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα 1 + 2 + 3 + ... + ν; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. * Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	**Αριθμός διαγωνίων**
τετράπλευρο (ν = 4)	$2=\frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο (ν = 5)	$5=\frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο (ν = 6)	$9=\frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο (ν = 7)	$14=\frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. * Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\nu \in N^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^\nu > \nu^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. ***** Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4ν}$ - 1 για ν = 1, 2, 3, 4 είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4ν} - 1 = πολ15$, $ν \in N^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;

5. ****** Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(α + β)^ν = α^ν + λβ$, $λ \in Z$ και $ν \in N^*$.

6. **** i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει $2 + 4 + 6 + \cdots + 2ν = ν\,(ν + 1)$

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2 + 4 + \cdots + 2ν = ν\,(ν + 1) - 1$ αν αληθεύει για ν , τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $ν \in N^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7. ***** i)** Αποδείξτε ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.

ii) Έστω ότι ισχύει $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} < 2$ για κ το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για κ + 1 πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. ****** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$. Στην $ε_1$ παίρνουμε τα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$ και στην $ε_2$ τα σημεία $Β_1$, $Β_2$, $Β_3$.

i) Ενώνουμε το $Α_1$ με το $Β_1$. Το $Α_2$ με το $Β_1$ και $Β_2$, το $Α_3$ με το $Β_1$, $Β_2$ και $Β_3$. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματιστούν;

ii) Αν στην $ε_1$ θεωρήσουμε ν σημεία $Α_1$, $Α_2$, ... $Α_ν$. Αν και στη $ε_2$ αντιστοίχως ν σημεία $Β_1$, $Β_2$, ..., $Β_ν$ και ενώσουμε το $Α_1$ με 1, το $Α_2$ με 2, το $Α_3$ με 3 και το $Α_ν$ με ν σημεία από την ευθεία $ε_2$, αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται είναι $\frac{ν\,(ν + 1)}{2}$.

9. ******* Να αποδειχθεί ότι: $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + ν \cdot 2^{ν-1} = (ν - 1) \cdot 2^ν$ για κάθε $ν \in N$ με $ν \geq 2$.

10. ******* Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει:

α) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$

β) $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$

11. ****** Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρούνται με 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

12. ****** Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π.

13. ****** Αν π και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του α δια του $\beta > 0$, τότε να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του -α δια -β.

14. ****** Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.

15. ***** Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.

16. ****** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος δ, ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.

17. ****** Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

18. ****** Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.

19. ****** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{cases} x+y=200 \\ (x,y)=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=200 \\ (x,y)=3 \end{cases}$

20. ****** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x,\ y)=10 \\ [x,\ y]=100 \end{cases}$.

21. ***** Να αποδειχθεί ότι:

i) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

ii) Η διαφορά δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

iii) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

iv) Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

v) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός

vi) Η διαφορά άρτιου αριθμού από περιττό είναι περιττός

vii) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός

viii) Το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού επί ένα περιττό είναι αριθμός άρτιος

22. ***** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

23. ****** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 8.

24. ****** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.

25. ****** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

26. ****** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 5.

27. ****** Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.

28. *** i)** Αποδείξτε ότι $(\rho + 1)^2 - (\rho - 1)^2 = 4\rho$ για κάθε φυσικό ρ.

ii) Αποδείξτε ότι ένας φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

iii) Να γραφεί ο αριθμός 80 σαν διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

29. ****** Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών.

30. *** α)** Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής 2κ ή 2κ + 1 (κ ακέραιος).

β) Για κάθε ακέραιο α ισχύει: $\alpha^2 = 4\kappa$ ή $\alpha^2 = 4\kappa + 1$.

γ) Για κάθε ακέραιο α δείξτε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \alpha + 1$ είναι περιττός.

31. ****** Διαθέτουμε 1.500 δρχ., με αυτό το ποσό ο μέγιστος αριθμός κιλών που μπορούμε να αγοράσουμε από ένα προϊόν είναι κ και παίρνουμε ρέστα 220 δρχ.

α) Αν διαθέτουμε 2.000 δρχ. θα μπορούσαμε να αγοράσουμε 2 κιλά επιπλέον και θα παίρναμε ρέστα 80 δρχ. Πόσο κοστίζει το κιλό του προϊόντος;

β) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτονομισμάτων των 5.000 που θα πρέπει να διαθέσουμε για την αγορά του προϊόντος ώστε να μην πάρουμε ρέστα.

32. ****** Οι ακέραιοι α και β διαιρούμενοι με το $\nu \in N^*$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{\alpha - \beta}{\nu}$ είναι ακέραιος.

33. ****** Έστω $\alpha = \beta \cdot \kappa + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < |\beta|$, $\beta \neq 0$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(\alpha + \lambda\beta)$ με το β είναι πάλι υ.

34. ** Να αποδειχθεί ότι:

α) ο αριθμός $\nu^3 - \nu$ είναι πολλαπλάσιο του 24, αν ν περιττός φυσικός διάφορος του 1.

β) ο αριθμός $(\nu^2 - 1)\,\nu^2\,(\nu^2 + 1)$ είναι διαιρετός δια 60, αν ν φυσικός.

γ) ο αριθμός $(\nu^3 - \nu)\,(\nu^2 - 4)$ είναι πολλαπλάσιο του 120, αν ν φυσικός μεγαλύτερος του 2.

35. * Εάν β = 1 + πολ3 να αποδείξετε ότι:

α) $\beta^2 = 1 +$ πολ3 **β)** $\beta^3 = 1 +$ πολ3

36. * Εάν ν = 1 + πολ5 να αποδείξετε ότι: $3\nu^2 + 3\nu - 1 =$ πολ5

37. * Εάν ν = 2 + πολ5 να αποδείξετε ότι:

α) 2ν + 1 = πολ5 **β)** ν + 3 = πολ5

38. * Αν ν = 3 + πολ5 ή ν = 1 + πολ5, να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον $3\nu^2 + 3\nu - 1$.

39. ** Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα α + β ή η διαφορά α - β διαιρείται με τον 3.

40. ** Αν τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.

41. ** Για κάθε $\nu \in N^*$, να αποδείξετε ότι $2^{2\nu} + 15\nu - 1 =$ πολ9.

42. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $\nu \in N^*$.

43. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu - 6\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε $\nu \in N$, με $\nu \geq 2$.

44. ****** Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

45. ****** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α, β.

α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν α/β και β/α τότε α = β. **ii)** Αν α/α+β τότε α/β.

β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων α, β για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο α·β διαιρεί το άθροισμα α + β.

46. ***** Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = \nu\,(\nu^2 - 1)\,(4\nu^2 - 1)$ διαιρείται με το 5 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

47. ****** Έστω ένας διψήφιος αριθμός α. Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός α διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.

48. ******* Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό αβγ. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής αβγαβγ. Να αποδείξετε ότι:

i) αβγαβγ = 1001 (100α +10β + γ)

ii) Ο αριθμός αβγαβγ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.

49. ****** Αν α είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και β ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον α, όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά α - β διαιρείται με τον 9.

50. ****** Εάν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1$ και τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

α) ο β διαιρεί τον δ **β)** $|\beta| = |\delta|$

51. ****** Αν α, β ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι: (α, β) = (5α + 4β, α + β).

52. ****** Αν (α, β) = 1 και δ/α δείξτε ότι (δ, β) = 1.

53. ****** Να αποδειχθεί ότι (α, β) = (α + βγ, β).

54. ****** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha + \beta\gamma, \alpha + \beta(\gamma-1))$ να αποδείξετε ότι $\delta_1 = \delta_2$.

55. ****** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha, \beta\gamma)$ τότε δ_1/δ_2.

56. ***** Εάν $\nu \in N^*$ να αποδείξετε ότι: $(5\nu + 1, 6\nu + 1) = 1$

57. ****** α) Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν μπορεί η περίμετρός του να ισούται με πρώτο αριθμό.

β) Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν μπορεί το εμβαδόν του να ισούται με πρώτο αριθμό.

58. ****** Για κάθε $\nu \in N^*$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \dots (2\nu - 1)\, 2\nu = \pi o\lambda 2^{\nu}$$

59. ****** Αν ο 2 δεν διαιρεί τον xψ, τότε να αποδείξετε ότι:

i) x, ψ περιττοί αριθμοί

ii) ο 2 διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

iii) ο 4 δεν διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

60. ****** Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει (α, β, γ) = 7 και [α, β, γ] = 105, να βρεθούν οι α, β, γ.

61. ****** Να δείξετε ότι ο μοναδικός πρώτος της μορφής $\nu^3 - 1$ είναι ο αριθμός 7.

62. ****** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x^2 - κx + λ = 0, κ, λ ∈ Z δεν μπορεί να έχει για ρίζες δύο ανάγωγα κλάσματα.

63. ****** Αν [β, γ] = ε, $[β_1, γ_1] = ε_1$, $β_1/β$ και $γ_1/γ$ να αποδείξετε ότι $ε_1/ε$.

64. ***** Ένας ανθοπώλης διαθέτει 30 τριαντάφυλλα, 72 γαρύφαλλα και 54 υάκινθους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Από πόσα άνθη κάθε είδους θα αποτελείται η κάθε ανθοδέσμη;

65. ***** Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.

66. ***** Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;

67. ***** Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;

68. ***** Τρείς αθλητές τρέχουν ένα κυκλικό στίβο. Ο πρώτος για μία στροφή χρειάζεται 2 λεπτά, ο δεύτερος 3 λεπτά και ο τρίτος 5 λεπτά. Ξεκινούν και οι τρεις από το ίδιο σημείο. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν συμπληρώσει και οι τρεις (για πρώτη φορά) ακέραιο αριθμό στροφών;

69. ****** Αν α, β, γ ∈ Z*, να δειχθεί ότι: (α, β) (β, γ) (γ, α) [α, β] [β, γ] [γ, α] = $α^2β^2γ^2$.

70. ****** Οι αριθμοί ρ και 8ρ - 1 είναι πρώτοι. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός 8ρ + 1 είναι σύνθετος.

71. ****** Εάν ο ν ≥ 1, να αποδείξετε ότι ο αριθμός (ν + 1)! + 1 δε μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2.

72. ****** Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε πρώτου ρ > 3 είναι της μορφής 3λ + 1.

73. ***** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση 2x - 3y = 5.

74. ****** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση 36x + 42y = 66.

75. ****** Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης 3x + 5y = 16.

76. ***** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση 4x - 8y = 3.

77. ****** Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας (ε): 6x + 5y = 4, τα οποία έχουν αρνητική ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.

78. ****** Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια ανταλλαγή ενός χαρτονομίσματος των 200 δρχ. με κέρματα των 10 και 20 δρχ.; (Θέλουμε κέρματα και των δύο ειδών).

79. ***** Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

i) 71x - 50ψ = 1

ii) 43x + 64ψ = 1

iii) 243x + 189ψ = 9

80. ****** Εάν α, β ∈ Ζ* να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση αx + βψ = κα + λβ έχει λύση για κάθε κ, λ ∈ Ζ.

81. **** α)** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x + 5y = 2$

β) Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy να βρεθούν τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $4x + 5y = 2$, τα οποία βρίσκονται στην δεύτερη γωνία των αξόνων και έχουν ακέραιες συντεταγμένες.

82. ****** Μια ομάδα ποδοσφαίρου για το πρωτάθλημα της Α΄ Εθνικής κατηγορίας στους αγώνες, που έχει δώσει έως τώρα, έχει συγκεντρώσει 38 βαθμούς και έχει υποστεί 5 ήττες. Αν οι ισοπαλίες που έχει φέρει, είναι περισσότερες από τις ήττες, αλλά και οι νίκες περισσότερες από τις ισοπαλίες, να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των αγώνων, που έχει δώσει η ομάδα αυτή, με δεδομένο ότι, από κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς, από κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0.

83. ******* Ένας χρυσοχόος, επιστρέφοντας στο μαγαζί του, διαπιστώνει ότι του λείπουν οι λίρες που είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ διατεταγμένες σε σχήμα τετραγώνου.

Στην ερώτηση που έκανε στον υπάλληλό του: "που πήγαν οι λίρες;" πήρε την απάντηση:

- «Ήρθαν τρεις κλέφτες και τις άρπαξαν. Άφησαν μόνο δύο, που τις έχω στο συρτάρι. Θα τις έπαιρναν και αυτές, αλλά δεν μπορούσαν να τις μοιράσουν εξίσου οι τρεις μεταξύ τους».

Να εξετάσετε αν ο υπάλληλος έλεγε την αλήθεια.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗ ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του μαθητή
στη Θεωρία Αριθμών

(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. α) Πότε λέμε ότι ένας ακέραιος $\beta \neq 0$ διαιρεί έναν ακέραιο α;

β) Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων α και β, ένας τουλάχιστον από τους οποίους είναι διάφορος του μηδενός;

γ) Να αποδείξετε ότι δυο ακέραιοι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι, ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$.

Β. α) Να δικαιολογήσετε ότι αν β/α τότε κβ/κα για κάθε $\kappa \in Z^*$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha, \beta) = (3\alpha + 2\beta, \alpha + \beta)$ όπου α, β ακέραιοι.

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ακέραιοι α, $\beta \neq 0$.

Α. Αν $(\alpha, \beta) = 3$, ποια μορφή μπορεί να έχει ο ακέραιος α;

Β. Αν ισχύει $3\alpha + (-2)\,\beta = 1$, ποιος είναι ο Μ.Κ.Δ. των α και β;

Γ. Να αποδείξετε ότι $(\alpha\beta, \alpha + \beta)$, αν $(\alpha, \beta) = 1$.

Δ. Να αποδείξετε ότι οι α και β διαιρούμενοι με το κ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο αν και μόνο αν κ/α - β.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του μαθητή
στη Θεωρία Αριθμών

(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αν α/β, τότε α/λβ για κάθε ακέραιο λ.

β) Αν α/β και α/γ, τότε α/(β + γ).

Β. Έστω ότι α, β, γ, δ είναι τέσσερις διαδοχικοί ακέραιοι με τη σειρά που δίνονται. Να αποδείξετε ότι:

α) βγ - αδ = 2

β) βδ - αγ περιττός αριθμός.

Θέμα 2ο

Εάν β = 3 + πολ5, να συνδέσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. β^2	**Α.** πολ5
	Β. 1 + πολ5
2. β^3	**Γ.** 2 + πολ5
	Δ. 3 + πολ5
3. β^4	**Ε.** 4 + πολ5

Θέμα 3ο

α) Να δείξετε ότι αν οι θετικοί ακέραιοι α, β έχουν ίδιο το ψηφίο των μονάδων τους, τότε ο α - β διαιρείται με 10.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός: $(\nu - 1)\,\nu\,(\nu + 1)\,(\nu^2 + 1)$ διαιρείται με 2 και με 5 για κάθε θετικό ακέραιο ν.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν οι αριθμοί ν και ν^5 έχουν ίδιο το τελευταίο ψηφίο.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του μαθητή στη Θετική Κατεύθυνση

(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Β. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha-1)x + (2\alpha+1)y + \alpha^2 - 1 = 0$ (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) Η τιμή του α για την οποία η παραπάνω ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα x΄x είναι

Α. 2 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 1/2 **Ε.** καμία

γ) Η τιμή του α για την οποία η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο (-2, 1) είναι

Α. 1 **Β.** -2 **Γ.** 2 **Δ.** -3 **Ε.** καμία

δ) Η τιμή του α για την οποία η παραπάνω εξίσωση είναι παράλληλη με τον y΄y είναι

Α. -1 **Β.** 1 **Γ.** -1/2 **Δ.** 2 **Ε.** καμία

ε) Για α = 0 η ευθεία (1) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία

Α. $\frac{\pi}{6}$ **Β.** $\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{\pi}{3}$ **Δ.** $\frac{2\pi}{3}$ **Ε.** π

Θέμα 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ισούται με

Α. $2\sqrt{2}$ **Β.** $\sqrt{2}$ Γ. 4 **Δ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Ε.** 2

β) Τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα. Τότε η τιμή του κ είναι

Α. 3 **Β.** $-\frac{5}{2}$ **Γ.** -2 **Δ.** $\frac{3}{2}$ **Ε.** $\frac{2}{3}$

γ) Το μέτρο του $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι:

Α. 4 **Β.** -4 **Γ.** 8 **Δ.** $\sqrt{24}$ **Ε.** 16

δ) Να θέσετε σε μια διάταξη, από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, τους αριθμούς $2\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$, $(\vec{\alpha}^2+\vec{\beta})^2$, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$, $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

ε) Να εξετάσετε αν υπάρχουν αριθμοί κ, $\lambda\in$ R ώστε να ισχύει $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$.

Θέμα 3ο

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση y = λx και ο κύκλος C με εξίσωση

$$x^2-2x+y^2=0$$

Α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται με ένα σημείο τομής το O (0, 0).

Β. Αν Α είναι το δεύτερο κοινό τους σημείο, να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΟΑ συναρτήσει του λ.

Γ. Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται το Μ κινείται επίσης σ' ένα κύκλο με εξίσωση $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.

Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η διοφαντική εξίσωση $x + 2y = 20$.

α) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

Β. Θέλουμε να ανταλλάξουμε ένα χαρτονόμισμα των 200 δρχ. με κέρματα των 10 και 20 δρχ. (και των δύο ειδών), με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η ανταλλαγή και πόσα κέρματα από κάθε είδος θα έχουμε σε κάθε περίπτωση;

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή στη Θετική Κατεύθυνση

(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = ρ^2$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = ρ^2$ στο σημείο του Μ (x_1, y_1) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = ρ^2$.

Β. α) Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ είναι

Α. 16 **Β.** 8 **Γ.** 4 **Δ.** 2 **Ε.** 32

β) Η εφαπτόμενη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο (2, 1) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $x - 2y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 7 = 0$ **Γ.** $x + 2y = 4$

Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ **Ε.** $y = x$

γ) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του Μ (- 1, 2). Η εφαπτομένη του στο Μ έχει εξίσωση

Α. $2x - y = 5$ **Β.** $x + 2y = - 5$ **Γ.** $x + 2y = 5$

Δ. $x - 2y + 5 = 0$ **Ε.** $2x + y = 5$

δ) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$ και η ευθεία $y = 2$.

Α. ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία

Β. ο κύκλος και η ευθεία δεν τέμνονται

Γ. ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία με ίδια τετμημένη

Δ. ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία με ίδια τεταγμένη

Ε. η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου

ε) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο Μ $(ημθ, \sqrt{3})$, $θ \in (0, 2π)$. Το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο όταν

Α. $θ = \frac{π}{3}$ **Β.** $θ = \frac{π}{2}$ **Γ.** $θ = π$ **Δ.** $θ = \frac{2π}{3}$

Ε. δεν υπάρχει τιμή του θ ώστε το Μ να ανήκει στον κύκλο

Θέμα 2ο

Α. Στη στήλη Α φαίνονται ζεύγη αριθμών (α, β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
(23, 3)	- 1
	2
(- 35, 6)	1
	0
(- 27, - 5)	3
(5, 7)	5

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
27λ	2
	3
λ^3	5
	λ^2
$\lambda(\lambda + 1)$	$\lambda^2 + 1$

Θέμα 3ο

Δίνονται τα σημεία Α $(3, 2)$ και Β $(7, -4)$.

α) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ

β) Να βρείτε σημεία Ν του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΝΑΒ να είναι ορθογώνιο στο Ν.

Θέμα 4ο

Δίνονται τα σημεία Α $(1, 4)$ και Β $(-1, -5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1. Λ	17. Σ	32. Σ	47. Σ	62. Σ
2. Σ	18. Σ	33. Λ	48. Λ	63. Σ
3. Λ	19. Λ	34. Σ	49. Σ	64. Λ
4. Λ	20. Σ	35. Σ	50. Λ	65. Λ
5. Σ	21. Σ	36. Σ	51. Λ	66. Λ
6. Σ	22. Λ	37. Λ	52. Σ	67. Σ
7. Λ	23. Σ	38. Σ	53. Λ	68. Λ
8. Σ	24. Σ	39. Σ	54. Σ	69. Σ
9. Λ	25. Σ	40. Σ	55. Σ	70. Σ
10. Σ	26. Σ	41. Λ	56. Λ	71. Σ
11. Λ	27. Λ	42. Σ	57. Λ	72. Σ
12. Σ	28. Σ	43. Λ	58. Σ	73. Λ
13. Λ	29. Σ	44. Σ	59. Σ	74. Σ
14. Σ	30. Σ	45. Λ	60. Σ	75. Λ
15. Λ	31. Λ	46. Λ	61. Λ	76. Λ
16. Σ				77. Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δ	11. Β	21. Γ	31. Ε
2. Γ	12. Γ	22. Α	32. Γ
3. Β	13. Δ	23. Γ	33. Δ
4. Β	14. Ε	24. Ε	34. Γ
5. Δ	15. Δ	25. Δ	35. Ε
6. Δ	16. Γ	26. Γ	36. Γ
7. Δ	17. Γ	27. Ε	37. Δ
8. Ε	18. Ε	28. Δ	38. Δ
9. Δ	19. Γ	29. Γ	
10. Δ	20. Γ	30. Γ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. 1Β, 2Γ, 3Ε, 4ΣΤ	7. 1Β, 2Α, 3Δ
2. 1Β, 2Ε, 3Α	8. 1Δ, 2Α, 3Β, 4Ζ, 5Ε
3. 1Β, 2Δ, 3Α	9. 1Α, 2Δ, 3Β, 4Ε
4. 1Γ, 2Δ, 3Β	10. 1Γ, 2Δ, 3Α
5. 1Ε, 2Γ, 3Β	11. 1Δ, 2Ε, 3Β, 4Α
6. 1Γ, 2Α, 3ΣΤ, 4Ζ, 5Δ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. **δ, α, β, ε, γ**
2. **γ, β, ε, α, δ, στ**
3. **α : 0, γ : 1, β : 2, δ : 3, ε : 4**

Υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ **2.** $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ **3.** $\nu = 5$ **4.** $2^{4\nu} = (2^4)^\nu = 16^\nu$

5. Επαγωγή ή $(\alpha + \beta)^\nu - \alpha^\nu = \dots$

7. Αν $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}}\ \dots$ (κ + 1 ριζικά) τότε $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2\sqrt{2}}\ \dots$ (κ ριζικά) $< 2 + 2$ δηλαδή $\alpha^2 < 4$.

8. Το μοντέλο της άσκησης ανάγεται στο άθροισμα $1 + 2 + \dots + \nu$.

11. $\alpha = 3\,(2\upsilon) + \upsilon$ για $\upsilon = 0, 1, 2$ ($\alpha = 0$ απορρίπτεται)

12. $60 = \delta\cdot\pi + 12$ άρα $\delta\cdot\pi = 48$ με $\delta > 12$

13. $\pi + 1$ και $\beta - \upsilon$

14. Να διακρίνετε περιπτώσεις για τον α, $\alpha = 2\kappa$, $\alpha = 2\kappa + 1$

16. (2285 - 8, 977 - 5)

17. Αν α τα δέντρα τότε ο α - 2 είναι το διπλάσιο του [3, 4, 5, 6] δηλαδή 120

18. Οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 99 και 72

19. **α)** $\begin{matrix} x = 5x_1 \\ y = 5y_1 \end{matrix}$ με $(x_1, y_1) = 1$

β) αδύνατο

20. $\begin{matrix} x=10x_1 \\ y=10y_1 \end{matrix}$ $[x_1, y_1]=10$ και πίνακες τιμών

22. ν (ν - 1) με ν = 2κ ή ν = 2κ + 1

23. 2ν (2ν + 2) με ν = 2κ ή ν = 2κ - 1

24. $120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Σε 5 διαδοχικούς ακεραίους υπάρχουν πολ5, πολ3 και γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων που είναι πολ8 (άσκηση 23)

25. (ν - 1) ν (ν + 1) με ν = 3κ ή ν = 3κ + 1 ή ν = 3κ + 2

27. Απαγωγή σε άτοπο

29. $2κ + 1 = (κ + 1)^2 - κ^2$

31. **α)** 1.500 = κ·α+220, 2.000 = (κ+2)α+80 (α η αξία του ενός κιλού)
β) [5.000, 320]

32. Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης.

33. α + λβ = (κ + λ) β + υ

34. **α)** Το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων είναι πολλαπλάσιο του 8
β) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ και δείξτε ότι η παράσταση διαιρείται με 4, 3, 5
γ) 120 = 8·3·5

39. Τα α, β είναι της μορφής 3κ + 1 ή 3κ + 2.

40. Ο αριθμός έχει ψηφία x, x + 1, x + 2 και ισούται με 100x + 10 (x + 1) + x + 2 (θα μπορούσε να έχει x + 2, x + 1, x)

44. $[1, 2, 3, \ldots, 10] = 2520$

45. **i)** $\alpha = \kappa\beta$, $\beta = \lambda\alpha$ πολ/σμός κατά μέλη και προκύπτει $\kappa = \lambda = 1$

ii) $\alpha/\alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \kappa\alpha$

iii) $\alpha + \beta = \kappa\alpha\beta \Rightarrow \alpha/\alpha + \beta$ και $\beta/\alpha + \beta$ άρα α/β και β/α δηλαδή $\alpha = \beta$.

Άρα $2\alpha = \kappa\alpha^2$ δηλαδή $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$

46. Επαγωγή

47. π.χ. για διψήφιο: $\alpha = 10\lambda + \mu = 7\lambda + (3\lambda + \mu)$ οπότε αρκεί $3\lambda + \mu =$ πολ7

48. **i)** Ο αβγ ισούται με $10^3\alpha + 10^2\beta + \gamma$ και ο αβγαβγ ισούται με $10^5\cdot\alpha + 10^4\cdot\beta + \ldots$

ii) $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$

49. Οι αριθμοί γράφονται: $\alpha = 10x + y$, $\beta = 10y + x$

50. **i)** $\alpha\delta + \beta\gamma = \beta\delta$, $\alpha\delta = \beta\delta - \beta\gamma = \beta(\delta - \gamma)$, $(\alpha, \beta) = 1$ **ii)** δ/β και β/δ

51. Τα δύο ζεύγη έχουν τους ίδιους κοινούς διαιρέτες.

52. Αν $(\delta, \beta) = \kappa \neq 1$, τότε $\delta = \kappa x$, $\beta = \kappa y$, $\alpha = \delta\cdot z$, άτοπο.

53. Έστω $(\alpha, \beta) = \delta$, $(\alpha + \beta\gamma, \beta) = \delta'$ τότε δ/α δ/β άρα $\delta/\alpha + \beta\gamma \Rightarrow \delta/\delta'$ και

$$\left.\begin{array}{c}\delta'/\alpha+\beta\gamma\\ \delta'/\beta\end{array}\right\} \text{ άρα } \delta'/\alpha + \beta\gamma - \beta\gamma = \alpha$$

54. $\alpha = \kappa\delta_1$, $\beta = \lambda\delta_1$ **55.** $\alpha = \kappa\delta_1$, $\beta = \lambda\delta_1$

57. Αν x, y δυο διαδοχικές πλευρές, τότε η περίμετρος ισούται με $2x + 2y$

58. Επαγωγή **59.** **i)** άτοπο **ii)** αντικατάσταση

60. $\alpha + \gamma = 2\beta$, $\alpha = 7\kappa$ $\beta = 7\lambda$ $\gamma = 7\mu$, $7\,[\kappa, \lambda, \mu] = 105$ άρα $[\kappa, \lambda, \mu] = 15$ με κ, λ, μ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και θετικοί πρώτοι μεταξύ τους δηλαδή $\kappa = 1, \lambda = 3, \mu = 5$.

61. $\nu^3 - 1 = (\nu - 1)(\nu^2 + \nu + 1)$

62. $\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, $\rho_2 = \frac{\gamma}{\delta}$ με $(\alpha, \beta) = 1$ $(\gamma, \delta) = 1$ $\rho_1 + \rho_2 = \kappa$ $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda$ άρα

$\alpha\delta + \beta\gamma = \kappa\beta\delta$ και $\alpha\gamma = \lambda\beta\delta$ τότε $\beta/\alpha\delta$ και $\delta/\alpha\gamma$ άρα β/δ και δ/α

άρα β/α άτοπο

63. $\beta = \kappa\beta_1$, $\gamma = \lambda\gamma_1$ οπότε $\varepsilon = [\beta, \gamma] = [\kappa\beta_1, \lambda\gamma_1] = \pi o\lambda[\beta_1, \gamma_1]$

64. $(30, 72, 54) = 6$

65. $[8, 10, 12] = 120$ και $120 + 5 = 125$

66. 60, 60κ $\kappa \in Z^*$ **67.** Τα κοινά πολλαπλάσια των 3, 5

68. $[2, 3, 5] = 30$ (λεπτά)

70. Αν $\rho = 2$ άτοπο αν $\rho \geq 3$ τότε $\rho = 3\kappa + 1$ ή $\rho = 3\kappa + 2$

71. $(\nu + 1)! =$ άρτιος **72.** Θεώρησε $\rho = 3\kappa$ άτοπο $\rho = 3\kappa + 1$, $\rho = 3\kappa + 2$

73. $x = -2 - 3t$ $y = -3 - 2t$ $t \in Z$ **74.** $(x, y) = (3 + 7t, -1 - 6t)$ $t \in Z$

75. $(x, y) = (2,2)$ **76.** Αδύνατη

77. $(x, y) = (-1 + 5t,\ 2 - 6t)$ $t \in Z$ $t \leq 0$

78. $10x + 20y = 200$ με λύση $\begin{matrix} x = 4 + 2t & x > 0 \\ y = 8 - t & y > 0 \end{matrix}$ άρα $t = -1, 0, ..., 7$

80. Αν $\delta = (\alpha, \beta)$ τότε $\delta / \kappa\alpha + \lambda\beta$

82. Αν x οι νίκες, y οι ισοπαλίες $3x + y = 38$

83. Το πλήθος των λιρών σε μία πλευρά θα είναι 3κ ή $3\kappa + 1$ ή $3\kappa + 2$ κανένα όμως τετράγωνο δεν δίνει $3\lambda + 2$ (περίσσεψαν 2).

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΚΛΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η εξίσωση $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = k, \ k \in R$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο για οποιαδήποτε $A, B, \Gamma \in R$ **Σ** **Λ**

3. * Η εξίσωση $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = -25$ είναι εξίσωση κύκλου. **Σ** **Λ**

4. * Η εξίσωση $(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου. **Σ** **Λ**

5. * Το κέντρο του κύκλου C: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + y = -1$. **Σ** **Λ**

6. * Το κέντρο του κύκλου C: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων. **Σ** **Λ**

7. * Το σημείο (2, -1) ανήκει στον κύκλο C: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 12$. **Σ** **Λ**

8. * Τα σημεία τομής των ευθειών ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 με εξισώσεις: $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$ και $y = 1$ μπορεί να ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο (0, 0). **Σ** **Λ**

9. * Οι κύκλοι με εξισώσεις

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \quad \text{και} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

έχουν κέντρα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

10. * Ο κύκλος που έχει κέντρο το Κ (0, 3) και διέρχεται από το Α (- 4, 0) έχει ακτίνα R = 5. **Σ** **Λ**

11. * Ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

12. ***** Ο κύκλος $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (- 4, 0) και (2, 0). **Σ** **Λ**

13. ***** Αν Κ και Κ΄ είναι τα κέντρα των κύκλων με εξισώσεις $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ και $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ αντίστοιχα, Ο η αρχή των αξόνων, τότε $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OK'} = 0$. **Σ** **Λ**

14. ***** Το κέντρο κύκλου με διάμετρο ΑΒ, όπου Α (-2, 4) και Β (6, -10) είναι Κ (2, -3). **Σ** **Λ**

15. ***** Ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ, όπου Α (α, 0) και Β (0, β) διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

16. ***** Ο κύκλος με εξίσωση $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ εφάπτεται με τους άξονες x'x και y'y. **Σ** **Λ**

17. ***** Ο κύκλος με εξίσωση $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ δεν τέμνει τον άξονα y'y. **Σ** **Λ**

18. ***** Η ευθεία x = 4 εφάπτεται του κύκλου C: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **Σ** **Λ**

19. ***** Οι κύκλοι με κέντρα Κ (ο, λ), $\lambda \in R$ και ακτίνα λ έχουν εφαπτόμενες τις ευθείες x = λ και x = - λ. **Σ** **Λ**

20. ***** Ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2$ εφάπτεται με τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

21. ***** Η ευθεία ε, εφάπτεται σ' έναν κύκλο C, αν και μόνον αν, η απόσταση του κέντρου από την ευθεία, είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. **Σ** **Λ**

22. ***** Η ευθεία με εξίσωση x = 3, είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $(x - 1)^2 + y^2 = 4$. **Σ** **Λ**

23. ***** Η ευθεία με εξίσωση y = - 1 είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + (y - 2)^2 = 9$. **Σ** **Λ**

24. ***** Οι κύκλοι με εξισώσεις: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ και $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$ δεν έχουν κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

25. ***** Οι κύκλοι C_1: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ είναι εφαπτόμενοι με σημείο επαφής την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

26. * Οι κύκλοι $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ και $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ είναι εφαπτόμενοι με σημείο επαφής την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

27. * Δίνονται τα σημεία Α (- 2, 0), Β (4, 6), Γ (6, -2), Δ (-4, 8). Οι κύκλοι που γράφονται με διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

28. * Οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 1$ και $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ εφάπτονται εξωτερικά. **Σ** **Λ**

29. * Οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 4$ και $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ εφάπτονται εσωτερικά. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Δίνεται ο κύκλος C: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Το σημείο Α (κ, λ), $κ, λ \in R$ είναι εσωτερικό του κύκλου, αν

Α. $κ^2 + (λ - 2)^2 > 4$ **Β.** $(κ - 2)^2 + λ^2 < 4$ **Γ.** $κ^2 + (λ - 2)^2 < 4$

Δ. $κ^2 + λ^2 < 4$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

2. ** Δίνονται οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 με εξισώσεις

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

αντιστοίχως και οι προτάσεις:

(Ι) το σημείο Α (2, 3) είναι εξωτερικό του C_1

(ΙΙ) το σημείο Α (2, 3) είναι εξωτερικό του C_2

(ΙΙΙ) το σημείο Α (2, 3) είναι εσωτερικό του C_3

τότε αληθεύουν:

Α. Ι και ΙΙ **Β.** ΙΙ και ΙΙΙ **Γ.** Ι και ΙΙΙ **Δ.** ΙΙ **Ε.** καμία.

3. * Ο κύκλος C: $(x - α)^2 + (y - β)^2 = R^2$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν

Α. $R = \sqrt{α^2 + β^2}$ **Β.** $R = |α| + |β|$ **Γ.** $R = |α + β|$

Δ. $R = \sqrt{\frac{α^2 + β^2}{2}}$ **Ε.** $R = |α - β|$

4. ** Η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου C: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $x + y + 1 = 0$, είναι η

Α. $2x + y - 1 = 0$ **Β.** $x = y$ **Γ.** $x = - y$

Δ. $y + x - 2 = 0$ **Ε.** $-y + 2x = 0$

5. * Ο κύκλος C με εξίσωση $(x - α)^2 + (y - β)^2 = R^2$, $α > 0$, $β > 0$, τέμνει τους άξονες σε 4 σημεία, αν

Α. $α < R$ και $β > R$ **Β.** μόνο $β < R$ **Γ.** μόνο $α > R$

Δ. μόνο $β > R$ **Ε.** $α < R$ και $β < R$

6. * Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y - λ)^2 = 4$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία αν

Α. $λ \in R$ **Β.** μόνο για $λ > 2$ **Γ.** μόνο για $λ < - 2$

Δ. $- 2 < λ < 2$ **Ε.** $λ = 2$ ή $λ = - 2$

7. * Ένας κύκλος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αν το κέντρο του ανήκει στην ευθεία

Α. $x = 0$ **Β.** $y = 0$ **Γ.** $y = x$

Δ. $y = -x$ **Ε.** καμία από αυτές

8. * Δίνεται κύκλος κέντρου K (-4, 1) και το σημείο του A (-3, 4). Οι συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού του A είναι

Α. (5, 6) **Β.** (- 5, - 2) **Γ.** (5, - 6) **Δ.** (- 5, - 6) **Ε.** (5, 10)

9. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 8 = 0$ έχει κέντρο το σημείο

Α. (5, 4) **Β.** (- 5, 4) **Γ.** (- 5, - 4) **Δ.** (5, - 4) **Ε.** (8, - 8)

10. ** Η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $x^2 - 16x + y^2 + 12y = 0$ είναι

Α. 8 **Β.** 9 **Γ.** 10 **Δ.** 11 **Ε.** 7

11. ***** Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για την ακτίνα του κύκλου

$(x + 3)^2 + (y - \sqrt{13})^2 = 19$

Α. 2, 1 **Β.** 3, 2 **Γ.** 4, 3 **Δ.** 5, 1 **Ε.** 6, 2

12. ***** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 4κ + κ^2 + 4 = 0$, $κ \in R$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν

Α. $κ = 0$ **Β.** $κ = -1$ **Γ.** $κ = 2$ **Δ.** $κ = 4$ **Ε.** $κ = -4$

13. ****** Ο κύκλος C: $x^2 + (y - 5)^2 - (κ - 3)^2 = 0$, $κ \in R$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία, αν

Α. $κ = 8$ **Β.** μόνο για $κ > 8$ **Γ.** μόνο για $κ < -8$

Δ. $κ < -2$ ή $κ > 8$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

14. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, C_2: $(x - 4)^2 + y^2 = 1$, C_3: $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ και οι προτάσεις

I) Οι κύκλοι C_1 και C_3 εφάπτονται

II) Οι κύκλοι C_2 και C_3 εφάπτονται

III) Οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται

τότε αληθεύει

Α. μόνο η I **Β.** μόνο η II **Γ.** μόνο η III

Δ. I και II και III **Ε.** καμία

15. ***** Η ευθεία $y = λx + 4$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 8$. Το λ μπορεί να είναι ίσο με

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** -1 **Ε.** 4

16. ***** Οι κύκλοι C_1: $(x - α)^2 + (y - β)^2 = R^2$ και C_2: $(x + γ)^2 + (y - δ)^2 = r^2$, $α, β, γ, δ \in R^*$ είναι ομόκεντροι αν

Α. $α = -γ$ και $β = δ$ **Β.** $α = γ$ και $β = δ$

Γ. $α = γ$ και $β = -δ$ **Δ.** $α = -γ$ και $β = -δ$

Ε. $α = δ$ και $β = γ$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρωθούν τα κενά.

εξίσωση κύκλου	**κέντρο**	**ακτίνα**
$x^2 + y^2 = 6$		
$(x + 3)^2 + y^2 = 5$		
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 3$		
$x^2 + (y + 2)^2 = 2$		

2. * Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρωθεί η τρίτη στήλη.

κέντρο κύκλου	**ακτίνα**	**εξίσωση κύκλου**
(7, - 6)	5	
(0,0)	$\sqrt{6}$	
(0, - 2)	3	
(5,0)	5	

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με αυτά της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα Ι.

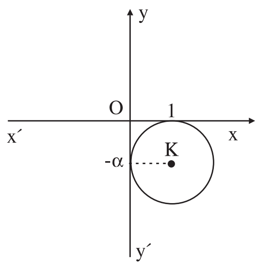
Α στήλη **εξισώσεις κύκλων**	**Β στήλη** **κέντρα κύκλων, ακτίνες**
1. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$	**Α.** $K(-3,2)$, $R = 2$
2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$	**Β.** $K\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$	**Γ.** $K(-1, 2)$, $R = 3$
4. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	**Δ.** $K(1, -2)$, $R = 4$
	Ε. $K(-1, 2)$, $R = \sqrt{5}$
	Ζ. $K(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $R = \sqrt{2}$

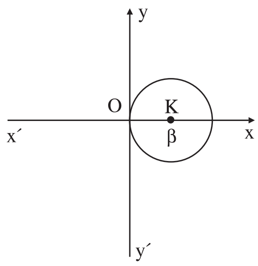
Ι

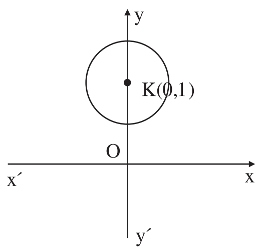
1	**2**	**3**	**4**

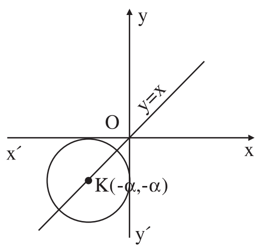
2. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε κύκλο της στήλης Α με την εξίσωσή του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα Ι.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

1. 

2. 

3. 

4. 

</td><td>

Α. $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

Β. $(x-1)^2+(y+\alpha)^2=\alpha^2$

Γ. $(x+\alpha)^2+(y+\alpha)^2=\alpha^2$

Δ. $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

Ε. $(x-\beta)^2+y^2=\beta^2$

Ζ. $x^2+(y-\beta)^2=\alpha^2$

</td></tr>
</table>

Ι

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις αποτελούν κύκλο; Στις περιπτώσεις που αποτελούν κύκλο, να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους.

C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$

C_3: $x^2 + y^2 - x = 6$

C_4: $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 63 = 0$

C_5: $2x^2 + 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$

2. * Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 + \lambda = 0$ να παριστάνει κύκλο.

3. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει ακτίνα $R = 5$ και η τετμημένη του κέντρου του είναι $x_0 = -3$.

4. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει ακτίνα $R = 4\sqrt{5}$ και η τετμημένη του κέντρου του είναι διπλάσια της τεταγμένης.

5. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (2, 1), Β (5, 1), Γ (2, 5) και έστω Μ το μέσον της ΒΓ.

α) Να γράψετε την εξίσωση κύκλου με κέντρο το Μ και ακτίνα την ΑΜ

β) Να εξετάσετε αν ο κύκλος διέρχεται από τα Β και Γ.

6. * Ο κύκλος C: $(x + 1)^2 + (y - \alpha)^2 = 10$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$.

7. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Κ (- 4, 5) και περνάει από το σημείο Α (3, 3).

8. ***** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την ΑΒ με Α (α, 0) και Β (0, β).

9. ****** Δίνονται τα σημεία Α (-1, 0) και Β (1, 0). Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Μ (x, y), για τα οποία ισχύει $MA^2 + MB^2 = 4$, βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

10. ****** Να βρείτε την μικρότερη απόσταση του σημείου Α (8, -6) από τον κύκλο C: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

11. ***** Να υπολογίσετε την απόσταση των κέντρων των κύκλων:
C_1: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

12. ****** Να βρείτε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε ο κύκλος
C: $(x - κ)^2 + (y - λ)^2 = ρ^2$
α) να εφάπτεται στον άξονα x'x,
β) να εφάπτεται στον άξονα y'y,
γ) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

13. ***** Να εξετάσετε αν η ευθεία y + x = 1 είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

14. ***** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 20$ στο σημείο του Α (- 4, 2)

15. ***** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 4$ με τις ευθείες:
α) x = 1 β) x = 2 γ) x = 3

16. ***** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 9$ με τις ευθείες
α) y = 2 β) y = 3 γ) y = 4

17. ***** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α (0, 2), Β (0, 8) και εφάπτεται με τον άξονα x΄x.

18. ****** Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ και η ευθεία ε: $3x + 4y + 11 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου C.

β) Να βρείτε την απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε.

19. ****** Δίνονται τα σημεία Ο (0, 0), Β (2, 1) και η ευθεία ε: $4x - 3y - 5 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο μέσον του ΟΒ.

β) Αφού επαληθεύσετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ, που είναι κάθετη στην ευθεία ε στο σημείο Β.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Ο και Β και εφάπτεται της ευθείας ε.

20. ****** Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ και η ευθεία ε: $y = \alpha x + \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε, είναι εφαπτόμενη του κύκλου C, αν και μόνον αν $\beta^2 = 4 - 4\alpha\beta$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = \frac{3}{4}$.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων, οι οποίες άγονται από το σημείο Μ (0,1).

21. ****** Δίνεται ο κύκλος C: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

και η ευθεία ε: $\sqrt{5}\,y + 2x = 6 + 2\sqrt{5}$

α) Να δείξετε ότι η ε διέρχεται από το κέντρο του C.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε με τον κύκλο C.

22. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$ C_2: $(x - 4\sqrt{2})^2 + y^2 = 16$. Να δείξετε ότι η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων, είναι κοινή εφαπτομένη των C_1, C_2.

23. ****** Δίνονται ο κύκλος C: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ και η ευθεία ε: $y = x - 3$. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του συμμετρικού του C ως προς την ευθεία ε.

24. ****** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κορυφές Α (1, 4), Β (4, 4) Γ (4, 1) Δ (1, 1). Αφού σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο:

α) να γράψετε τις εξισώσεις αυτών των δύο κύκλων, και

β) να βρείτε την μικρότερη απόσταση του άξονα y΄y από τον περιγεγραμμένο κύκλο.

25. ****** Σε κυκλικό ρολόι, όταν ο ωροδείκτης δείχνει το 12, η προέκτασή του τέμνει τον κύκλο του ρολογιού στο σημείο (3, 4) (σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων). Το κέντρο του ρολογιού αντιστοιχεί στο σημείο (1, 2).

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του ρολογιού.

β) Να βρείτε τα σημεία που θα τέμνει, η προέκταση του ωροδείκτη, τον κύκλο του ρολογιού, όταν δείχνει το 3 και όταν δείχνει το 9.

26. ****** Δίνονται τα σημεία Α (3, 6), Β (8, 6), Γ (9, 1), Δ (2, 1).

α) Να δείξετε ότι τα Α,Β,Γ,Δ είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΜΝ αυτού.

γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το μέσο Ο της ΜΝ και ακτίνα ΟΝ.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία αυτού του κύκλου και της ΔΓ.

27. ***** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Κ (2, 2) και εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y - 1 = 0$.

28. ***** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την τομή των ευθειών $x = 5$ και $y = 4$ και εφάπτεται του άξονα x΄x.

29. ***** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $y = 3$ και $y = -5$ και του άξονα y΄y.

30. ****** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο Α (3, - 4).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τον κύκλο.

γ) Να βρείτε τα σημεία του κύκλου με την μικρότερη και μεγαλύτερη απόσταση από το Α

δ) Προσδιορίστε τα σημεία της ευθείας που είναι εσωτερικά του κύκλου.

ε) Προσδιορίστε τα σημεία της ευθείας που είναι εξωτερικά του κύκλου.

31. ***** Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ με τους άξονες.

32. ***** Να βρείτε το $\lambda \in R$, ώστε η ευθεία $y = x + \lambda$ να εφάπτεται του κύκλου $x^2 + (y - 1)^2 = 5$.

33. ****** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $x + 2y + 1 = 0$, και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 1$.

34. ****** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου

β) Να δείξετε ότι το σημείο Α (3, 2) ανήκει σ' αυτόν τον κύκλο.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Α.

35. ****** Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$$

παριστάνουν κύκλους και στη συνέχεια να βρείτε:

α) Το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

β) Την απόσταση των κέντρων τους. Τι παρατηρείτε;

γ) Την εξίσωση της διακέντρου των κύκλων.

36. ***** Να εξετάσετε την θέση των κύκλων με εξισώσεις:
C_1: $x^2 + y^2 = 20$ και C_2: $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0$

37. ***** Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 - 4y = 0$ τέμνονται.

38. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$.

Να βρείτε:

α) Το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

β) Τα κοινά σημεία τους Α, Β.

γ) Το μήκος της κοινής χορδής ΑΒ.

39. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$$C_2: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται.

β) Να εξετάσετε αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά.

40. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
C_2: $(x - 2 - 3\sqrt{2}\,)^2 + y^2 = 9$

α) Να βρεθούν τα κοινά σημεία τους Α, Β.

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ΚΑ και ΛΑ είναι κάθετες, όπου Κ, Λ τα κέντρα των δύο κύκλων και το Α ανήκει στην πρώτη γωνία των αξόνων.

41. ****** Δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

C_2: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

α) Να εξετάσετε αν έχουν κοινά σημεία.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που εφάπτονται με τον κύκλο C_2, και είναι παράλληλες με τον άξονα x΄x.

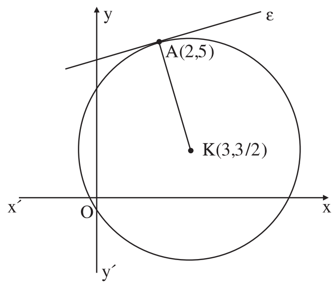
γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές οι ευθείες τέμνουν τον κύκλο C_1.

2. ****** Στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

α) το συντελεστή διεύθυνσης της ακτίνας ΚΑ

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε

γ) τις εξισώσεις των ευθειών ΚΑ και ε.



43. ******* α) Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και

C_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$

Να αποδείξετε ότι αν οι κύκλοι τέμνονται η εξίσωση της κοινής χορδής είναι: $(A_1 - A_2)\, x + (B_1 - B_2)\, y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$

β) Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ και

C_2: $x^2 + y^2 + 2x + y - 2 = 0$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία τομής τους είναι η $4x + 3y - 3 = 0$ και ότι είναι κάθετη στη διάκεντρο των κύκλων.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η παραβολή C: $y = \frac{1}{8}x^2$, έχει εστία Ε (0, 2) και διευθετούσα y = - 2. **Σ** **Λ**

2. * Η ευθεία y = x είναι εφαπτόμενη της παραβολής C: $x = \frac{1}{4}y^2$. **Σ** **Λ**

3. * Αν η διευθετούσα μιας παραβολής είναι κατακόρυφη, τότε η εστία της βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x, ή σε ευθεία παράλληλη στον x΄x. **Σ** **Λ**

4. * Η καμπύλη $y = αx^2 + βx + γ$, με $α \neq 0$ είναι παραβολή με διευθετούσα οριζόντια. **Σ** **Λ**

5. * Η παραβολή C: $y = \frac{1}{4}x^2$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

6. * Στην παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, αν το p είναι θετικό, τότε και το x είναι θετικό. **Σ** **Λ**

7. * Αν το σημείο (1, - 2) ανήκει στην παραβολή C: $x = \frac{1}{2p}y^2$, τότε και το (1, 2) ανήκει στην ίδια παραβολή. **Σ** **Λ**

8. * Αν η παραβολή C: $y = \frac{1}{2p}x^2$ περνά από το σημείο (2, 3), τότε έχει διευθετούσα $y = -\frac{1}{3}$. **Σ** **Λ**

9. ***** Η παραβολή που έχει κορυφή το σημείο Ο (0, 0) και διευθετούσα $x = -\frac{1}{36}$, έχει εξίσωση την $y^2 = \frac{1}{18}x$. **Σ** **Λ**

0. ***** Η κορυφή παραβολής ισαπέχει από την εστία και την διευθετούσα αυτής. **Σ** **Λ**

1. ***** Αν Μ σημείο της παραβολής C: $y = \frac{1}{2p}x^2$, τότε το Μ ισαπέχει από την εστία Ε της παραβολής και από τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

2. ***** Η παραβολή C: $y - y_0 = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2$ έχει εστία το σημείο $E\left(x_0, \frac{p}{2} + y_0\right)$. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Η παραβολή C: $y^2 = 18x$, έχει εστία το σημείο

Α. $E\left(0, \frac{9}{4}\right)$ **Β.** $E\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ **Γ.** $E\left(\frac{9}{3}, 0\right)$ **Δ.** Ε (9, 0) **Ε.** Ε (0, 9)

2. ***** Η παραβολή C: $x^2 = y$ έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση

Α. $y = 8$ **Β.** $x = \frac{1}{4}$ **Γ.** $y = -\frac{1}{4}$ **Δ.** $x = -\frac{1}{4}$ **Ε.** $y = \frac{1}{4}$

3. * Η παραβολή C: $y-2=\frac{1}{2p}\left(x+\frac{7}{2}\right)^2$ έχει κορυφή το σημείο

Α. $K\left(\frac{7}{2},-2\right)$ **Β.** $K\left(-\frac{7}{2},2\right)$ **Γ.** K (-7, 2)

Δ. K (14, 2) **Ε.** $K\left(-2,\frac{7}{2}\right)$

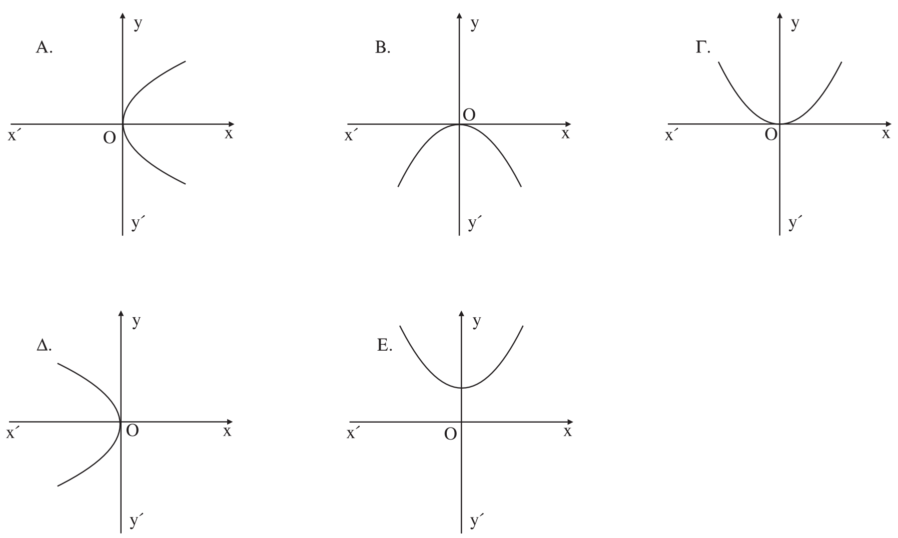
4. * Η εφαπτόμενη της παραβολής C: $x^2=\frac{1}{3}y$ στο σημείο που έχει τετμημένη

x = 3, έχει εξίσωση

Α. 3y + x = 27 **Β.** x + y - 2 = 0 **Γ.** 2x + 18y - 27 = 0

Δ. y - 18x + 27 = 0 **Ε.** καμία από αυτές

5. * Η παραβολή C: x^2 = y αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη



Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Να συμπληρωθεί η Β στήλη, αν η κορυφή της παραβολής είναι το Ο (0, 0).

Α στήλη **συμμετρία, p**	**Β στήλη** **εξίσωση παραβολής**
1. Άξονα συμμετρίας τον y΄y , p = 8	
2. Άξονα συμμετρίας τον x΄x , p = 8	
3. Άξονα συμμετρίας τον y΄y, p = - 7	
4. Άξονα συμμετρίας τον x΄x , p = 7	

2. ***** Να συμπληρωθούν οι στήλες Β και Γ.

Α στήλη **εξίσωση παραβολής**	**Β στήλη** **εξίσωση διευθετούσας**	**Γ στήλη** **εστία**
$y^2 = 4x$		
$y^2 = -5x$		
$x^2 = 14y$		
$x^2 = y$		
$x = y^2$		

3. * Να συμπληρωθεί η στήλη Β.

Α στήλη **εστία Ε, εξίσωση διευθετούσας**	**Β στήλη** **εξίσωση παραβολής**
Ε (0, 4), δ: y + 4 = 0	
Ε (-6, 0), δ: x - 6 = 0	
Ε (2, 0), δ: x + 2 = 0	
Ε (0,-3), δ: y - 3 = 0	

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να γίνει αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων της Α με τα στοιχεία της στήλης Β και να συμπληρωθεί ο πίνακας Ι.

Α στήλη **εξίσωση παραβολής**	**Β στήλη** **εστία**
1. $x = \frac{1}{3}y^2$	**α.** Ε $(0, -4)$
2. $y = -\frac{1}{16}x^2$	**β.** Ε $\left(0, \frac{5}{4}\right)$
3. $x = -\frac{1}{8}y^2$	**γ.** Ε $(-2, 0)$
4. $y = \frac{1}{5}x^2$	**δ.** Ε $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$
	ε. Ε $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

Ι.

1	**2**	**3**	**4**

2. * Να γίνει αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων της στήλης Α και της στήλης Β και να συμπληρωθεί ο πίνακας Ι.

Α στήλη **εξίσωση παραβολής**	**Β στήλη** **διευθετούσα**
1. $y-3=\frac{1}{8}(x-2)^2$	**α.** $y = 11$
	β. $y = -11$
2. $x+5=\frac{1}{4}(y-1)^2$	**γ.** $y = 1$
3. $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}(x+2)^2$	**δ.** $x = -6$
	ε. $y = 3$
4. $y+7=\frac{1}{16}(x-3)^2$	**ζ.** $y = -3$

Ι.

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνονται οι παραβολές C_1: $y=\frac{1}{2}x^2$, C_2: $x=\frac{1}{2}y^2$ και C_3: $y=-\frac{1}{2}x^2$ με κοινή κορυφή Ο (0, 0). Αν Α είναι το σημείο τομής των C_1, C_2 και Β των C_2, C_3:

α) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α, Β

β) να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στον άξονα x΄x.

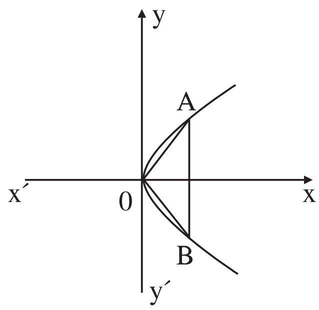
2. ** Δίνεται η παραβολή C: $y=\frac{1}{4}x^2$ και το σημείο της Μ (2, 1). Αν Κ είναι η προβολή του Μ στην διευθέτουσα:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Κ, όπου Ε η εστία της παραβολής,

β) να βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας ΕΚ και της μεσοκαθέτου αυτής,

γ) να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της ΕΚ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ (2, 1).

3. ** Έστω $x=\frac{1}{2p}y^2$ η εξίσωση της παραβολής του σχήματος και ΑΟΒ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $A\hat{O}B=90^o$.



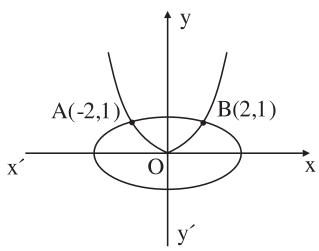
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΟΑ, ΟΒ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

δ) Να δείξετε ότι το ΑΒ τέμνει τον άξονα x΄x σε σταθερό σημείο.

4. * Η έλλειψη και η παραβολή του σχήματος έχουν κοινά σημεία Α (-2, 1) και Β (2, 1). Να βρείτε:

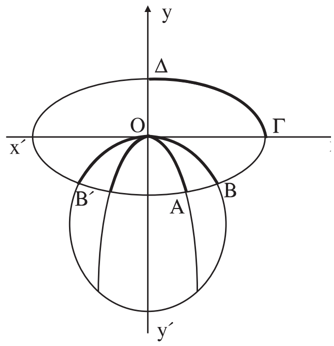


α) Την εξίσωση της παραβολής.

β) Την εξίσωση της έλλειψης, αν α = 2β.

γ) Την εκκεντρότητα της έλλειψης.

5. ** Δίνονται κύκλος, παραβολή και έλλειψη, με κοινά σημεία τα Α (1, -2) και Β (3, -1), όπως φαίνονται στο σχήμα. Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στον άξονα y΄y. Σε μια αυτοκινητοβιομηχανία, στο τμήμα σχεδιασμού αμαξωμάτων, θέλουν να αντικαταστήσουν τις καμπύλες της μορφής ΟΒ με αυτές των ΔΓ και ΟΑ.

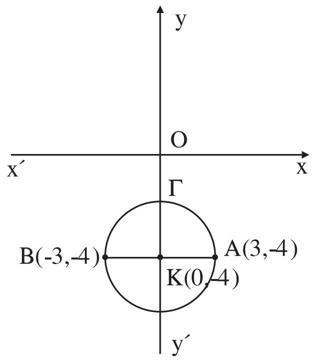


α) Να γραφεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το ΟΒ.

β) Να γραφεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το ΟΑ.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το ΔΓ.

6. ****** Η κάθετη τομή του θόλου ενός πλανηταρίου είναι ημικύκλιο ΒΓΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο θόλος πρόκειται να αντικατασταθεί με άλλον του οποίου η αντίστοιχη διατομή να δίνει παραβολικό σχήμα με κορυφή Ο (0, 0) το οποίο είναι πιο ανθεκτικό σε φορτία, για παράδειγμα χιονιού κ.τ.λ. Να εξετάσετε αν η κατασκευή του καινούργιου τρούλου καλύπτει από πάνω την παλιά.



Υπόδειξη: Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που περνά από τα σημεία Α (3, -4), Β (-3, -4), και έχει κορυφή την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια να εξετάσετε ως προς τα κοινά σημεία τον κύκλο και την παραβολή.

7. ******* Έστω παραβολή συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x που περνά από τα σημεία Α (0, 8), Β (0, - 8). Αυτή η καμπύλη ορίζει στον ημιάξονα Οx τμήμα 8 μονάδων. Να γράψετε την εξίσωση της καμπύλης.

ΕΛΛΕΙΨΗ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. ***** Η εξίσωση $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ παριστάνει έλλειψη με εστίες Ε΄ (- γ, 0), Ε (γ, 0) και σταθερό άθροισμα 2α. **Σ** **Λ**

2. ***** Η εξίσωση $\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ παριστάνει έλλειψη με εστίες Ε΄ (0, - γ), Ε (0, γ) και σταθερό άθροισμα 2α. **Σ** **Λ**

3. ***** Τα σημεία $M(x, y)$ με x = βσυνθ, y = αημθ, θ ∈ [0, 2π), ανήκουν στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$. **Σ** **Λ**

4. ***** Η εκκεντρότητα της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma}$, όπου $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$. **Σ** **Λ**

5. ***** Η εκκεντρότητα της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\beta}$. **Σ** **Λ**

6. ***** Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α΄ (- α, 0), Α (α, 0) και τον άξονα y΄y στα σημεία Β΄ (0, - β), Β (0, β). **Σ** **Λ**

7. * Η έλλειψη με κέντρο Κ (x_0, y_0) και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον x΄x έχει εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1$ και α > β. **Σ** **Λ**

8. * Ο αριθμός ε = 1, 2 είναι εκκεντρότητα έλλειψης. **Σ** **Λ**

9. * Η εξίσωση $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ παριστάνει έλλειψη με εστίες σε άξονα παράλληλο των x΄x. **Σ** **Λ**

0. * Η ευθεία με εξίσωση x = - 2 είναι εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. **Σ** **Λ**

1. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ και η ευθεία x = 4 δεν έχουν κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

2. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ και η ευθεία y = 2 έχουν δύο διαφορετικά κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

3. * Οι ελλείψεις C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ και C_2: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{27}=1$ είναι όμοιες. **Σ** **Λ**

4. * Το κέντρο της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι το μέσον του τμήματος που ορίζουν οι εστίες. **Σ** **Λ**

5. * Μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινάει από τη μία εστία έλλειψης, ανακλώμενη σ' αυτήν, διέρχεται από την άλλη εστία. **Σ** **Λ**

6. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=\alpha$, $x=-\alpha$, $y=\beta$ και $y=-\beta$. **Σ** **Λ**

7. ** Αν Ε σταθερό σημείο του επιπέδου και Ε΄ το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x΄x, τότε τα σημεία Μ του επιπέδου, διαφορετικά των Ε, Ε΄, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{(ME)}+\frac{1}{(ME')}=\frac{2004}{(ME)(ME')}$ ανήκουν σε έλλειψη με εστίες Ε, Ε΄ και σταθερό άθροισμα 2004. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με εκκεντρότητα ε. Η ευθεία $x=\frac{3}{2}\alpha$

Α. είναι εφαπτόμενη της έλλειψης C

Β. είναι τέμνουσα της έλλειψης C

Γ. βρίσκεται εκτός της ελλείψεως

Δ. βρίσκεται σε απόσταση, από το κέντρο της έλλειψης, ίση με β

Ε. κανένα από τα παραπάνω

2. * Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1$ και $\alpha<\beta$ έχει μεγάλο άξονα

Α. παράλληλο προς τον άξονα x΄x

Β. πάνω στον άξονα x΄x

Γ. πάνω στον άξονα y΄y

Δ. παράλληλο προς τον άξονα y΄y

Ε. παράλληλο προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$

3. ***** Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ είναι όμοια με την

Α. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ **Β.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **Γ.** $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

Δ. $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ **Ε.** $x^2+\frac{y^2}{2}=1$

4. ***** Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα

Α. $\frac{\alpha}{\beta}$ **Β.** $\frac{\gamma}{\beta}$ **Γ.** $\frac{\alpha}{\beta}$ **Δ.** $\frac{\gamma}{\alpha}$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

5. ***** Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha > \beta$ έχει εστιακή απόσταση:

Α. $2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ **Β.** $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ **Γ.** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Δ. $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

6. ***** Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ με εκκεντρότητα ε έχει εστίες:

Α. Ε΄ (- α, 0), Ε (α, 0)

Β. Ε΄ (- αε, 0), Ε (αε, 0)

Γ. Ε΄ (- ε, 0), Ε (- ε, 0)

Δ. $E'\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon},0\right)$, $E\left(\frac{\alpha}{\varepsilon},0\right)$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

7. * Η ευθεία με εξίσωση y = 2 είναι εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{k^2}=1$,

k > 0 μόνο όταν:

Α. k = 3 **Β.** k = - 2 **Γ.** k = 2 **Δ.** k = 1 **Ε.** k = 9

8. ** Η ευθεία $y = x + 4$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$, k >0

όταν

Α. k = 2 **Β.** k = 4 **Γ.** $k=\sqrt{15}$ **Δ.** k = - 2

Ε. κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Σε κάθε έλλειψη της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τις εστίες της στην στήλη Β και να συμπληρώσετε τον πίνακα Ι.

Στήλη Α **Εξίσωση έλλειψης**	**Στήλη Β** **Εστίες**
1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$	**α.** $\left(-\sqrt{3}+1,0\right)$, $\left(\sqrt{3}+1,0)\right)$
2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	**β.** $\left(-\sqrt{5},0\right)$, $\left(\sqrt{5},0\right)$
3. $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$	**γ.** $\left(0,-\sqrt{5}\right)$, $\left(0,\sqrt{5}\right)$
4. $x^2+4y^2=4$	**δ.** $\left(-\sqrt{7},0\right)$, $\left(\sqrt{7},0\right)$
	ε. $\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$
	ζ. $\left(-\sqrt{3},0\right)$, $\left(\sqrt{3},0\right)$

Ι.

1	**2**	**3**	**4**

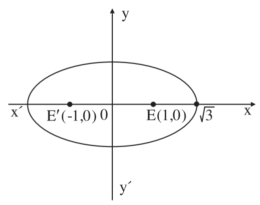
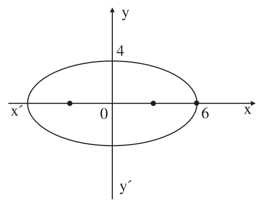
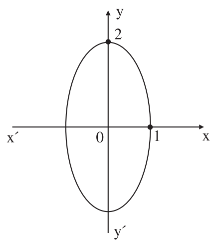
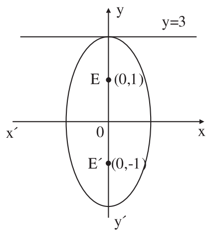
2. * Σε κάθε έλλειψη της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εκκεντρότητά της στη στήλη Β και να συμπληρώσετε τον πίνακα Ι.

Στήλη Α **Εξίσωση έλλειψης**	**Στήλη Β** **Εκκεντρότητα**
	α. $\frac{4}{5}$
1. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$	**β.** $\frac{3}{4}$
2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$	**γ.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$
3. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$	**δ.** $\sqrt{5}$
4. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$	**ε.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
	ζ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ι.

1	**2**	**3**	**4**

3. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α την εξίσωσή της στην στήλη Β συμπληρώνοντας τον πίνακα Ι.

Στήλη Α **Έλλειψη**	**Στήλη Β** **Εξίσωση έλλειψης**
1.  	**α.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$ **β.** $x^2+\frac{y^2}{4}=1$
2.  	**γ.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$
3.  	**δ.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$
4.  	**ε.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Ι.

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Εξίσωση έλλειψης	**Εστιακή απόσταση**	**Εκκεντρότητα**	**Εστίες**	**Μεγάλος άξονας**
1. $9x^2 + 4y^2 = 36$				
2. $4x^2 + y^2 = 4$				
3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$				

2. ****** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Εξίσωση έλλειψης	**Συντεταγμένες κορυφών**	**Εξισώσεις εφαπτομένων στις κορυφές**	**Εξισώσεις παραβολών με κορυφές τις εστίες της έλλειψης και εστίες τις κορυφές της έλλειψης**
1. $x^2 + 4y^2 = 4$			
2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: \frac{x^2}{9}+y^2=1,\ \ C_2: 5x^2+6y^2=30,\ \ C_3: 9x^2+4y^2=36$$

Να ορίσετε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών τους και να τις σχεδιάσετε.

β) τις συντεταγμένες των εστιών της, την εκκεντρότητα και τα μήκη των αξόνων.

2. * Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{20}+\frac{4^2}{15}=1$.

Να βρείτε τα σημεία της έλλειψης που απέχουν από τον μικρό άξονα 2 μονάδες.

3. * Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ (x, y) με x = 1 + 4 συνθ, y = 2 + 3ημθ, θ ∈ [0, 2π) ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4. * Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Να βρείτε τα κοινά σημεία της C με την ευθεία ε στις περιπτώσεις:

α) ε: x = 3 **β)** ε: x = 4 **γ)** ε: x = 2 **δ)** ε: y = 2 **ε)** y = 5

5. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία

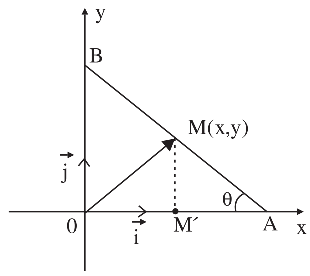
Κ (ασυνθ, βημθ), θ ∈ [0, 2π) και $\Lambda\left(\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \beta\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

είναι σημεία της έλλειψης C.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OK}$ και $\vec{O\Lambda}$ όταν θ ≠ π και θ ≠ $\frac{3\pi}{2}$ δεν είναι κάθετα.

6. ** Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ (5, 0) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση x + 2y = 5 εφάπτεται της έλλειψης C.

7. *** Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους ℓ κινείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα άκρα του Α,Β να κινούνται στους άξονες x΄x και y΄y αντιστοίχως. Έστω Μ (x, y) σημείο της ΑΒ με (ΑΜ) = α και (ΜΒ) = β. Αν η γωνία ΟΑΒ είναι ίση με θ rad,



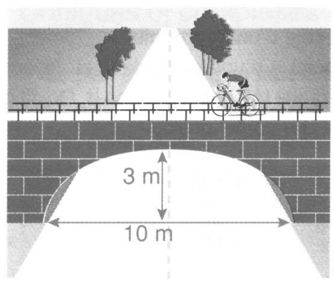
α) Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{OA}=\ell\text{συνθ}\,\vec{i}\,, \quad \vec{AM}=-\text{ασυνθ}\,\vec{i}+\text{αημθ}\,\vec{j}$$

β) Να βρείτε την διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του σημείου Μ.

γ) Να αποδείξετε ότι, όταν θ ∈ [0, 2π), το σημείο Μ (x, y) κινείται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

8. ** Το τόξο μιας γέφυρας πεζών που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ημιέλλειψη. Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 10m, το δε δυνατό ύψος της γέφυρας από το κέντρο του επιπέδου του κέντρου του δρόμου είναι 3m. Να βρείτε το ψηλότερο σημείο της γέφυρας, όταν τοποθετούμε ένα σημείο σε απόσταση 2m από το κέντρο του επιπέδου του δρόμου.



ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ παριστάνει υπερβολή. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ παριστάνει ισοσκελή υπερβολή. **Σ** **Λ**

3. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει κορυφές τα σημεία Α΄ (- α, 0) και Α (α, 0). **Σ** **Λ**

4. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

5. * Η εστιακή απόσταση της υπερβολής C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ είναι (Ε΄ Ε) = 10. **Σ** **Λ**

6. * Η εκκεντρότητα της υπερβολής C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ είναι $\varepsilon = \frac{5}{3}$. **Σ** **Λ**

7. * Η ευθεία x = 3 είναι εφαπτομένη της υπερβολής C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **Σ** **Λ**

8. * Η ευθεία $y = \frac{3}{4}x$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **Σ** **Λ**

9. * Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει κορυφές τα σημεία Α΄ (0, - α) και Α (0, α). **Σ** **Λ**

0. * Η εξίσωση $y = \frac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$ παριστάνει υπερβολή. **Σ** **Λ**

1. * Οι εφαπτόμενες μιας υπερβολής στις κορυφές της είναι παράλληλες ευθείες. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Έστω Ε΄ και Ε δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|ME' - ME| = 2\alpha > 0$ ονομάζεται

Α. παραβολή **Β.** κύκλος **Γ.** υπερβολή
Δ. έλλειψη **Ε.** μεσοκάθετος του Ε΄Ε

2. ** Οι εστίες Ε΄ και Ε μιας υπερβολής βρίσκονται πάνω στον άξονα x΄x ενός ορθοκανονικού συστήματος xOy και είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο Ο. Η υπερβολή διέρχεται από το $K\left(4, \sqrt{3}\right)$ και μια κορυφή της είναι το Α (-2, 0). Από τα παρακάτω σημεία δεν ανήκει στην υπερβολή το

Α. $\left(-4, \sqrt{3}\right)$ **Β.** $\left(4, -\sqrt{3}\right)$ **Γ.** (2, 3) **Δ.** $\left(-4, -\sqrt{3}\right)$ **Ε.** (2, 0)

3. * Η εστιακή απόσταση της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ είναι

Α. $\sqrt{5}$ **Β.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **Γ.** $2\sqrt{5}$ **Δ.** 5 **Ε.** 25

4. * Η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής είναι

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** $\sqrt{2}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. ** Η ευθεία y = λx τέμνει την υπερβολή C: $x^2 - y^2 = 1$ αν

Α. λ = 1 **Β.** λ = - 1 **Γ.** λ < 1 **Δ.** λ > 1 **Ε.** - 1 < λ < 1

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	**α**	**β**	**γ**	**συν/νες εστιών Ε΄**	**Ε**	**εστιακή απόσταση Ε΄Ε**	**εκκεντρό - τητα**	**συν/νες κορυφών**	
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$									
$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$									

Ερώτηση αντιστοίχισης

1. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλη Α την εκκεντρότητά της στη στήλη Β συμπληρώνοντας τον πίνακα Ι.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	**α.** $\frac{\sqrt{17}}{4}$
	β. $\frac{\sqrt{17}}{3}$
2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	**γ.** $\frac{5}{3}$
	δ. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
3. $\frac{y^2}{16}-x^2=1$	**ε.** $\frac{3}{5}$

Ι

1	**2**	**3**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E'\left(-\sqrt{5},\ 0\right)$, $E\left(\sqrt{5},\ 0\right)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

2. * Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες στον άξονα x΄x και διέρχεται από τα σημεία Κ (3, 1) και Λ (9, 5).

3. * Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, αν η απόσταση των κορυφών της είναι (Α΄Α) = 8 και οι εστίες της είναι Ε΄ (- 5, 0) και Ε (5, 0).

4. * Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες πάνω στον άξονα y΄y αν η εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 24 και η απόσταση των κορυφών της (Α΄Α) = 12.

5. ** Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $x^2 - y^2 = 8$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο (3, - 1).

6. ** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy δίνεται το σημείο $M\left(\dfrac{\alpha}{\text{συνθ}},\ \beta\text{εφθ}\right)$, α, β > 0, $\theta \in [0, 2\pi)$ με $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ και $\theta \neq \dfrac{3\pi}{2}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα θέσης του σημείου Μ.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται σε υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.

7. ** Δίνεται η υπερβολή C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, της οποίας οι ασύμπτωτες είναι κάθετες.

α) Να βρείτε την εκκεντρότητα.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της (3, 1).

8. ******* Δυο αυτοκίνητα είναι σταματημένα σε δύο σημεία Α, Β ενός αυτοκινητόδρομου με (ΑΒ) = 2000 m. Ένα τζιπ κινείται σε χωματόδρομο παράλληλο προς τον αυτοκινητόδρομο και σε απόσταση 1000 m από αυτόν. Ο οδηγός του τζιπ, λόγω χιονοθύελλας, χάνει την οπτική επαφή με τα δύο αυτοκίνητα, οπότε κορνάρει και ο οδηγός στη θέση Β ακούει τον ήχο 4 sec αργότερα από τον οδηγό στη θέση Α. Να πάρετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του ΑΒ και άξονα x΄x την ευθεία ΑΒ και να προσδιορίσετε τη θέση του τζιπ.

Δίνονται: η ταχύτητα του ήχου στον αέρα (330 m/s) και
διάστημα = (ταχύτητα) x (χρόνος)

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ

ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Τεχνολογική κατεύθυνση
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. α) Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου. (1 μονάδα)

β) Αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. (3 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου μπορεί να γραφεί στην μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, Α, Β, Γ $\in$ R. (1 μονάδα)

Β. Δίνονται τα σημεία Α (-1, 10) και Β (7, -2).

α) Να υπολογίσετε την απόσταση (ΑΒ). (2 μονάδες)

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Α (-1, 10) και ακτίνα ρ = (ΑΒ). (1 μονάδα)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (2 μονάδες)

Θέμα 2ο

α) Η εξίσωση $(\lambda-1)x^2+y^2-2\lambda x+4y+3xy+\lambda^2=25$ παριστάνει κύκλο αν ο λ ισούται με

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** -1 **Δ.** 2 **Ε.** δεν υπάρχει $\lambda\in$ R

(1 μονάδα)

β) Το κέντρο του κύκλου $(-x+2)^2+(-3-y)^2=25$ είναι το

Α. (2,-3) **Β.** (-2,3) **Γ.** (-2,-3) **Δ.** (2,3)

Ε. Κανένα από τα παραπάνω

(1 μονάδα)

γ) Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α (-1, 2), Β (5, 6), Γ (3, 2), Δ (4, 7) και Ε (-5, 2). Βάλτε σε έναν κύκλο την τριάδα των σημείων που δεν ορίζουν κύκλο.

Α. (Α, Β, Δ) **Β.** (Α, Γ, Β) **Γ.** (Α, Γ, Ε) **Δ.** (Ε, Δ, Β) **Ε.** (Γ, Δ, Β)

(2 μονάδες)

δ) Δίνεται ο κύκλος C: $(x-3)^2+(y-2)^2=1$. Μια εφαπτομένη του κύκλου είναι η ευθεία με εξίσωση

Α. x = -4 **Β.** x = 4 **Γ.** y = 4 **Δ.** y = -4 **Ε.** y = x

(1 μονάδα)

ε) Κύκλος έχει κέντρο Κ (x_0, y_0) και μεταβλητή ακτίνα ρ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη σχέση που ικανοποιεί η ακτίνα ρ ώστε

i) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x΄x...

ii) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα y΄y...

iii) Ο κύκλος εφάπτεται και στους δύο άξονες...

iv) Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων...

v) Ο κύκλος τέμνει τους άξονες σε τέσσερα σημεία.....................................

(5 μονάδες)

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Τεχνολογική Κατεύθυνση
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Δίνονται οι κύκλοι

C_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, C_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

Ποιες είναι οι περιπτώσεις που μπορεί να εμφανιστούν ως προς τις θέσεις των δύο κύκλων; Να γίνουν σχήματα. (4 μονάδες)

Β. Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 1$. (6 μονάδες)

Θέμα 2ο

Α. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου C: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x + y + 1 = 0$. (5 μονάδες)

Β. α) Η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου C: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $x + y + 1 = 0$, είναι η

Α. $2x + y - 1 = 0$ **Β.** $x = y$ **Γ.** $x = -y$
Δ. $y + x - 2 = 0$ **Ε.** $-y + 2x = 0$

β) Ο κύκλος C με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, τέμνει τους άξονες σε 4 σημεία, αν

Α. $\alpha < R$ και $\beta > R$ **Β.** μόνο $\beta < R$ **Γ.** μόνο $\alpha > R$
Δ. μόνο $\beta > R$ **Ε.** $\alpha < R$ και $\beta < R$

γ) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y - \lambda)^2 = 4$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία αν

Α. $\lambda \in R$ **Β.** μόνο για $\lambda > 2$ **Γ.** μόνο για $\lambda < -2$
Δ. $-2 < \lambda < 2$ **Ε.** $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$

δ) Δίνεται κύκλος κέντρου Κ (-4, 1) και το σημείο του Α (-3, 4). Οι συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού του Α είναι

Α. (5, 6) **Β.** (- 5, - 2) **Γ.** (5, - 6) **Δ.** (- 5, - 6) **Ε.** (5, 10)

ε) Η ευθεία $y = \lambda x + 4$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 8$. Το λ μπορεί να είναι ίσο με

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** - 1 **Ε.** 4

(5 μονάδες)

3ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στην Τεχνολογική Κατεύθυνση
(διάρκεια: 1 ώρα)

Θέμα 1ο

Α. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής και να βρείτε την εξίσωσή της με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο (0, 0), εστία Ε $(0, \frac{p}{2})$ και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{p}{2}$. (6 μονάδες)

Β. Αν η παραβολή C: $y = \frac{1}{2p}x^2$ περνά από το σημείο (2, 3), να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας της C, καθώς και την εστία της. (4 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνονται οι παραβολές C_1: $y = \frac{1}{2}x^2$, C_2: $x = \frac{1}{2}y^2$, C_3: $y = -\frac{1}{2}x^2$. Έστω Α το κοινό σημείο της πρώτης και της δεύτερης παραβολής και Β το κοινό σημείο της δεύτερης και της τρίτης παραβολής. Τα σημεία Α, Β είναι διαφορετικά της κοινής κορυφής Ο (0, 0).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β. (6 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στον άξονα x΄x. (4 μονάδες)

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Τεχνολογική κατεύθυνση
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. Αν σ_α είναι η ακρίβεια της προσέγγισης $x \cong \alpha$ και σ_β η ακρίβεια της προσέγγισης $y \cong \beta$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι η ακρίβεια της προσέγγισης του x - y από τη διαφορά α - β δίνεται από τον τύπο $\sigma_{\alpha-\beta}=\sigma_\alpha+\sigma_\beta$. (7 μονάδες)

β) Να βρείτε τον τύπο που εκφράζει το άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος της προσέγγισης του x - y από το α - β συναρτήσει των α, β, σ_α, σ_β. (5,5 μονάδες)

Β. Κατά τη μέτρηση ενός μεγέθους πήραμε

$x = 10{,}002 \pm 0{,}001$ και $y = 9{,}998 \pm 0{,}001$.

α) Να βρείτε προσεγγιστική τιμή για το x - y. (3,5 μονάδες)

β) Να βρείτε ένα άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος. (4,5 μονάδες)

γ) Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα για το άνω φράγμα. (4,5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και διαμέτρου ΑΒ. Τα διανύσματα θέσης των Κ και Α είναι $\vec{OK} = -3\vec{i}+3\vec{j}$ και $\vec{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$ αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) Το διάνυσμα θέσης του σημείου Β. (2 μονάδες)

β) Το μήκος της ακτίνας του κύκλου. (2 μονάδες)

γ) Την εξίσωση του κύκλου. (2 μονάδες)

δ) Το διάνυσμα $\vec{KM}$ όπου Μ (x, y) τυχαίο σημείο του κύκλου. (2 μονάδες)

ε) Το συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{KM}$ όταν $\vec{KM}\perp\vec{AB}$. (2,5 μονάδες)

ζ) Την διανυσματική εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Α. (2 μονάδες)

Θέμα 3ο

Α. Δίνονται τα σημεία Α (-1, 2), Β (3, 4) και Γ (λ, λ + 5), $\lambda \in R$. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις συνοδεύεται από πέντε απαντήσεις. Από αυτές μια είναι σωστή. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό κάθε ερώτησης και δίπλα ακριβώς το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Το $\vec{\text{ΑΓ}} \perp \vec{\text{ΑΒ}}$ όταν ο λ ισούται με:

Α. 0 **Β.** -3 **Γ.** -5/3 **Δ.** -1 **Ε.** 4

(3 μονάδες)

2. Το $\vec{\text{ΑΓ}}$ αντίθετο του $\vec{\text{ΑΒ}}$ όταν ο λ ισούται με:

Α. 5 **Β.** -5 **Γ.** -1 **Δ.** 0 **Ε.** 1

(3 μονάδες)

3. Το $|\vec{\text{ΑΓ}}|=|\vec{\text{ΒΓ}}|$ όταν ο λ ισούται με:

Α. -1 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 0 **Δ.** 3 **Ε.** $-\frac{3}{4}$

(3,5 μονάδες)

4. Το $\vec{\text{ΑΓ}}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\text{ΑΒ}}$ όταν ο λ ισούται με:

Α. 0 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** $\frac{1}{2}$ **Ε.** κανένα $\lambda \in R$

(3 μονάδες)

Β. Αν στα σημεία Α, Β, Γ τοποθετηθούν βάρη 1, 2, 1 αντίστοιχα να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ να είναι το σημείο $G\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right)$. (12,5 μονάδες)

Θέμα 4ο

Ο λογαριασμός ενός συνδρομητή κινητής τηλεφωνίας τον Νοέμβριο ήταν 14.360 δρχ. Τον Οκτώβριο είχε πληρώσει 2.154 δρχ. περισσότερα.

Α. Να βρείτε:

α) Πόσα είχε πληρώσει τον Οκτώβριο. (4 μονάδες)

β) Το δείκτη εξέλιξης του λογαριασμού του Οκτωβρίου. (4 μονάδες)

γ) Το ποσοστό αύξησης του λογαριασμού. (4,5 μονάδες)

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό κάθε ερώτησης και να σημειώσετε δίπλα από κάθε αριθμό το γράμμα της σωστής απάντησης.

Αν τον Οκτώβριο είχε πληρώσει 2154 δρχ. λιγότερα, τότε

1. Ο δείκτης εξέλιξης του λογαριασμού είναι:

Α. -0,15 **Β.** 0,80 **Γ.** 0,85 **Δ.** 1,15 **Ε.** 0,15

(6 μονάδες)

2. Το ποσοστό μείωσης του λογαριασμού είναι

Α. 20% **Β.** 15% **Γ.** 10% **Δ.** 1,15% **Ε.** 30%

(6,5 μονάδες)

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Τεχνολογική κατεύθυνση
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. α) Να δώσετε τους ορισμούς των εννοιών: Απόλυτο σφάλμα Δ της προσέγγισης $x \cong \alpha$, Σχετικό σφάλμα δ της προσέγγισης $x \cong \alpha$, $\alpha \neq 0$. (6 μονάδες)

β) Αν σ_α είναι η ακρίβεια της προσέγγισης $x \cong \alpha$ και σ_β η ακρίβεια της προσέγγισης $y \cong \beta$, να δείξετε ότι η ακρίβεια της προσέγγισης του $x + y$ από το άθροισμα $\alpha + \beta$ δίνεται από τον τύπο: $\sigma_{\alpha+\beta} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta$. (6,5 μονάδες)

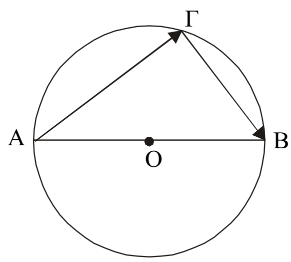
Β. Έστω οι προσεγγίσεις $x = 7{,}2 \pm 0{,}1$ και $y = 4{,}25 \pm 0{,}01$.

α) Να υπολογίσετε την προσέγγιση της παράστασης $x + y$. (6 μονάδες)

β) Να βρείτε ένα άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος της προσέγγισης αυτής. (6,5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Α. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ.



α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{\Gamma B}$ ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων θέσης από το Ο. (6,5 μονάδες)

β) Να βρείτε το γινόμενο $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{\Gamma B}$. Ποια πρόταση της γεωμετρίας σας θυμίζει; (6 μονάδες)

Β. Έστω G_1 το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ, στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη και G_2 το βαρύκεντρο τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ στις κορυφές του οποίου έχουν πάλι τοποθετηθεί ίσα βάρη. Αν G είναι το βαρύκεντρο των σημείων Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄, να δείξετε ότι τα σημεία G_1, G_2, G είναι συνευθειακά. (12,5 μονάδες)

Θέμα 3ο

Α. α) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία Α (3, - 1) και Β (- 1, - 1). (6 μονάδες)

β) Δείξτε ότι το σημείο Ρ με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = t\,\vec{i} + (2t - 1)\,\vec{j}$, $t \in R$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x - y = 1$. (6,5 μονάδες)

Β. Δίνεται ο κύκλος C: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ και η ευθεία ε: $y = x - 3$. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του συμμετρικού του C ως προς την ε.

(12,5 μονάδες)

Θέμα 4ο

Δίνεται η παραβολή C: $y = \frac{1}{4}x^2$ και σημείο Μ (2, 1) αυτής. Έστω Κ η προβολή του Μ στη διευθετούσα της παραβολής. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των σημείων Ε, Κ όπου Ε η εστία της παραβολής,

(8 μονάδες)

β) τις εξισώσεις των ευθειών ΕΚ και της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΕΚ. (7 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΕΚ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ (2, 1). (10 μονάδες)

3ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στις Κωνικές Τομές
(διάρκεια: 3 ώρες)

Θέμα 1ο

Α. α) Να δώσετε τον ορισμό της εκκεντρότητας της έλλειψης και να βρείτε τη σχέση που τη συνδέει με τους άξονες της έλλειψης. (8 μονάδες)

β) Ποιες ελλείψεις λέγονται όμοιες; (4,5 μονάδες)

Β. α) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ (3συνφ, - 2ημφ) $\varphi \in [0, 2\pi)$ ανήκει στην έλλειψη C: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. (5 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι οι ελλείψεις C_1: $9x^2 + y^2 = 9$ και C_2: $x^2 + 9y^2 = 9$ τέμνονται σε δύο σημεία από τα οποία περνά ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = \frac{9}{5}$.

(7,5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Α. α) Για την υπερβολή C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ισχύει

Α. τέμνει τον άξονα y΄y

Β. τέμνει την ευθεία y = x

Γ. τέμνει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$

Δ. τέμνει τον άξονα x΄x

Ε. κανένα από τα προηγούμενα (6 μονάδες)

β) Αν σε μια υπερβολή ισχύει α = β, τότε η εκκεντρότητά της είναι

Α. 0 **Β.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Γ.** $2\sqrt{2}$ **Δ.** αβ **Ε.** $\sqrt{2}$

(6,5 μονάδες)

Β. α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C: $x^2 - y^2 = 1$, η οποία περνά από το Μ (0, 1). (6,5 μονάδες)

β) Να εξετάσετε αν η έλλειψη C_1: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ και η υπερβολή C_2: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. (6 μονάδες)

Θέμα 3ο

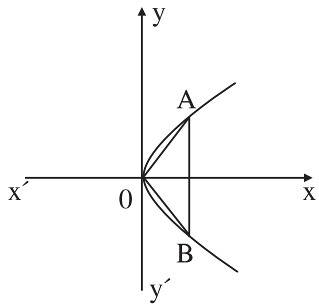
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κορυφές Α (1, 4), Β (4, 4), Γ (4, 1), Δ (1, 1). Αφού σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο, να βρείτε:

α) τις εξισώσεις αυτών των κύκλων, (13 μονάδες)

β) τη μικρότερη απόσταση του άξονα y΄y από τον περιγεγραμμένο κύκλο. (12 μονάδες)

Θέμα 4ο

Έστω $x = \frac{1}{2p}y^2$ η εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος και ΑΟΒ ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με γωνία ΑΟΒ = 90°.



Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των ευθειών ΟΑ, ΟΒ (7 μονάδες)

β) τις συντεταγμένες των Α, Β (6 μονάδες)

γ) την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. (5 μονάδες)

δ) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα x΄x σε σταθερό σημείο. (7 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΚΥΚΛΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1. Λ	**2. Λ**	**3. Λ**	**4. Λ**	**5. Σ**
6. Σ	**7. Λ**	**8. Σ**	**9. Λ**	**10. Σ**
11. Σ	**12. Σ**	**13. Σ**	**14. Σ**	**15. Σ**
16. Σ	**17. Σ**	**18. Σ**	**19. Σ**	**20. Σ**
21. Σ	**22. Σ**	**23. Σ**	**24. Σ**	**25. Σ**
26. Σ	**27. Σ**	**28. Σ**	**29. Σ**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	**2. Γ**	**3. Α**	**4. Δ**
5. Ε	**6. Δ**	**7. Γ**	**8. Β**
9. Δ	**10. Γ**	**11. Γ**	**12. Γ**
13. Δ	**14. Δ**	**15. Δ**	**16. Α**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	2	3	4
Γ	Ε	Β	Α

2.

1	2	3	4
Β	Ε	Δ	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

2. $\lambda < 18$

3. C_1: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ C_2: $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

4. C_1: $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 80$ C_2: $(x + 8)^2 + (y + 4)^2 = 80$

5. α) $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$

β) διέρχεται από τα Β, Γ

6. 3 ή - 3

7. $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 53$

8. $(x - \frac{\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\beta}{2})^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$

9. $x^2 + y^2 = 1$

10. 8 μον.

11. $\sqrt{10}$

12. α) $\rho = |\lambda|$ β) $\rho = |\kappa|$ γ) $\kappa^2 + \lambda^2 = \rho^2$

13. δεν εφάπτονται

14. $- 2x + y = 10$

15. α) δύο β) ένα γ) κανένα

16. α) δύο β) ένα γ) κανένα

17. $C_1: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$ $C_2: (x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

18. β) 4 μον.

19. α) $y = -2x + \frac{5}{2}$ β) $3x + 4y - 10 = 0$ γ) $x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$

20. β) $y = \frac{3}{4}x - 4$, $y = \frac{3}{4}x + 1$

γ) $y = \frac{3}{4}x + 1$, $x = 0$

21. β) $(3 + \sqrt{5}, 0)$ $(3 - \sqrt{5}, 4)$

22. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_1, C_2 με την $y = x$.

23. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$

24. α) $C_1: (x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{2}$

$C_2: (x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{4}$

β) $\frac{5 - 3\sqrt{2}}{2}$

25. α) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

β) $(+3, 0)$ και $(-1, 4)$

26. β) 6 γ) $(x - \frac{11}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 9$ δ) $(\frac{11-\sqrt{11}}{2}, 1)$, $(\frac{11+\sqrt{11}}{2}, 1)$

27. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{2}$

28. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$

29. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

30. α) $y = -\frac{4}{3}x$ β) $\Gamma(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$, $\Delta(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$

δ) $y = -\frac{4}{3}x$, με $-\frac{6}{5} < x < \frac{8}{5}$ ε) $y = -\frac{4}{3}x$ με $x < -\frac{6}{5}$ ή $x > \frac{6}{5}$

32. $\lambda = \sqrt{10} + 1$ ή $\lambda = 1 - \sqrt{10}$

33. $(x + \frac{3}{10})^2 + (y - \frac{4}{10})^2 = \frac{605}{25}$

34. α) Κ (- 1, 5), ρ = 5 γ) $4x - 3y = 6$

35. β) 5 γ) $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

36. τέμνονται στα (4, 2), (2, 4).

38. β) (0, 0), $(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ γ) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

39. α) (3, 1) κοινό σημείο β) διάκεντρος = $\frac{1}{2}$

40. α) $\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

β) $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{\Lambda A} = 0$

41. α) δεν έχουν κοινά σημεία

β) $y = -1$, $y = -3$

γ) (6, - 3), (- 2, -3) ή $(2 - 2\sqrt{3}, -1)$, $(2 + 2\sqrt{3}, -1)$

42. α) $-\frac{7}{2}$ β) $\frac{2}{7}$ γ) $7x + 2y - 24 = 0$, $2x - 7y + 31 = 0$

43. Αν $\Gamma(x_1, y_1)$, $\Delta(x_2, y_2)$ είναι τα κοινά σημεία, τότε ισχύει:

$x_1^2 + y_1^2 + A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0$, $x_2^2 + y_2^2 + A_2x_2 + B_2y_2 + \Gamma_2 = 0$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ………………

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Σ	**2. Λ**	**3. Σ**	**4. Σ**
5. Λ	**6. Σ**	**7. Σ**	**8. Σ**
9. Λ	**10. Σ**	**11. Λ**	**12. Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	**2. Γ**	**3. Β**	**4. Δ**	**5. Γ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	2	3	4
Δ	**Α**	**Γ**	**Β**

2.

1	2	3	4
Γ	**Δ**	**Β**	**Α**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Α (2, 2),   Β (2, - 2)   β) $x = 2$ η εξίσωση της ΑΒ

2. α) Ε (0, 1),   Κ (2, - 1)   β) $y + x = 1$, $y - x = - 1$

γ) Λύση συστήματος: $\begin{cases} y - x = -1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$

3. α) $y = x$, $y = - x$ β) Α (2p, 2p), Β (2p, - 2p)   γ) $x = 2p$

δ) το σταθερό σημείο είναι το 2p

4. α) $y = \frac{1}{4}x^2$ β) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ γ) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. α) $x^2 + (y + 5)^2 = 5^2$ β) $y = - 2x^2$ γ) $3x^2 + 8y^2 = 35$

6. εξίσωση παραβολής: $y = - \frac{4}{9}x^2$

εξίσωση κύκλου: $x^2 + (y + 4)^2 = 9$

κοινά σημεία: $(\frac{\sqrt{63}}{4}, \frac{-7}{4})$, $(3, - 4)$, $(\frac{-\sqrt{63}}{4}, \frac{-7}{4})$, $(- 3, - 4)$

7. $x - 8 = - \frac{1}{8}y^2$

ΕΛΛΕΙΨΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Σ	**2. Σ**	**3. Σ**	**4. Σ**
5. Σ	**6. Σ**	**7. Σ**	**8. Λ**
9. Λ	**10. Σ**	**11. Σ**	**12. Σ**
13. Σ	**14. Σ**	**15. Σ**	**16. Σ**
17. Σ			

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γ	**2. Δ**	**3. Β**	**4. Β**
5. Α	**6. Β**	**7. Γ**	**8. Γ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	**2**	**3**	**4**
Β	**Δ**	**Α**	**Ζ**

2.

1	**2**	**3**	**4**
Γ	**Α**	**Ε**	**Β**

3

1	**2**	**3**	**4**
Δ	**Ε**	**Β**	**Α**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) C_1: (3, 0), (- 3, 0) C_2: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$ C_3: (0, - 3), (0, 3)

β) C_1: $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 6, 2

C_2: (- 1, 0), (1, 0), $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{5}$

C_3: $(0, -\sqrt{5})$, $(0, \sqrt{5})$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 6, 4

2. $(2, 2\sqrt{3})$, $(2, -2\sqrt{3})$, $(-2, 2\sqrt{3})$, $(-2, -2\sqrt{3})$,

3. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

4. α) (3, 0) β) κανένα γ) $\left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $\left(2, \frac{-2\sqrt{5}}{3}\right)$

δ) (0, 2) ε) κανένα

7. γ) $\frac{x^2}{(\ell-\alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$

8. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

Υπερβολη

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1. Σ	**2. Σ**	**3. Σ**	**4. Λ**	**5. Σ**
6. Σ	**7. Σ**	**8. Λ**	**9. Λ**	**10. Σ**
11. Σ				

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γ	**2. Γ**	**3. Γ**	**4. Ε**	**5. Ε**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	**2**	**3**
Γ	**Δ**	**Α**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

2. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$

5. $3x + y = 8$

6. α) $\frac{\alpha}{\text{συν}\theta}\vec{i} + \beta\ \text{εφ}\theta\ \vec{j}$

β) $x = \frac{\alpha}{\text{συν}\theta}$, $y = \beta\ \text{εφ}\theta$, οπότε … $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

7. α) $\sqrt{2}$ β) $3x - y = \alpha^2$

8. περίπου (- 1099, 1000)