Κεφάλαιο 2ο

Πολυώνυμα

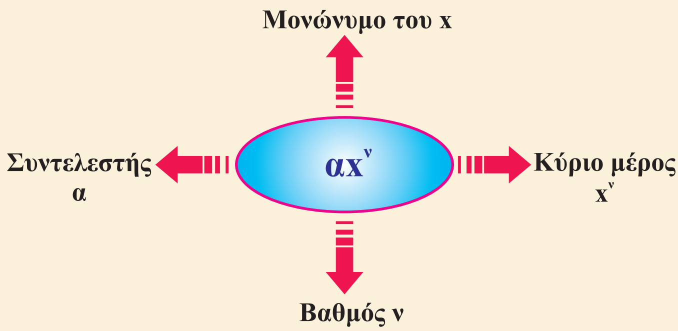
Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει:

- ✓ Να αναγνωρίζει πότε μια αλγεβρική παράσταση της πραγματικής μεταβλητής x, είναι πολυώνυμο και να διακρίνει τα στοιχεία του: όροι, συντελεστές, σταθερός όρος και βαθμός.
- ✓ Να κατανοήσει τις έννοιες σταθερό - πολυώνυμο, μηδενικό πολυώνυμο, αριθμητική τιμή πολυωνύμου, ρίζα πολυωνύμου.
- ✓ Να μπορεί να κάνει πράξεις - πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση - με πολυώνυμα και να γράφει την ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης πολυωνύμων.
- ✓ Να υπολογίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$.
- ✓ Να χρησιμοποιεί το σχήμα Horner για την εύρεση του πηλίκου και του υπόλοιπου της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$.
- ✓ Να αποδεικνύει ότι: $P(\rho)=0 \Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\Pi(x)$.
- ✓ Να μπορεί να επιλύει πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού $\nu \geq 2$ με παραγοντοποίηση ή χρησιμοποιώντας το θεώρημα ακεραίων ριζών.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ορισμοί

• **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν} όπου $\alpha \in R$, $\nu \in N^*$ και x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το R. Μονώνυμο του x λέμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.



Χαρακτηριστικά μονώνυμα

• **Μηδενικό μονώνυμο** λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν, π.χ. $0x^3$, $0x^5$.

• **Μονώνυμο μηδενικού βαθμού** λέγεται κάθε μονώνυμο του οποίου ο βαθμός είναι μηδέν, π.χ. $7 = 7 \cdot x^o$, $9 = 9 \cdot x^o$.

• **Πολυώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu} \in R$, και x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο R.

Ένα πολυώνυμο του x το συμβολίζουμε συνήθως με $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ κ.λ.π..

Γράφουμε λοιπόν: $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$

Για παράδειγμα:

Η παράσταση $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$ είναι πολυώνυμο του x.

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα

• **Σταθερά πολυώνυμα**

Λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής $P(x) = \alpha_0 \cdot x^0$.

• **Μηδενικό πολυώνυμο**

Λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0.

• **Στοιχεία πολυωνύμου** $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0$

- **Όροι:** Λέγονται τα μονώνυμα $\alpha_\nu x^\nu,\ldots,\alpha_0$
- **Σταθερός όρος:** Είναι ο όρος α_0 που δεν περιέχει x.
- **Συντελεστές:** Λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu-1},\ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_0$.
- **Βαθμός:** Είναι ο εκθέτης ν.
- **Αριθμητική τιμή για x = ξ:** Λέγεται ο αριθμός $P(\xi)=\alpha_\nu\xi^\nu+\ldots+\alpha_1\xi+\alpha_0$ που προκύπτει αν στο $P(x)$ αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό ξ.
- **Ρίζα:** Ένας αριθμός $\rho\in R$ λέγεται ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(\rho)=0$.

Σχόλιο
Βαθμός μηδενικού πολυωνύμου δεν ορίζεται ενώ ο βαθμός κάθε σταθερού μη μηδενικού πολυωνύμου είναι μηδέν.

• **Ισότητα πολυωνύμων**
Δύο πολυώνυμα του x λέγονται ίσα, αν και μόνο αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.

Έτσι αν $P(x)=\alpha_\mu x^\mu+\alpha_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και

$Q(x)=\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0$

είναι δύο πολυώνυμα του x με $\mu\geq\nu$, έχουμε:

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_\nu=\beta_\nu\\ \alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\ldots=\alpha_\mu=0\end{cases}$$

Θεώρημα 1 (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x)\neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$

όπου το $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

$$\begin{array}{l|l}\Delta(x) & \underline{\delta(x)}\\ & \pi(x)\\ \upsilon(x) & \end{array}$$

Ισχύει $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$

• $\Delta(x)$ διαιρετέος • $\delta(x)$ διαιρέτης • $\pi(x)$ πηλίκο

• $\upsilon(x)$ υπόλοιπο και είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του $\delta(x)$, ή $\upsilon(x)=0$.

Σημείωση

Η διαίρεση $\Delta(x):\delta(x)$ λέγεται **τέλεια** αν $\upsilon(x)=0$.

Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$ και το $\delta(x)$ λέγεται παράγοντας του $\Delta(x)$.

Οι εκφράσεις:

- το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$, το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$, η διαίρεση $\Delta(x):\delta(x)$ είναι τέλεια, υπάρχει $\pi(x)$ ώστε: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$ είναι ισοδύναμες

Θεώρημα 2

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ο αριθμός $P(\rho)$.

Η ταυτότητα της διαίρεσης

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{x-\rho} \\ & \pi(x) \\ \upsilon=P(\rho) & \end{array}$$

είναι: $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$

Θεώρημα 3

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$, αν και μόνο αν, το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

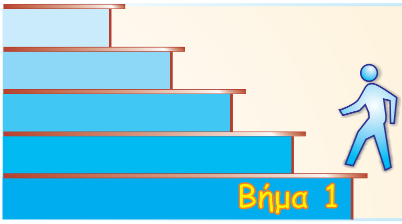
Δηλαδή: $$P(x)=(x-\rho)\pi(x)\Leftrightarrow P(\rho)=0$$

Θεώρημα 4 (της ακέραιας ρίζας)

Αν το $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, όπου α_ν, ..., α_1, α_0 ακέραιοι, έχει ρίζα τον ακέραιο ρ, $\rho\neq 0$ τότε αυτός διαιρεί τον α_0.

Σημείωση

Τις ακέραιες ρίζες τις αναζητούμε μέσα στο σύνολο των διαιρετών του α_0.



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1
(Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x)\neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$
όπου το υ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

$$\begin{array}{r|l} \Delta(x) & \underline{\delta(x)} \\ & \pi(x) \\ \upsilon(x) & \end{array}$$

Ισχύει: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$

- **$\Delta(x)$ διαιρετέος** • **$\delta(x)$ διαιρέτης** • **$\pi(x)$ πηλίκο**
- **$\upsilon(x)$ υπόλοιπο και είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του $\delta(x)$, ή $\upsilon(x)=0$.**

Απόδειξη

Χωρίς απόδειξη

ΘΕΩΡΙΑ 2

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Απόδειξη

Από ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ έχουμε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$,

$\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης και υ το υπόλοιπο που είναι σταθερό πολυώνυμο επειδή το $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού.

Αν θέσουμε $x=\rho$, έχουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0\pi(\rho)+\upsilon$, δηλαδή $P(\rho)=\upsilon$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 **Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$, αν και μόνο αν, το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.**

Απόδειξη

Έστω το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ τότε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$. Από αυτή την ισότητα για $x=\rho$, έχουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0$, δηλαδή το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντίστροφα :

Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή $P(\rho)=0$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι: $\upsilon=P(\rho)=0$

Έχουμε:

$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)\Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\pi(x)+0\Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\pi(x)$, δηλαδή το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Έστω πολυωνυμική εξίσωση:**

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0,$$

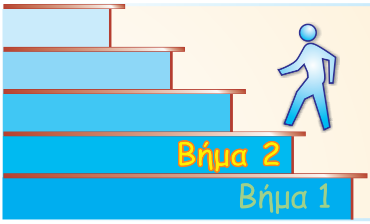
με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου .

Απόδειξη

Αν $\rho\neq 0$, είναι ρίζα της εξίσωσης έχουμε: $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0\Leftrightarrow$

$\rho(\underbrace{\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1}_{\lambda\in Z})+\alpha_0=0\Leftrightarrow\alpha_0=\rho(-\lambda)$, όπου $\lambda=\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1$.

Επειδή $\lambda\in Z$ το ρ διαιρεί τον σταθερό όρο α_0.

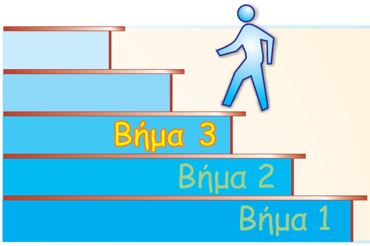


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 2.1	Α΄ Ομάδα:	3, 4, 6, 7
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5
§ 2.2	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5
§ 2.3	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 4, 5, 6, 7
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 5
§ 2.4	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 3
	Β΄ Ομάδα:	5



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=(\lambda^3-4\lambda)\cdot x^3+(\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda)\cdot x^2+\lambda^2-3\lambda+2$

i. Βρείτε τον βαθμό του $q(x)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $q(x)$ βρείτε το λ.

iii. Για την μικρότερη τιμή που βρήκατε για το λ βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης του q και της ευθείας $y=-7x+8$.

Λύση:

i. Εξετάζουμε για ποιες τιμές του λ μηδενίζεται ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του x.

$\lambda^3-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\cdot(\lambda^2-4)=0 \Leftrightarrow \lambda\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=0$ ή $\lambda-2=0$ ή $\lambda+2=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=0$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=-2$ οπότε:

1. Αν $\boxed{\lambda\neq 0,2,-2}$ το $q(x)$ είναι τρίτου βαθμού

2. Αν $\boxed{\lambda=0}$ είναι $q(x)=2$ άρα το $q(x)$ είναι μηδενικού βαθμού

3. Αν $\boxed{\lambda=2}$ είναι $q(x)=0$ άρα το $q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και δεν ορίζουμε βαθμό.

4. Αν $\boxed{\lambda=-2}$ τότε $q(x)=-32x^2+12$ άρα το $q(x)$ ειναι δευτέρου βαθμού.

ii. Το $x-1$ είναι παράγοντας του q(x), αν και μόνον αν, το 1 είναι ρίζα του q(x) δηλαδή αν και μόνον αν:

$q(1)=0 \Leftrightarrow \lambda^3-4\lambda+\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow$

$2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow 2\cdot(\lambda^3+1)-3\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$

$2(\lambda+1)\cdot(\lambda^2-\lambda+1)-3\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda+1)\cdot(2\lambda^2-2\lambda+2-3\lambda)=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)\cdot(2\lambda^2-5\lambda+2)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda+1=0$ ή $2\lambda^2-5\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow$

$$\lambda=-1 \;\; ή \;\; \lambda=\frac{5\pm3}{4} \Leftrightarrow \lambda=-1 \;\; ή \;\; \lambda=2 \;\; ή \;\; \lambda=\frac{1}{2}$$

iii. Εφόσον $\lambda=-1$ έχουμε: $q(x)=3x^3-9x^2+6$

Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης του $q(x)$ με την ευθεία $y=-7x+8$ έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης:

$$q(x)=y \Leftrightarrow 3x^3-9x^2+6=-7x+8 \Leftrightarrow 3x^3-9x^2+7x-2=0 \Leftrightarrow$$

Για το $G(x)=3x^3-9x^2+7x-2$, εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 2 (το 2 το βρήκαμε από τους διαιρέτες του σταθερού όρου -2) και έχουμε:

3	-9	7	-2	2
	6	-6	2	
3	-3	1	$\boxed{0}$	

$$G(x)=(x-2)\cdot(3x^2-3x+1)$$

Άρα: $(x-2)\cdot(3x^2-3x+1)=0 \Leftrightarrow$

$x-2=0$ ή $3x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ αδύνατη διότι $\Delta<0$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $A(2,-6)$.

2.α. Το πολυώνυμο $q(x)$ διαιρείται ακριβώς με τα x-1 και x+2 και δίνει πηλίκα $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $f(-2)=g(1)$

β. Δίνεται πολυώνυμο $q(x)$ και ο θετικός αριθμός α που είναι ρίζα του πολυωνύμου $F(x)=q(x)-x^2$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσής του $G(x):(x-\alpha)$ είναι 3 και $G(x)=q\left[q(x-\alpha)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]+x$, να βρεθεί το α.

Λυση:

α. • Το $q(x)$ διαιρείται ακριβώς με το $x-1$ αν και μόνον άν το 1 είναι ρίζα του $q(x)$ δηλαδή $q(1)=0$ και με το $x+2$ αν και μόνον αν το -2 είναι ρίζα του $q(x)$ δηλαδή $q(-2)=0$

• Το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης του $q(x)$ με το $x-1$ είναι $f(x)$ άρα $q(x)=(x-1)\cdot f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=-2$ έχουμε:

$$q(-2)=(-2-1)\cdot f(-2) \Leftrightarrow 0=-3\cdot f(-2) \Leftrightarrow \boxed{f(-2)=0}$$

• Το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης του $q(x)$ με το $x+2$ είναι $g(x)$.

Άρα $q(x)=(x+2)\cdot g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=1$ έχουμε:

$$q(1)=(1+2)\cdot g(1) \Leftrightarrow 0=3\cdot g(1) \Leftrightarrow g(1)=0.$$ Άρα $f(-2)=g(1)$

β. • Το α είναι ρίζα του $F(x)$ άρα: $F(\alpha)=0 \Leftrightarrow q(\alpha)-\alpha^2=0 \Leftrightarrow q(\alpha)=\alpha^2$

• Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $G(x)$ διά του $x-2\alpha$ είναι 3 άρα:

$$G(2\alpha)=3 \Leftrightarrow q\left[q(2\alpha-\alpha)+\frac{2\alpha}{2}-\frac{4\alpha^2}{4}\right]+2\alpha=3 \Leftrightarrow$$

$$q\left[q(\alpha)+\alpha-\alpha^2\right]+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow q\left(\alpha^2+\alpha-\alpha^2\right)+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow$$

$$q(\alpha)+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$\alpha=1$ ή $\alpha=-3$ (η τελευταία απορρίπτεται)

3. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=(x-1)^{2004}+x+2$

i. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με τα $x-2$ και x.

ii. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με το x^2-2x.

Λυση:

i. • Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με το $x-2$ είναι το :

$$q(2)=(2-1)^{2004}+2+2=5$$

• Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με το $x=x-0$ είναι το:

$$q(0)=(0-1)^{2004}+0+2=3$$

ii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με το x^2-2x είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ (αφού το υπόλοιπο έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του διαιρέτη) οπότε για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $q(x)=(x^2-2x)\cdot\Pi(x)+\alpha x+\beta$

• Για $x=2$ έχουμε: $q(2)=2\alpha+\beta \Leftrightarrow 5=2\alpha+\beta$ (1)

• Για $x=0$ έχουμε: $q(0)=\beta \Leftrightarrow 3=\beta$. Τότε από την (1) παίρνουμε: $\alpha=1$

Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το $x+3$.

4. Δίνεται πολυώνυμο $q(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το x^3-8, δίνει πηλίκο $(x+5)^\nu$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ και υπόλοιπο x^2-5x+3.

i. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ με το $x-2$

ii. Βρείτε το πηλίκο της ίδιας διαίρεσης το οποίο συμβολίζουμε με $F(x)$.

iii. Αν το –3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $F(x)-50$ βρείτε το $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Λυση:

i. Από την ταυτότητα της διαίρεσης του $q(x)$ με το x^3-8 έχουμε:

$$q(x)=(x^3-8)\cdot(x+5)^\nu+x^2-5x+3,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $q(x)$ διά του $x-2$ είναι το $q(2)=2^2-10+3=-3$

ii. Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$q(x)=(x^3-8)\cdot(x+5)^\nu+x^2-5x+6-3 \Leftrightarrow$$
$$q(x)=(x-2)\cdot(x^2+2x+4)\cdot(x+5)^\nu+(x-2)\cdot(x-3)-3 \Leftrightarrow$$
$$q(x)=(x-2)\cdot\left[(x^2+2x+4)\cdot(x+5)^\nu+(x-3)\right]+(-3) \Leftrightarrow$$
$$q(x)=(x-2)\cdot F(x)+(-3)$$

Δηλαδή το πηλίκο της διαίρεσης του $q(x)$ διά του $x-2$ είναι το:

$$F(x)=(x^2+2x+4)\cdot(x+5)^\nu+x-3$$

iii. Το –3 είναι ρίζα του $F(x)-50$, άρα:

$$F(-3)-50=0\Leftrightarrow F(-3)=50\Leftrightarrow 7\cdot2^\nu-6=50\Leftrightarrow$$
$$7\cdot2^\nu=56\Leftrightarrow 2^\nu=8\Leftrightarrow 2^\nu=2^3\Leftrightarrow \nu=3$$

5. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=24x^3-\alpha x^2+\beta x+1$, το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 12, ενώ έχει παράγοντα το $2x-1$.

α. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β. Λύστε την εξίσωση: $q(x)=0$.

γ. Λύστε την εξίσωση: $q(x)=12$.

Λυση:

α. • Το $x-1$ διαιρεί το $q(x)$ και αφήνει υπόλοιπο 12 άρα:

$$q(1)=12\Leftrightarrow 24-\alpha+\beta+1=12\Leftrightarrow -\alpha+\beta=-13$$

• Το $2x-1$ διαιρεί ακριβώς το $q(x)$ άρα:

$$q(x)=(2x-1)\cdot\Pi(x)\Leftrightarrow 24x^3-\alpha x^2+\beta x+1=(2x-1)\cdot\Pi(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οπότε για $x=\frac{1}{2}$, έχουμε: $3-\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}+1=0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}=4 \Leftrightarrow \alpha-2\beta=16$

Λύνουμε τώρα το σύστημα: $\begin{cases} -\alpha+\beta=-13 \\ \alpha-2\beta=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta=3 \\ \alpha=16+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha=10 \end{cases}$

β. Για το $q(x)=24x^3-10x^2-3x+1$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση $\frac{1}{2}$ (το $\frac{1}{2}$ το βρήκαμε από το γεγονός ότι το $2(x-1/2)$ διαιρεί ακριβώς το $q(x)$) και έχουμε:

24	-10	-3	1	1/2
	12	1	-1	
24	2	-2	0	

$$q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(24x^2+2x-2)$$

Άρα η εξίσωση: $q(x)=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(24x^2+2x-2)=0 \Leftrightarrow$

$$x-\frac{1}{2}=0 \quad \text{ή} \quad 12x^2+x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{24} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-1\pm 7}{24} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{1}{3}$$

γ. Η εξίσωση $q(x)=12$ έχει ρίζα το 1 διότι $q(1)=12$, δηλαδή την επαληθεύει άρα, για το πολυώνυμο $G(x)=q(x)-12=24x^3-10x^2-3x-11$ εφαρμόζουμε σχήμα Horner στη θέση 1 και έχουμε:

24	-10	-3	-11	1
	24	14	11	
24	14	11	0	

Δηλαδή: $G(x)=(x-1)\cdot(24x^2+14x+11)$

Άρα η εξίσωση:

$q(x)=12 \Leftrightarrow q(x)-12=0 \Leftrightarrow G(x)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot(24x^2+14x+11)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $24x^2+14x+11=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ αδύνατη διότι $\Delta<0$

6. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=\alpha^2x^3+\alpha^3\cdot x^2+(\alpha+4)\cdot x+2$**, που έχει παράγοντα το** $x-1$**.**

i. Βρείτε το α.

ii. Για την τιμή που βρήκατε για το α, βρείτε τις ρίζες του $q(x)$**.**

iii. Λύστε την ανίσωση: $q(x)<0$**.**

Λύση:

i. Το $x-1$ είναι παράγοντας του $q(x)$ άρα το 1 είναι ρίζα του $q(x)$ οπότε:

$$q(1)=0\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^3+\alpha+4+2=0\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2+\alpha+6=0$$

Για το $G(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+6$, εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση –2 (το –2 το βρήκαμε γιατί είναι διαιρέτης του 6) και έχουμε: $G(\alpha)=(\alpha+2)\cdot(\alpha^2-\alpha+3)$

1	1	1	6	-2
	-2	2	-6	
1	-1	3	0	

Άρα: $(\alpha+2)\cdot(\alpha^2-\alpha+3)=0\Leftrightarrow$ $\alpha+2=0$ ή $\alpha^2-\alpha+3=0$

$\alpha=-2$, αδύνατη διότι $\Delta<0$

ii. Για το $q(x)=4x^3-8x^2+2x+2$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1 (αφού το 1 είναι ρίζα του) και έχουμε:

$$q(x)=(x-1)\cdot(4x^2-4x-2)$$

4	-8	2	2	1
	4	-4	-2	
4	-4	-2	0	

Άρα: $q(x)=0\Leftrightarrow (x-1)\cdot(4x^2-4x-2)=0\Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $4x^2-4x-2=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{12}}{2\cdot 2}\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=\dfrac{2\pm2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

iii. • Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

• Άρα: $q(x)<0 \Leftrightarrow \ x\in\left(-\infty\,,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(1\ ,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

7. Δίνεται το πολυώνυμο $q(x)=x^4-5x^3+\alpha x+\beta$, που διαιρείται ακριβώς με το x^2+x+1.

i. Δείξτε ότι: $\alpha=-1$ και $\beta=5$

ii. Λύστε τις εξισώσεις: $q(x)=0$ και $q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0$

iii. Βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται κάτω απο τον άξονα x΄x.

Λύση:

i. Εκτελούμε την διαίρεση του $q(x)$ διά του x^2+x+1:

$$\begin{array}{l|l} x^4-5x^3+\alpha x+\beta & x^2+x+1 \\ \hline -x^4-x^3-x^2 & x^2-6x+5 \\ \hline -6x^3-x^2+\alpha x+\beta & \\ 6x^3+6x^2+6x & \\ \hline 5x^2+(\alpha+6)x+\beta & \\ -5x^2-5x-5 & \\ \hline (\alpha+1)x+\beta-5 & \end{array}$$

Δηλαδή: $q(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^2-6x+5)+(\alpha+1)x+\beta-5$. Όμως το x^2+x+1 διαιρεί ακριβώς το $q(x)$ και το $(\alpha+1)x+\beta-5$ οφείλει να είναι μηδενικό πολυώνυμο δηλαδή: $\alpha+1=0$ και $\beta-5=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ και $\beta=5$

ii. • Λύνουμε την εξίσωση $q(x)=0$:

$q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)\cdot(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow$

$x^2+x+1=0$ ή $x^2-6x+5=0$

αδύνατη διότι $\Delta<0$ $\qquad x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{6\pm4}{2}\Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

• Λύνουμε την εξίσωση $q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0$:

$$q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0 \Leftrightarrow \quad 2\sigma\upsilon\nu x+2=1 \quad \acute{\eta} \quad 2\sigma\upsilon\nu x+2=5 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \qquad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$$

$$x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3} \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

iii. • Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν: $q(x)<0 \Leftrightarrow x\in(1\,,\,5)$

8. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=4x^4-4x^3+7x^2+\alpha x+\beta$, το οποίο διαιρούμενο με το $4x^2-1$ αφήνει υπόλοιπο $x+3$.

i. Βρείτε τα α, β.

ii. Λύστε την εξίσωση: $q(x)=x+3$.

iii. Βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται πάνω απο την ευθεία (ε) με εξίσωση: $y=x+3$.

Λύση :

i. Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $q(x)=(4x^2-1)\cdot\Pi(x)+x+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε:

• Για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}+\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \alpha+2\beta=4$$

• Για $x=-\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$q\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\alpha+2\beta=0$$

Άρα $\beta=1$ και $\alpha=2$.

ii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$q(x)=x+3 \Leftrightarrow (4x^2-1)\cdot \Pi(x)+x+3=x+3 \Leftrightarrow (4x^2-1)\cdot \Pi(x)=0$$

Εκτελούμε λοιπόν την διαίρεση του $q(x)$ με το $4x^2-1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -4x^3 & +7x^2 & +2x & +1 & 4x^2-1 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & & +x^2 & & & x^2-x+2 \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +8x^2 & +2x & +1 & \\
 & 4x^3 & & -x & & \\
\cline{2-5}
 & & 8x^2 & +x & +1 & \\
 & & -8x^2 & & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & x & +3 &
\end{array}$$

Δηλαδή: $\Pi(x)=x^2-x+2$

Άρα: $(4x^2-1)\cdot(x^2-x+2)=0 \quad \Leftrightarrow$

$4x^2-1=0$ ή $x^2-x+2=0 \quad \Leftrightarrow$

αδύνατη διότι $\Delta<0$

$$x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

iii. Η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται πάνω απο την ευθεία $y=x+3$ αν και μόνο αν:

$$q(x)>x+3 \Leftrightarrow q(x)-x-3>0 \Leftrightarrow (4x^2-1)\cdot \Pi(x)>0 \Leftrightarrow$$

$$(4x^2-1)\cdot(x^2-x+2)>0 \Leftrightarrow 4x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x<-\frac{1}{2} \text{ ή } x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

9. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1 \qquad \text{και} \qquad 6x^3-(\lambda^2+16)\cdot x^2+(\lambda+10)\cdot x-2=0$$

i. Αν έχουν κοινή ρίζα βρείτε το λ.

ii. Για την ακέραια τιμή του λ λύστε την ανίσωση:

$$6x^3-(\lambda^2+16)\cdot x^2+(\lambda+10)\cdot x-2>0$$

Λύση:

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}\ +1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ \left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq 1 \\ x+2=x-1+1+2\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 1=\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 1=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Αφού το 2 είναι ρίζα και της πολυωνυμικής εξίσωσης, ισχύει:

$$48-4\cdot\left(\lambda^2+16\right)+2\cdot(\lambda+10)-2=0 \Leftrightarrow 48-4\lambda^2-64+2\lambda+20-2=0 \Leftrightarrow$$

$$-4\lambda^2+2\lambda+2=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow \lambda=1 \ \text{ ή } \ \lambda=-\frac{1}{2}$$

ii. Εφόσον $\lambda=1$ λύνουμε την εξίσωση: $6x^3-17x^2+11x-2=0$

Για το $q(x)=6x^3-17x^2+11x-2$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 2 και έχουμε:

6	-17	11	-2	2
	12	-10	2	
6	-5	1	$\boxed{0}$	

Δηλαδή: $q(x)=(x-2)\cdot\left(6x^2-5x+1\right)$

Άρα: $(x-2)\cdot\left(6x^2-5x+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$x-2=0$ ή $6x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6} \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x=\dfrac{5\pm 1}{12} \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x=\dfrac{1}{2}$ ή $x=\dfrac{1}{3}$

• Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1/3		1/2		2		$+\infty$
q(x)		−	0	+	0	−	0	+	

• Άρα: $6x^3-17x^2+11x-2>0 \Leftrightarrow q(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

10. Η συγκέντρωση ενός φαρμάκου σε mgr που εισάγεται στον οργανισμό ενός ασθενούς δίνεται απο την συνάρτηση:

$$\mathbf{q(t)=-t^3+\alpha t^2+9t+\beta,}\ \text{ όπου } \mathbf{t>0} \text{ είναι ο χρόνος σε ώρες.}$$

Αν είναι γνωστό ότι την 1η ώρα υπάρχουν στον οργανισμό 16 mgr φαρμάκου και την 2η ώρα 27 mgr:

i. Βρείτε τα α, β.

ii. Πότε δεν υπάρχει φάρμακο στον οργανισμό του ασθενούς;

Λύση:

i. • Σύμφωνα με την εκφωνηση είναι: $q(1)=16$ και $q(2)=27$

$q(1)=16 \Leftrightarrow -1+\alpha+9+\beta=16 \Leftrightarrow \alpha+\beta=8$ και

$q(2)=27 \Leftrightarrow -8+4\alpha+18+\beta=27 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=17$

• Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases}\alpha+\beta=8\\4\alpha+\beta=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha-\beta=-8\\4\alpha+\beta=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha=9\\\alpha+\beta=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\\beta=5\end{cases}$

Άρα: $q(t)=-t^3+3t^2+9t+5,$ με $t>0$

ii. Δεν υπάρχει φάρμακο στον οργανισμό, όταν $q(t)=0$. Γι' αυτό λύνουμε την εξίσωση: $q(t)=0 \Leftrightarrow -t^3+3t^2+9t+5=0$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση -1 και έχουμε: $q(t)=(t+1)\cdot(-t^2+4t+5)$

-1	3	9	5	-1
	1	-4	-5	
-1	4	5	$\boxed{0}$	

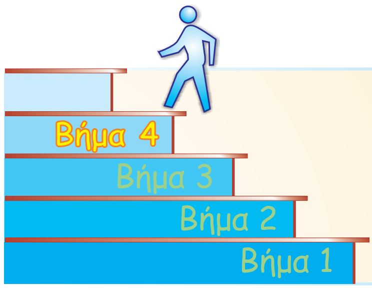
Άρα η εξίσωση γίνεται:

$(t+1)\cdot(-t^2+4t+5)=0 \Leftrightarrow t+1=0$ ή $-t^2+4t+5=0 \Leftrightarrow$

$t=-1$ ή $t=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{-2} \Leftrightarrow t=-1$ ή $t=\frac{-4\pm 6}{-2} \Leftrightarrow$

$t=-1$ ή $t=5$ ή $t=-1$

Όμως $t>0$ άρα $t=5$. Δηλαδή 5 ώρες μετά την χορήγηση του φαρμάκου αυτό θα έχει διαλυθεί πλήρως στον οργανισμό.



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Δίνεται το πολυώνυμο:** $P(x)=(\kappa^2-1)x^4+(\kappa-1)x+\kappa+1$.

Να βρείτε τον $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να είναι μηδενικού βαθμού.

2. **Θεωρούμε τα πολυώνυμα:**

$$f(x)=4x^2+x+9 \quad \text{και} \quad h(x)=\alpha(x+4)(x+3)+\beta x(x-2)+\gamma$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

3. **Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.**

i. $\left(10x^4 - x^3 - 24x^2 + 19x - 14\right) : \left(2x^2 - 3x + 1\right)$

ii. $\left(x^4 - 4x^2 - x + 2\right) : (x - 2)$

iii. $\left(x^3 - x^2 + 5x - 6\right) : (x + 1)$

iv. $\left(x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + 2\alpha\right) : (x + \alpha)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. **Αν το πολυώνυμο:** $P(x) = x^3 + (\eta\mu\theta)x^2 + 2\sigma\upsilon\nu^3\theta + 1$, $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

διαιρεθεί με το $(x + \sigma\upsilon\nu\theta)$ **δίνει υπόλοιπο 1.**

i. **Να βρείτε το θ.**

ii. **Να λύσετε την εξίσωση:** $P(x) = 3$.

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....

5. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = -\alpha x^3 - \beta x^2 + 3x - 2$, το οποίο όταν διαιρείται με το $x^2 - 1$, δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x) = -3x + 2$. Να βρείτε τα α, β.

....
....
....
....
....
....
....

6. Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με τα πολυώνυμα $(x-2)$ και $(x+3)$ δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 1 και 10 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο $x^2 + x - 6$.

....
....
....
....
....
....
....

7. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

....
....

....

....

....

....

....

....

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$

ii. $(x+2)^8 - 3(x+2)^4 - 4 = 0$

iii. $2ημ^3x - 5συν^2x - 4ημx + 2 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 \geq 0$

ii. $-\dfrac{2}{x-3} > x^2 - \dfrac{5(x-1)}{3-x}$

....

....

....

....

....

....

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

10. **Δίνεται το πολυώνυμο:** $P(x)=2x^3+5\alpha x^2-(\alpha+\beta-1)x-2\beta-3$.

Να βρείτε για ποιές τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **το** $(x-1)^2$ **είναι παράγοντας του** $P(x)$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

11. **Δίνεται το πολυώνυμο:** $P(x)=x^3-2x^2-(\kappa-1)x+\lambda-3$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

i. Αν το P(x) έχει παράγοντα το $(x+2)^2$, να αποδείξετε οτι $\kappa=21$ και $\lambda=-21$ ·

ii. **Για τις τιμές των κ, λ του ερωτήματος i.:**

α. **Να βρείτε το πηλίκο** $\Pi_1(x)$ **της διαίρεσης** $P(x):(x+2)$.

β. **Να βρείτε το πηλίκο** $\Pi_2(x)$ **της διαίρεσης** $P(x):(x+2)^2$.

γ. **Να λύσετε την ανίσωση** $\Pi_1(x)-\Pi_2(x)>0$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

....

....

....

12. **Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+2x^3-2x^2-\alpha x+6$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x΄x$ στο σημείο Μ(2,0), να αποδείξετε ότι θα τέμνει τον άξονα και σε ένα ακόμη σημείο.**

....

....

....

....

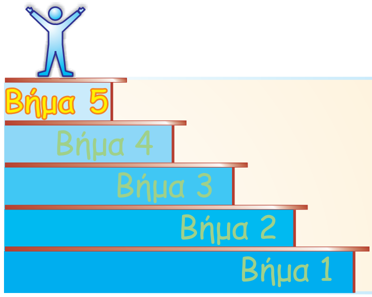
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

α. Δίνεται πολυώνυμο P(x) με βαθμό $\nu \geq 1$. Δείξτε την ισοδυναμία:

$$x-\rho \text{ παράργοντας } P(x) \Leftrightarrow \rho \text{ ρίζα του } P(x)$$

(Μονάδες 5)

β.i. Αν $\alpha \in R$ βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)=\alpha^2-1$.

(Μονάδες 5)

ii. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^{2004}+x^2+1$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-\rho$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

(Μονάδες 5)

iii. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=\kappa(x+y)^{2\nu+1}+x^{2\nu+1}+y^{2\nu+1}$, με $\nu \in N^*$ και $\kappa \in R$.

Δείξτε ότι το $x+y$ είναι παράγοντας του P(x).

(Μονάδες 5)

iv. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3+2\alpha x^2+x+1$, με α ακέραιο. Δείξτε ότι το P(α) δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 5)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 + συν2θx^2 + 6ημθx + α$

α. Αν το x διαιρεί το P(x) και αφήνει υπόλοιπο 4 δείξτε ότι $α = 4$.

(Μονάδες 5)

β. Αν το $x+1$ διαιρεί το P(x) και αφήνει υπόλοιπο 6 βρείτε το θ.

(Μονάδες 10)

γ. Αν $θ \in \left(-\frac{π}{2}, 0\right)$, λύστε την εξίσωση: $P(x) = 0$

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....

Θέμα 3ο

Δίνονται: η εξίσωση $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=-1$ και το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+(2συν2α-1)x^3-3x^2+(12-8συνα)x-4$$

α. Λύστε την εξίσωση.

(Μονάδες 5)

β. Αν το $x-ρ$ με ρ την μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης είναι παράγοντας του P(x) βρείτε το α.

(Μονάδες 10)

γ. Αν $α\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$ λύστε την εξίσωση $P(x)=0$ και την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 10)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-2x^2+x+α$

i. Αν το x διαιρεί το P(x) και αφήνει υπόλοιπο –2, βρείτε το α.

(Μονάδες 5)

ii. Λύστε την εξίσωση: $P(x)=0$

(Μονάδες 10)

iii. Αν το $x+2\sigma\upsilon\nu 2\theta-4\eta\mu^2\theta$ είναι παράγοντας του P(x), βρείτε το $\theta \in R$.

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....