ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΑΘΗΝΑ 1999

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία:	Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Συντονιστές:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed. Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος Σίδερης Πολυχρόνης, τ. Σχολικός Σύμβουλος
Συντάκτες κειμένων:	Βογιατζόγλου Σωτήρης, Μαθηματικός Δ.Ε. Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε. Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε. Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Μέτης Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Γλωσσική επιμέλεια:	Γιαννακοπούλου Αικατερίνη, Φιλόλογος Δ.Ε.

ISBN: 960-541-024-9

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 5

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Αριθμητικές Πρόοδοι

- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 9
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 17
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης 18
- Ερωτήσεις ανάπτυξης 24

Γεωμετρικές Πρόοδοι

- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 38
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 46
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης 47
- Ερωτήσεις ανάπτυξης 49
- Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος" στις Προόδους γενικά 63

Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή στην Άλγεβρα 67

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις 77

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εμβαδά πολυγώνων

- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 95
- Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος» 99
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης 102
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 108
- Ερωτήσεις ανάπτυξης 111

Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή στη Γεωμετρία 127

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις 133

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ευθεία

- Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος» 147
- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 152
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης..162
- Ερωτήσεις διάταξης..173
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 174
- Ερωτήσεις ανάπτυξης..177

Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή στην Ευθεία 189

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις..195

Κωνικές Τομές

- Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος» 203
- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 209
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης..221
- Ερωτήσεις διάταξης..233
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 234
- Ερωτήσεις ανάπτυξης..236

Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή στις Κωνικές Τομές.......247

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις..255

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Διανύσματα

- Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος» 265
- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 272
- Ερωτήσεις αντιστοίχισης..279
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης 290
- Ερωτήσεις διάταξης..291
- Ερωτήσεις ανάπτυξης..292

Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή στα Διανύσματα.............315

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις..327

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Β΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε τρεις κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για την λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.
- Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν τρεις αστερίσκοι (***). Αυτές υπερβαίνουν τους στόχους της διδασκαλίας στο σχολείο και μπορούν να παραλειφθούν.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 1999

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Αριθμητικες Προοδοι

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο

Α. Q **Β.** Z* **Γ.** N **Δ.** N* **Ε.** R

2. * Σε μια ακολουθία (α_ν) κάθε όρος α_ν είναι

Α. θετικός **Β.** $\neq 0$ **Γ.** ακέραιος **Δ.** ίσος με ν **Ε.** πραγματικός

3. * Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας είναι

Α. Μια ευθεία γραμμή

Β. Μια παραβολή

Γ. Μια υπερβολή

Δ. Μεμονωμένα σημεία του επιπέδου με τετμημένες φυσικούς αριθμούς

Ε. Μια τυχαία γραμμή στο επίπεδο

4. * Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = |5\nu - 1| - |5\nu + 1|$ είναι

Α. $\alpha_\nu = 5\nu + 2$ **Β.** $\alpha_\nu = 10\nu$ **Γ.** $\alpha_\nu = 10\nu - 2$

Δ. $\alpha_\nu = -2$ **Ε.** $\alpha_\nu = 2$

5. * Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1}$ είναι

Α. $\alpha_\nu = 0$ **Β.** $\alpha_\nu = 1$ **Γ.** $\alpha_\nu = 2$

Δ. $\alpha_\nu = -1$ **Ε.** $\alpha_\nu = -2$

6. * Ο 3^{ος} όρος της ακολουθίας $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$, $\alpha_1 = 1$ είναι

Α. - 6 **Β.** - 2 **Γ.** 1 **Δ.** 7 **Ε.** 2

7. * Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} + 2$ είναι σημεία με τετμημένες θετικούς ακεραίους της ευθείας

Α. $y = 0$ **Β.** $y = 2$ **Γ.** $y = -2$ **Δ.** $y = 3$ **Ε.** $y = 4$

8. * Για την ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{15}{\nu}$, $\nu \in \aleph^*$ ισχύει

Α. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$ **Β.** $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ **Γ.** $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$

Δ. $\alpha_{\nu+1} = 15\alpha_\nu$ **Ε.** $\alpha_\nu = 15\alpha_{\nu+1}$

9. ** Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = \eta\mu\dfrac{\nu\pi}{2} + 1$, $\nu \in \aleph^*$ όταν ν άρτιος είναι

Α. Η ευθεία $y = 1$

Β. Ο θετικός ημιάξονας Ox

Γ. Η διχοτόμος της γωνίας xOy

Δ. Τα σημεία της ευθείας $y = 1$ με τετμημένες άρτιους φυσικούς

Ε. Τα σημεία του ημιάξονα Ox με τετμημένες άρτιους φυσικούς

10. * Σε κάθε ακολουθία (α_ν) ισχύει

Α. $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ **Β.** όλοι οι όροι ομόσημοι **Γ.** όλοι οι όροι $\neq 0$

Δ. $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots$ **Ε.** τίποτε από τα προηγούμενα

11. * Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η

Α. 3, 6, 8, 10, 11, ...

Β. 2, 4, 8, 16, 32, ...

Γ. -3, 1, 5, 9, 13 , ...

Δ. -3, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ...

Ε. $\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{11}, \ldots$

12. * Αν η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου είναι η μεγαλύτερη ρίζα και ο πρώτος της όρος η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$, τότε ο $3^{ος}$ όρος της προόδου είναι ο

Α. 7 **Β.** - 5 **Γ.** 5 **Δ.** - 7 **Ε.** 8

13. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_5 = 23$. Τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. 3 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 1 **Ε.** 20

14. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10} = 2$ και $\omega = 3$. Τότε α_1 είναι ίσο με

Α. 5 **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 6 **Ε.** - 25

15. * Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$ έχουμε $\alpha_\nu = 35$. Τότε το πλήθος ν των όρων της είναι

Α. 7 **Β.** 32 **Γ.** 31 **Δ.** 9 **Ε.** 8

16. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_8 = 40$ και $\alpha_{20} = -20$. Τότε ο $14^{ος}$ όρος της είναι ίσος με

Α. 5 **Β.** 12 **Γ.** 10 **Δ.** 9 **Ε.** 20

17. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 11$ και $\omega = -3$. Τότε οι **θετικοί** της όροι είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** όλοι οι όροι της

18. * Ο $10^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου : $10, 7, 4, \cdots$ είναι

Α. - 14 **Β.** - 20 **Γ.** - 17 **Δ.** - 30 **Ε.** 0

19. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 7$ και $\omega = 2$. Τότε **δεν** είναι όρος της ο

Α. 15 **Β.** 11 **Γ.** 25 **Δ.** 21 **Ε.** 12

20. * Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω ίση με

Α. 5 **Β.** 2 **Γ.** - 1 **Δ.** 3 **Ε.** 10

21. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\omega = 3$. Τότε ο νιοστός της όρος είναι ίσος με

Α. $\alpha_\nu = 8\nu + 3$ **Β.** $\alpha_\nu = 3\nu + 8$ **Γ.** $\alpha_\nu = 3\nu + 5$

Δ. $\alpha_\nu = 5\nu + 3$ **Ε.** $\alpha_\nu = \nu + 11$

22. ** Ένας μαθητής ύψους 1,7 m στέκεται μπροστά σε μια σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18 cm.

α) Το πρώτο σκαλοπάτι της σκάλας, που βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από το μαθητή, είναι το

Α. όγδοο **Β.** δέκατο **Γ.** ενδέκατο **Δ.** δωδέκατο **Ε.** εικοστό

β) Δεν υπάρχει σκαλοπάτι που να βρίσκεται σε ύψος από το έδαφος

Α. 36 cm **Β.** 54 cm **Γ.** 72 cm **Δ.** 1,44 m **Ε.** 1,56 m

23. ** Η αριθμητική πρόοδος: α, $\alpha + 2c$, $\alpha + 4c$, $\cdots$ είναι γνησίως αύξουσα όταν

Α. $\alpha > 0$ **Β.** $c \neq 0$ **Γ.** $c < 0$ **Δ.** $c > 0$ **Ε.** πάντοτε

24. ** Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$, τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. $\frac{x+y}{2}$ **Β.** $\frac{x-y}{2}$ **Γ.** $y - \frac{x}{2}$ **Δ.** $\frac{y-x}{2}$ **Ε.** $\frac{y}{2} - x$

25. * Η διαφορά της αριθμητικής προόδου : $\alpha + \beta$, α, $\alpha - \beta$, $\cdots$ είναι

Α. α **Β.** β **Γ.** 2β **Δ.** $-\alpha$ **Ε.** $-\beta$

26. * Από τις παρακάτω τριάδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου η

Α. 5, 20, 35 **Β.** - 5, 0, 5 **Γ.** 45, 20, - 5

Δ. 5, -10, -25 **Ε.** - 5, 20, 35

27. *Αν οι αριθμοί 3k, k + 4, k - 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ο k είναι ίσος με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 5 **Δ.** 4,5 **Ε.** 1,5

28. * Αν τρεις ακέραιοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 21 και γινόμενο 280, τότε αυτοί είναι

Α. 2, 10, 14 **Β.** 5, 7, 9 **Γ.** 4, 7, 10

Δ. 1, 7, 13 **Ε.** - 4, 7, - 10

29. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει

Α. $y = x + z$ **Β.** $z = x + y$ **Γ.** $z = x + 2y$

Δ. $z - y = y - x$ **Ε.** $z - x = 2y$

30. * Αν οι $\gamma, \alpha + \beta, \alpha - \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \beta$ **Β.** $\gamma = \beta - \alpha$ **Γ.** $\gamma = \alpha + 2\beta$ **Δ.** $\gamma = \alpha + 3\beta$ **Ε.** $\gamma = \alpha + 4\beta$

31. * Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ **Β.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha + \gamma}$ **Γ.** $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$

Δ. $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\gamma}$

32. * Από τις επόμενες τετράδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου η

Α. 2, 5, 8, 11 **Β.** - 13, - 9, - 5, - 1 **Γ.** 8, 18, 38, 58

Δ. - 6, - 1, 4, 9 **Ε.** - 4, - 2, 0, 2

33. * Αν οι α , β , γ , δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ποια από τις παρακάτω απαντήσεις **δεν** είναι πάντα σωστή;

Α. $\beta+\gamma=\alpha+\delta$ **Β.** $\alpha+\gamma=2\beta$ **Γ.** $\beta+\delta=2\gamma$

Δ. $\delta-\gamma=\beta-\alpha$ **Ε.** $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

34. * Ο 15 είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών

Α. 5 και 20 **Β.** -5 και -25 **Γ.** -9 και -21 **Δ.** 9 και 21 **Ε.** 9 και -21

35. * Στην αριθμητική πρόοδο: 5, 9, 13, 17, 21, 25 αριθμητικός μέσος είναι ο

Α. 18 **Β.** 20 **Γ.** 30 **Δ.** 15 **Ε.** 90

36. * Οι διάφοροι του μηδενός πραγματικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποια από τις παρακάτω τριάδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου;

Α. γ, β, α **Β.** $-\alpha, -\beta, -\gamma$ **Γ.** $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

Δ. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $-\frac{\gamma}{3}, -\frac{\beta}{3}, -\frac{\alpha}{3}$

37. * Αν σε μια αριθμητική πρόοδο έχουμε $\alpha_1=5$ και $\omega=5$, τότε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι

Α. 18 **Β.** 43 **Γ.** 50 **Δ.** 20 **Ε.** 89

38. * Σε μια αριθμητική πρόοδο τα αθροίσματα $S_6 = 93$ και $S_5 = 90$. Τότε ισχύει

Α. $\omega = 3$ **Β.** $\alpha_1 = 3$ **Γ.** $\alpha_5 = 3$ **Δ.** $\alpha_6 = 3$ **Ε.** $S_4 = 3$

39. * Τα πολλαπλάσια του 3 μεταξύ του 5 και του 35 είναι

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** 8 **Δ.** 10 **Ε.** 30

40. * Μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος αν

Α. η διαφορά δυο οποιωνδήποτε όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός

Β. η διαφορά μεταξύ πρώτου και τελευταίου όρου της είναι σταθερός αριθμός

Γ. οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί

Δ. οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί

Ε. το άθροισμα των όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

41. * Σε κάθε αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω, το άθροισμα δυο όρων της που ισαπέχουν από τα άκρα της είναι

Α. Πολλαπλάσιο της διαφοράς ω.

Β. Παίρνει τιμές που εξαρτώνται από την τάξη των όρων αυτών.

Γ. Ίσο με το πλήθος ν.

Δ. Ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων της προόδου.

Ε. Ίσο με τον αριθμητικό μέσο της.

42. * Σε κάθε αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω > 0 ισχύει

Α. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$ **Β.** $\alpha_4 = \alpha_1 + 4\omega$ **Γ.** $\alpha_3 = \alpha_4 - \omega$

Δ. $\alpha_4 = \alpha_3 - \omega$ **Ε.** $\alpha_4 + \alpha_3 = \alpha_7$

43. * Αν για τους όρους μιας ακολουθίας (α_ν) ισχύει $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + c$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός, τότε

Α. η (α_ν) είναι αριθμ. πρόοδος **Β.** η (α_ν) είναι γν. αύξουσα **Γ.** $c = 1$

Δ. όλοι οι όροι είναι ομόσημοι **Ε.** όλοι οι όροι της είναι ίσοι

44. * Σε κάθε αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω είναι

Α. θετικός ρητός **Β.** σταθερός ακέραιος **Γ.** $\neq 0$

Δ. ίσος με ν **Ε.** σταθερός πραγματικός

45. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $2x = y + z$ **Β.** $2z = x + y$ **Γ.** $2y = x + z$

Δ. $y^2 = x^2 + z^2$ **Ε.** $2y = x \cdot z$

46. * Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα S_ν των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $(\alpha_\nu - \alpha_1)\frac{\nu}{2}$ **Β.** $(\alpha_\nu + \alpha_1)\frac{\omega}{2}$ **Γ.** $(\alpha_\nu + \alpha_1)\frac{\nu}{2}$

Δ. $(\alpha_\nu - \alpha_1)\frac{\omega}{2}$ **Ε.** $(\alpha_\nu + \nu\omega)\frac{\nu}{2}$

47. * Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα S_ν των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $[2\alpha_1 + (\nu - 1)]\frac{\nu}{2}$ **Β.** $[2\alpha_1 + \nu\omega]\frac{\nu}{2}$ **Γ.** $[\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\frac{\nu}{2}$

Δ. $[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\frac{\nu}{2}$ **Ε.** $(\alpha_\nu + \nu\omega)\frac{\nu}{2}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α) 5, 8 , … , 14 , 17 , … , … , 26 .

β) 7, … , … , 25 .

γ) k , 2k + 3 , … , 4k + 9 , … .

δ) x , … , 5x + 2 , 7x + 3 , … , … .

2. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τους όρους που λείπουν στις παρακάτω ακολουθίες.

Ακολουθία με αναδρομικό τύπο	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2\nu$	…	…	3	…	…
β) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1$	…	…	…	- 13	…

3. * Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α)	11	15	…	23	…
β)	…	…	20	29	38
γ)	4	…	18	…	32
δ)	…	33	…	65	…

4. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α)	10	…	70			
β)	10	…	…	70		
γ)	10	…	…	…	70	
δ)	10	…	…	…	…	70

5. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν έτσι ώστε κάθε γραμμή να είναι αριθμητική πρόοδος

α)	x + y	x - y	…	…	…
β)	…	x - y	…	x + y	…
γ)	…	x - 3y	…	…	x + 3y
δ)	x + 3y	…	…	…	x - 3y

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α με τον αντίστοιχο όρο της, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$	**Α)** $\alpha_2 = \frac{1}{\nu},\ \alpha_3 = -\frac{1}{\nu}$
	Β) $\alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 5$
2) $\alpha_\nu = (-1)^\nu + 1$	
	Γ) $\alpha_2 = 8,\ \alpha_3 = 27$
	Δ) $\alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1$
3) $\alpha_\nu = \nu^3$	
	Ε) $\alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0$
4) $\alpha_\nu = 3\nu - 8$	**ΣΤ)** $\alpha_2 = \frac{2}{\nu},\ \alpha_3 = \frac{3}{\nu}$

2. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α με τον $5^{ο}$ της όρο, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\frac{1}{14}, \frac{1}{11}, \frac{1}{8}, \cdots$	**Α)** $\frac{1}{2}$
2) $-8, 4, -2, \cdots$	**Β)** -2
3) $10, 7, 4, \cdots$	**Γ)** $-\frac{1}{2}$
4) $27, -9, 3, \cdots$	**Δ)** $-\frac{1}{4}$
	Ε) -5
	ΣΤ) $\frac{1}{3}$

3. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης Α με το αντίστοιχό του, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\alpha_\nu = 2\nu - 1$	**Α)** $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2, \alpha_1 = 3$
	Β) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$, $\alpha_1 = 1$
2) $\alpha_\nu = 3\nu - 2$	**Γ)** $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3, \alpha_1 = 1$
	Δ) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$, $\alpha_1 = 5$
3) $\alpha_\nu = 1 - 3\nu$	
	Ε) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$, $\alpha_1 = -3$
4) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$	**ΣΤ)** $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$, $\alpha_1 = -2$

4. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α με τον 5^{o} της όρο, που γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α) $\alpha_5 = \alpha_1 + 5$
1) $\alpha_\nu = \alpha_1 + 5\nu$	
	Β) $\alpha_5 = \alpha_1 + 25$
2) $\alpha_\nu = \alpha_1 + 5$	**Γ)** $\alpha_5 = \alpha_1 + 10$
	Δ) $\alpha_5 = 5\alpha_1 + 10$
3) $\alpha_\nu = 5\alpha_1 + \nu$	
	Ε) $\alpha_5 = 5\alpha_1 + 5$

5. * Να χαρακτηρίσετε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α με βάση το είδος της μονοτονίας της, που γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α) αύξουσα
1) -5 , -3 , -1 , ...	**Β)** γνησίως αύξουσα
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \cdots$	**Γ)** φθίνουσα
	Δ) γνησίως φθίνουσα
3) $\frac{1}{16}, \frac{1}{11}, \frac{1}{6}, \cdots$	**Ε)** σταθερή
4) 3 , 2 , 1 , 0 , 0 , 0 , ...	**ΣΤ)** όχι μονότονη

6. * Να χαρακτηρίσετε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α με βάση το είδος της μονοτονίας της, που γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α) αύξουσα
1) $\alpha_{\nu+1} = 4 - 2\alpha_\nu$, $\alpha_1 = 1$	
	Β) γνησίως αύξουσα
2) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu - 1$, $\alpha_1 = 2$	**Γ)** φθίνουσα
	Δ) γνησίως φθίνουσα
3) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu - 1$, $\alpha_1 = -2$	
	Ε) σταθερή
4) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu - 1$, $\alpha_1 = 1$	**ΣΤ)** όχι μονότονη

7. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α με το νιοστό όρο της, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\alpha_1 = 2 \quad , \quad \omega = 3$	**Α)** $\alpha_\nu = 4\nu - 14$
	Β) $\alpha_\nu = 5\nu - 10$
2) $\alpha_1 = 24 \quad , \quad \omega = -3$	**Γ)** $\alpha_\nu = 3\nu - 1$
	Δ) $\alpha_\nu = -3\nu + 27$
3) $\alpha_1 = -10 \quad , \quad \omega = 4$	**Ε)** $\alpha_\nu = 6\nu + 1$

8. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α) $S_\nu = \dfrac{-3\nu + 51}{2} \cdot \nu$
1) $\alpha_1 = 2,\ \omega = 3$	**Β)** $S_\nu = (\nu + 2) \cdot \nu$
2) $\alpha_1 = 24,\ \omega = -3$	**Γ)** $S_\nu = \dfrac{3\nu + 1}{2} \cdot \nu$
	Δ) $S_\nu = 2 \cdot (\nu - 6) \cdot \nu$
3) $\alpha_1 = -10,\ \omega = 4$	**Ε)** $S_\nu = (2\nu - 1) \cdot \nu$

9. ** Συνδέστε κατάλληλα κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α με τη διαφορά της, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α) 1
1) $\alpha_4 = \alpha_1 + 3$	
	Β) - 1
2) $\alpha_7 = \alpha_1 - 6$	**Γ)** 2
	Δ) - 2
3) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$	
	Ε) 3
4) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu-1} - 4$	**ΣΤ) -** 3

10. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τριάδα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου της στήλης Α, την τιμή που πρέπει να πάρει το x της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α) x = 5
1) 2 , x + 1 , 12	
	Β) x = 16
2) 3 + x , 15 , 22	**Γ)** x = 2
	Δ) x = 6
3) 14 , 9 + x , 20 + x	
	Ε) x = 0

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών και να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα αντίστοιχα σημεία.

α) $\alpha_\nu = 4\nu + 3$

β) $\alpha_\nu = 2 + (-1)^\nu$

γ) $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$

δ) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{\nu+1} = \frac{2}{3\alpha_\nu + 1}$

2. ** Να βρείτε τον αναδρομικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_\nu = 2\nu - 3$

β) $\beta_\nu = 5\cdot 3^\nu$

γ) $\gamma_\nu = 1 + 2^\nu$

3. ** Να βρείτε τον γενικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = -1$

β) $\beta_{\nu+1} = 3\cdot\beta_\nu$, $\beta_1 = 15$

γ) $\gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu + 2^\nu$, $\gamma_1 = 3$

4. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον $10^\text{ο}$ όρο της προόδου.

5. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$.

α) Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

β) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν σ' αυτή την περίπτωση;

6. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι $S_{20} = 610$ και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της $S_{12} = 222$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον 1^{o} όρο της .

7. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία
   α) το άθροισμα του $1^{ου}$ και του $5^{ου}$ όρου είναι -2, ενώ το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $6^{ου}$ είναι 2
   β) το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 7, ενώ το γινόμενο των ίδιων όρων είναι 10.

8. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο ο $2^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος διαφέρουν κατά 24, ενώ το άθροισμα του $12^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 70.
   α) Να βρείτε την πρόοδο, αν είναι γνωστό ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
   β) Ποιο είναι το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του $8^{ου}$ και του $25^{ου}$ όρου της στην περίπτωση αυτή;

9. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων της όρων είναι ίσο με -3 και άθροισμα των 5 πρώτων όρων ίσο με 10.

10. ** Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_6 = 8, \alpha_4 = 4$.

11. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν ο $2^{ος}$ και ο $7^{ος}$ όρος έχουν γινόμενο 100 και οι μεταξύ τους όροι έχουν άθροισμα 50

12. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$.
   α) Να βρείτε τον 5^{o} όρο της προόδου και
   β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

13. ** α) Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_6 = 23$

β) Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που **δεν** υπερβαίνει το 210;

14. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία ο $4^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος της έχουν άθροισμα 18, ενώ το άθροισμα των κύβων των όρων αυτών είναι 3.402.

15. * Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

16. * Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta+\gamma}, \frac{2}{\gamma+\alpha}, \frac{2}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

17. ** Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

α) δείξτε ότι οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta\cdot\gamma$, $\beta^2 - \alpha\cdot\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\cdot\beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

β) να βρείτε τον λόγο των διαφορών των δυο προόδων αυτών.

18. *** α) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$.

β) Αν οι αριθμοί $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}, \frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, δείξτε ότι οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

19. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 33 και *γινόμενο* 440.

20. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 16 και *γινόμενο άκρων* όρων 7.

21. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $S_5 = \frac{S_{10} - S_5}{2}$ και $\alpha_1 = 1$.

22. ** Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.

23. ** Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα

α) των διψήφιων περιττών αριθμών

β) των διψήφιων αρτίων αριθμών

γ) των διψήφιων φυσικών αριθμών

δ) των διψήφιων πολλαπλασίων του 4.

24. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου: 3, 5, 7, 9, ... ;

β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους της προόδου αυτής πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 99;

25. ** Μεταξύ των αριθμών 4 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς, ώστε να δημιουργηθεί μια αριθμητική πρόοδος με 11 όρους.

26. ** Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ του 5 και του 50 ώστε ο τελευταίος από τους αριθμούς αυτούς να είναι 3πλάσιος από τον δεύτερο και όλοι οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

27. ** Να βρείτε τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

28. ** Αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5.

29. ** Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ΑΓ = 16 cm και ΓΕ = 24 cm να βρείτε τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ .

30. ** Αν οι πλευρές α, β και γ τριγώνου ΑΒΓ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξτε ότι και τα ημΑ, ημΒ και ημΓ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποιος ο λόγος των διαφορών των δυο αυτών προόδων;

31. ** Αν οι αριθμοί $x, y, z \in \Re$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω , δείξτε ότι

α) $\dfrac{\eta\mu x - \eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu z - \sigma\upsilon\nu x} = \sigma\varphi y$

β) $\eta\mu x + \eta\mu z = 2\eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$

32. ** Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της ακολουθίας:

1 , - 3 , 5 , - 7 , 9 , -11 , ...

33. ** Στις προόδους (α_ν):17, **21**, 25, ... και (β_ν):16 , **21** , 26,... εμφανίζονται κοινοί όροι (όπως ο **21**).

α) Να βρείτε τον επόμενο κοινό τους όρο.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων κοινών όρων τους.

34. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $2+5+8+11+\cdots+(2+3\nu)$ και β) $3+5+7+\cdots+(3+2\nu)$.

35. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+29)=165$.

β) $1+7+13+\cdots+x=280$ με $x>0$

36. ** Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=3\nu+2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $\alpha_\nu=4\nu-2$ ή $\alpha_\nu=-3\nu+13$ ή $\alpha_\nu=-4\nu+19$ κ.λ.π.)

37. *** Μιας ακολουθίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu=3\nu^2+\nu$.

α) Να βρείτε το άθροισμα των (ν-1) πρώτων όρων της

β) Να βρείτε τον νιοστό της όρο

γ) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $S_\nu=2\nu^2+3\nu$ ή $S_\nu=4\nu^2-3\nu$ ή $S_\nu=-\nu^2+2\nu$ κ.λ.π.)

38. *** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu=\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$.

39. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu=2\nu^2$.

40. ** Α. Αν α_ν , β_ν δυο αριθμητικές πρόοδοι με διαφορές ω_1 , ω_2 αντίστοιχα και για κάθε ν είναι $\beta_\nu \neq 0$, εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται αριθμητική πρόοδος.

α) $\alpha_{2\nu+1}$ στ) $\alpha_\nu + \beta_\nu$

β) $|\alpha_\nu|$ ζ) $\alpha_\nu - \beta_\nu$

γ) $2\alpha_\nu + 3$ η) $2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$

δ) $(\alpha_\nu)^2$ θ) $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$

ε) $\dfrac{1}{\beta_\nu}$ ι) $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

Β. Στις περιπτώσεις που σχηματίζεται αριθμητική πρόοδος, βρείτε την αντίστοιχη νέα διαφορά.

41. ** α) Αν α_μ, α_k είναι οι όροι τάξεως μ, k αντιστοίχως μιας αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι ισχύει: $\alpha_\mu = \alpha_k + (\mu - k)\omega$.

β) Δείξτε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο α_1 , α_2 , ... , α_ν οι όροι α_ρ και $\alpha_{\nu-\rho+1}$ ισαπέχουν από τα άκρα α_1 και α_ν.

γ) Δείξτε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο α_1 , α_2 , ... , α_ν οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα, έχουν άθροισμα ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων.

42. ** Ένας αγρότης, για μια γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: το σκάψιμο του πρώτου μέτρου θα στοιχίσει 2.000 δρχ. και για κάθε επί πλέον μέτρο το κόστος σκαψίματος θα είναι κατά 500 δρχ. μεγαλύτερο από το κόστος σκαψίματος του προηγουμένου μέτρου.

Συμπληρώστε τον πίνακα:

I. i)

Βάθος	1ο m	2ο m	4ο m	…
Κόστος μέτρου	2.000 δρχ.	2.500 δρχ.	…	7.500 δρχ.
Κόστος γεώτρησης	2.000 δρχ.	4.500 δρχ.	…	…

ii) Το βάθος στο οποίο το κόστος του μέτρου υπερβαίνει τις 5.000 δρχ. είναι

Α. 3 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 7 m **Ε.** 8 m

iii) Το βάθος στο οποίο το κόστος της γεώτρησης δεν υπερβαίνει τις 20.000 δρχ. είναι

Α. 12 m **Β.** 10 m **Γ.** 8 m **Δ.** 7 m **Ε.** 6 m

iv) Με 30.000 δρχ. η γεώτρηση θα φθάσει σε βάθος

Α. 4 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 8 m **Ε.** 10 m

II. i) Πόσο κοστίζει το $25^{ο}$ μέτρο της γεώτρησης αυτής;

ii) Πόσο κοστίζει συνολικά η γεώτρηση αν φθάσει τα 60 m βάθος;

iii) Ένας δεύτερος αγρότης κάνει μια γεώτρηση του ίδιου βάθους και πληρώνει 18.000 δρχ. για κάθε μέτρο της. Πόσα μέτρα είναι το βάθος των γεωτρήσεων αν ξέρουμε ότι ο πρώτος έδωσε λιγότερα χρήματα;

43. ** Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της $1^{ης}$ ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της $2^{ης}$ 33 cm, στο τέλος της $3^{ης}$ 30 cm κ.λπ.

I.

i)	Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$	**Σ**	**Λ**
ii)	Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 36$	**Σ**	**Λ**
iii)	Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3	**Σ**	**Λ**
iv)	Στο τέλος της $5^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20 μέτρα	**Σ**	**Λ**
v)	Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λειώσει τελείως	**Σ**	**Λ**

II. i) Ποια από τις παρακάτω τριάδες είναι ύψη του κεριού στο τέλος τριών διαδοχικών ωρών:

Α. 21 , 23 , 25 **Β.** 18 , 20, 22 **Γ.** 24 , 25 , 26

Δ. 15 , 21, 27 **Ε.** 15 , 18 , 21

ii) Στο τέλος της $6^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι

Α. 25 cm **Β.** 20 cm **Γ.** 18 cm **Δ.** 21 cm **Ε.** 24 cm

iii) Το ύψος του κεριού θα γίνει μικρότερο από 18 cm στο τέλος της

Α. $4^{ης}$ ώρας **Β.** $6^{ης}$ ώρας **Γ.** $8^{ης}$ ώρας **Δ.** $10^{ης}$ ώρας **Ε.** $12^{ης}$ ώρας

iv) Το κερί **δεν** θα έχει λειώσει τελείως μετά από

Α. 25 ώρες **Β.** 20 ώρες **Γ.** 18 ώρες **Δ.** 15 ώρες **Ε.** 12 ώρες

v) Το ύψος που θα έπρεπε να έχει το κερί, για να λειώσει τελείως μετά από 24 ώρες είναι

Α. 59 cm **Β.** 66 cm **Γ.** 68 cm **Δ.** 69 cm **Ε.** 72 cm

III. α) Πόσο θα είναι το ύψος του στο τέλος της $8^{ης}$ ώρας;

β) Στο τέλος ποιας ώρας θα έχει ύψος 9 cm;

γ) Πόσο ήταν το ύψος την στιγμή που το ανάψαμε;

δ) Πόσες ώρες θα μείνει αναμμένο;

44. ** Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 55.000 δρχ. το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 3.500 δρχ. το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγουμένου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του $15^{ου}$ ορόφου από ένα του $7^{ου}$ ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 100.000 δρχ. το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγουμένου ορόφου και ο $17^{ος}$ όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

45. ** Α. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλησαν να γραφτούν στο βιβλίο Γκίνες κάνοντας ρεκόρ στο σχηματισμό της υψηλότερης ανθρώπινης πυραμίδας που θα ισορροπούσε για ένα λεπτό. Μπήκαν λοιπόν σε σειρές ως εξής: στην κορυφή ένα άτομο, στην επόμενη σειρά δύο, στην αμέσως πιο κάτω σειρά τρεις κ.λ.π. Έτσι κατάφεραν συνολικά 45 μαθητές να κάνουν το ρεκόρ.

α) Πόσες σειρές είχε η πυραμίδα που σχημάτισαν;

β) Πόσοι τουλάχιστον μαθητές θα χρειαστούν ώστε να σπάσει το ρεκόρ αυτό, αν σχηματίσουν με παρόμοιο τρόπο μια νέα πυραμίδα;

Β. Ένα μήνα μετά οι μαθητές ενός γειτονικού σχολείου σχημάτισαν με όμοιο τρόπο μια πυραμίδα υψηλότερη κατά 3 σειρές και έσπασαν το ρεκόρ.

α) Πόσοι συνολικά ήταν μαθητές αυτοί;

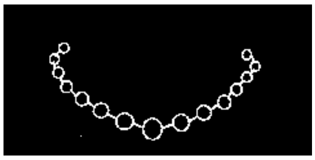
β) Αν οι μαθητές που παίρνουν μέρος στο σχηματισμό της πυραμίδας δεν ξεπερνούν τους 210, πόσες σειρές μπορούν να σχηματίσουν;

46. ** Μια ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας στην δεύτερη τρεις , στην τρίτη πέντε κ.λ.π.

α) Πόσοι θα είναι στην $12^{η}$ σειρά;

β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

7. ** Ένα κολιέ αξίας 650.000 δρχ. αποτελείται από 33 διαμάντια Το μεσαίο διαμάντι είναι και το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 1.000 δρχ. λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 1.500 δρχ. λιγότερο από το προηγούμενό του.



Α. α) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

β) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Β. Πόσες δρχ. είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

48. ** Α. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

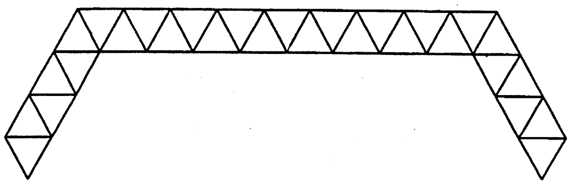
β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 4η έως την και την 10η σειρά;

Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.λ.π.

α) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

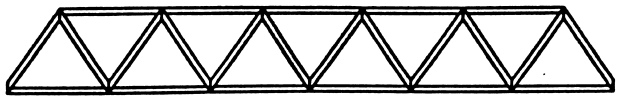
49. *** Στις σύγχρονες βιομηχανικές εγκαταστάσεις χρησιμοποιούνται για την στήριξη των οροφών ειδικές αψίδες (όπως αυτή στο παρακάτω σχήμα 1),



(Σχ. 1)

που τοποθετούνται επάνω σε τσιμεντένιες κολώνες.

Οι αψίδες αυτές σχηματίζονται από δοκάρια (όπως στο παρακάτω σχήμα 2),



(Σχ. 2)

διαφορετικού μήκους που αποτελούνται από ίσες μεταλλικές ράβδους.

Τα δοκάρια ονομάζονται με τον αριθμό που δείχνει το πλήθος των ράβδων της μεγαλύτερης πλευράς τους (π.χ. στο σχήμα 2 έχουμε δοκάρι νούμερο **6**).

Α. α) Πόσες ράβδους έχει ένα δοκάρι νούμερο **4**;

β) Πόσες ράβδους διαφορά έχουν δυο δοκάρια με διαδοχικά νούμερα;

Β. α) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον νούμερο **k** ενός δοκαριού, με το πλήθος **ρ** των ράβδων του.

β) Σε πόση απόσταση πρέπει να μπουν οι τσιμεντοκολώνες που θα στηρίξουν την αψίδα του σχήματος 1, αν κάθε ράβδος έχει μήκος 0,5 m;

50. ** Κατά τη διάρκεια έργων συντήρησης του οδοστρώματος ενός τμήματος της εθνικής οδού, είχαν τοποθετηθεί ειδικοί φωτεινοί σηματοδότες (σχήματος βέλους) που εμπόδιζαν την κυκλοφορία σε εκείνο το τμήμα του δρόμου. Οι σηματοδότες αυτοί ήταν τοποθετημένοι ανά 10 m. Μόλις τελείωσαν τα έργα, ένας εργάτης που βρισκόταν στον πρώτο σηματοδότη, πήρε εντολή να μεταφέρει όλους τους σηματοδότες δίπλα στον τελευταίο. Όμως, λόγω του μεγάλου βάρους του σηματοδότη, ο εργάτης μπορούσε να μεταφέρει μόνο ένα κάθε φορά. Όταν τελείωσε την μεταφορά, είχε καλύψει συνολικά 1,44 km.

α) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον πρώτο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

β) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

γ) Πόσοι ήταν οι σηματοδότες;

51. ** Ένας αθλητής μετά την αποθεραπεία του από ένα ατύχημα, άρχισε την Δευτέρα 19 Φεβρουαρίου 1996 νέες προπονήσεις. Ανάμεσα στις άλλες ασκήσεις έπρεπε να κάνει και κάμψεις (push ups) καθημερινά (ακόμα και τα Σάββατα και τις Κυριακές), σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	...
Αριθμός Κάμψεων	9	13	17	21	...

μέχρι να φθάσει τον αριθμό των 101 κάμψεων. Έπειτα θα συνέχιζε με 100 κάμψεις κάθε ημέρα εκτός Κυριακής.

α) Πόσες κάμψεις θα έκανε την Τετάρτη της επόμενης εβδομάδας;

β) Μετά από πόσες μέρες έφθασε τις 101 κάμψεις;

γ) Ποια ήταν η ημερομηνία της πρώτης Κυριακής που σταμάτησε τις κάμψεις;

52. Ένα παιδί παίζοντας με κύβους του 1 cm^3 έφτιαξε μια τετραγωνική πυραμίδα με 3 πατώματα. Το 1ο πάτωμα (η βάση) έχει επιφάνεια 25 cm^2, το 2ο (το μεσαίο) έχει επιφάνεια 9 cm^2 και το 3ο (η κορυφή) αποτελείται από ένα μόνο κύβο. Αν το παιδί έφτιαχνε μια παρόμοια πυραμίδα με 10 πατώματα,

α) πόσους κύβους θα περιείχε η βάση της;

β) πόσους κύβους θα είχε χρησιμοποιήσει;

γ) Αν είχε στη διάθεσή του 220 κύβους, πόσα πατώματα θα είχε η πυραμίδα του;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γεωμετρική πρόοδος η

Α. 10, 20, 30, … **Β.** 5, 15, 25, … **Γ.** 3, 6, 9, …
Δ. 4, 20, 100, … **Ε.** - 5, 10, 25, …

2. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 3$, αυτή είναι

Α. 4, 7, 10, 13, … **Β.** $4, 4\cdot3, 4\cdot6, \dots$ **Γ.** 4, 12, 36, …
Δ. 3, 12, 48, … **Ε.** $4, 4^3, 4^9, \dots$

3. * Αν 7, - 21, 63, … μια γεωμετρική πρόοδος, τότε ο λ είναι

Α. 3 **Β.** - 14 **Γ.** 14 **Δ.** -3 **Ε.** 4

4. * Ο $4^{ος}$ όρος της γεωμετρικής προόδου $-\frac{3}{4}$, 1, ...είναι

Α. $\frac{9}{16}$ **Β.** $-\frac{9}{16}$ **Γ.** $\frac{16}{9}$
Δ. $-\frac{16}{9}$ **Ε.** $\frac{3}{4}$

5. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 5$, $\lambda = 2$, τότε ο α_5 είναι

Α. - 25 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 10
Δ. 80 **Ε.** 320

6. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_4 = 375$, τότε ο λ είναι

Α. 378 **Β.** 372 **Γ.** 10 **Δ.** 5 **Ε.** 3

7. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\lambda = 2$ και $\alpha_6 = 448$, τότε ο α_1 είναι

Α. - 50 **Β.** 14 **Γ.** 600 **Δ.** - 100 **Ε.** 1200

8. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 2$, $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$, τότε η τάξη του όρου α_ν είναι

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 3

Δ. 1 **Ε.** 5

9. * Αν σε μία αύξουσα γεωμετρική πρόοδο $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_5 = 192$, τότε ο λ είναι

Α. - 4 **Β.** 180 **Γ.** 16

Δ. 4 **Ε.** 2

10. * Από τις παρακάτω γεωμετρικές προόδους είναι φθίνουσα η

Α. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \ldots$ **Β.** 4, 12, 36, ... **Γ.** - 30, 3, - 0,3, ...

Δ. $- 10, -5, - \frac{5}{2} \ldots$ **Ε.** 2, - 8, 32, ...

11. * Αν η γεωμετρική πρόοδος $\frac{x}{y^2}, \frac{x}{y}, \ldots$ είναι απολύτως γνησίως φθίνουσα, τότε

Α. $y \geq 0$ **Β.** $y < 0$ **Γ.** $|y| < 1$

Δ. $|x| < |y|$ **Ε.** $|y| > 1$

12. * Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$ (όπου x, y ομόσημοι), τότε έχουμε

Α. $\lambda = \frac{x \cdot y}{2}$ **Β.** $\lambda = \frac{x}{y}$ **Γ.** $\lambda = \frac{y^2}{x^2}$ **Δ.** $\lambda^2 = \frac{y}{x}$ **Ε.** $\lambda = \frac{x^2 \cdot y^2}{2}$

13. * Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου α·β, α,... είναι

Α. $\frac{1}{\alpha}$ **Β.** $\frac{1}{\beta}$ **Γ.** $\frac{\beta}{\alpha}$ **Δ.** $\frac{\alpha}{\beta}$ **Ε.** $\alpha^2 \frac{\beta}{2}$

14. * Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο $\alpha_5 = 48$ και $\alpha_7 = 192$, τότε το α_3 είναι

Α. - 12 **Β.** 12 **Γ.** 144 **Δ.** 36 **Ε.** 24

15. * Αν η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$ είναι το α_1 μιας γεωμετρικής προόδου και η μεγαλύτερη είναι ο λ της ίδιας προόδου, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι

Α. 1, 2, 4, 8, ... **Β.** - 1, 2, - 4, 8, ... **Γ.** 1, 3, 5, ...
Δ. 2, 3, 4, ... **Ε.** 3, 5, 7, ...

16. * Αν τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν άθροισμα 65, τότε αυτοί είναι

Α. 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$ **Β.** 7, 21, 36 **Γ.** - 24, - 12, - 6
Δ. 5, 15, 45 **Ε.** $\sqrt{11}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{43}$

17. * Ο αριθμός 6 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών

Α. 4 και 8 **Β.** - 2 και - 3 **Γ.** 3 και 12 **Δ.** 2 και 10 **Ε.** 5 και 7

18. * Αν οι αριθμοί x - 1, x, x + 2 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, ο x ισούται με

Α. - 2 **Β.** $\frac{2}{3}$ **Γ.** 4 **Δ.** 0 **Ε.** 2

19. * Αν οι x - 1, x + 1, x + 5 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. x = 1 **Β.** x = -1 **Γ.** x = 2
Δ. x = 3 **Ε.** $x \neq 0$

20. * Αν οι θετικοί αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}$, γ, α·β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \beta^2$ **Β.** $\gamma = |\beta|$ **Γ.** $\gamma = 2\alpha$ **Δ.** $\gamma = |\alpha|$ **Ε.** $\gamma = \alpha\beta$

21. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $y = \frac{z}{x}$ **Β.** $x = \frac{z}{y}$ **Γ.** $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ **Δ.** $\frac{x}{y} = \frac{z}{y}$ **Ε.** $y = \frac{x \cdot z}{2}$

22. * Αν οι γ, $\alpha \cdot \beta^3$, α·β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \alpha \cdot \beta^4$ **Β.** $\gamma = \alpha \cdot \beta^{-2}$ **Γ.** $\gamma = \beta^5$ **Δ.** $\gamma = \alpha \cdot \beta^5$ **Ε.** $\gamma = \beta^{-2}$

23. * Αν οι α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε από τις παρακάτω απαντήσεις **δεν** είναι πάντα σωστή η

Α. $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \delta$ **Β.** $\alpha \cdot \gamma = \beta^2$ **Γ.** $\beta \cdot \delta = \gamma^2$ **Δ.** $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$ **Ε.** $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \delta$

24.* Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$, $\lambda = 2$, τότε ο νιοστός όρος της είναι

Α. $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ **Β.** $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^{\nu-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu = - 2^\nu - 3$

Δ. $\alpha_\nu = 3^\nu + 2$ **Ε.** $\alpha_\nu = 3\ 2^\nu$

25. * Αν $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 4 \cdot \alpha_\nu$, τότε ο νιοστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

Α. $\alpha_\nu = - 12^\nu$ **Β.** $\alpha_\nu = 4\ \alpha_\nu - 1$ **Γ.** $\alpha_\nu = 4 \cdot 3^\nu$ **Δ.** $\alpha_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$ **Ε.** $\alpha_\nu = 2 \cdot 7^\nu$

26.* Αν μία γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_\nu = 2 \cdot 5^{\nu-1}$, τότε αυτή έχει

Α. $\alpha_1 = 10$, $\lambda = \frac{1}{2}$ **Β.** $\alpha_1 = 5$, $\lambda = 2$ **Γ.** $\alpha_1 = 2$, $\lambda = 5$

Δ. $\alpha_1 = 3$, $\lambda = 2$ **Ε.** $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 5$

27. * Στη γεωμετρική πρόοδο - 1, 2, - 4, ... το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της είναι

Α. - 21 **Β.** - 16 **Γ.** 8 **Δ.** 21 **Ε.** - 48

28. * Αν $α_1 = 8$ και $λ = 3$, τότε το S_4 είναι

Α. 720 **Β.** - 360 **Γ.** 320

Δ. 180 **Ε.** 240

29.* Αν $α_1 = 7$ και $S_4 = 280$, τότε το λ είναι

Α. 5 **Β.** - 2 **Γ.** $\frac{1}{7}$

Δ. 7 **Ε.** 3

30. * Σε μία γεωμετρική πρόοδο αν είναι $α_1 = 4$, $λ = 4$, $S_ν = 5460$, τότε ο ν είναι

Α. $\sqrt{21}$ **Β.** - 8 **Γ.** 4 **Δ.** 6 **Ε.** $\frac{13}{2}$

31. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $α_1 = 5$ και $λ = 2$, τότε το $S_ν$ είναι

Α. $S_ν = 5\cdot(2^ν - 1)$ **Β.** $S_ν = 5\cdot 2^ν$ **Γ.** $S_ν = 5\cdot 2^{ν+1}$

Δ. $S_ν = 5\cdot(2^ν + 3)$ **Ε.** $S_ν = 5\cdot 2^{ν-1}$

32. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο με $|λ| < 1$ το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 9 και $α_1 - α_2 = 4$, τότε η πρόοδος είναι

Α. - 8, 4, - 2, 1, ... **Β.** 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, ... **Γ.** 3, 6, 12, ...

Δ. 10, 6, 2, ... **Ε.**- 6, -10, $-\frac{50}{3}$, ...

33. * Για να είναι μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ γεωμετρική πρόοδος πρέπει

Α. η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή

Β. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων να είναι σταθερό $\lambda \in R^*$

Γ. το πηλίκο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό $\lambda \in R^*$

Δ. να είναι $\alpha_1 + \alpha_\nu = \lambda$ για κάθε $\nu \in N^*$

Ε. να είναι $\alpha_\nu^2 = \alpha_1 \cdot \lambda$ για κάθε $\nu \in N^*$

34. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ο λόγος λ είναι

Α. θετικός **Β.** $\neq 1$ **Γ.** ακέραιος

Δ. ίσος με ν **Ε.** σταθερός πραγματικός $\neq 0$

35. * Αν για τους όρους μιας ακολουθίας (α_ν) ισχύει $\alpha_{\nu+1} = c \cdot \alpha_\nu$ όπου $c \neq 0$, τότε

Α. η (α_ν) είναι πάντοτε γεωμετρική πρόοδος

Β. η (α_ν) είναι πάντοτε γνήσια αύξουσα

Γ. η (α_ν) είναι σταθερή

Δ. πρέπει $c \neq 1$

Ε. όλοι οι όροι είναι πάντοτε ομόσημοι

36. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

Α. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$ **Β.** $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot 4\lambda$ **Γ.** $\alpha_4 = \alpha_3 + \lambda$

Δ. $\alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda$ **Ε.** $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \alpha_3$

37. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

Α. $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu$ **Β.** $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu = \alpha_1^\nu \cdot \lambda$

Δ. $\alpha_\nu = \alpha_1^{\nu-1} \cdot \lambda$ **Ε.** $\alpha_\nu = (\alpha_1 \cdot \lambda)^\nu$

38. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $\lambda \neq 1$ το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της είναι

Α. $\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{\nu - 1} - 1}{\lambda - 1}$ **Β.** $\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{\nu} - 1}{\lambda - 1}$ **Γ.** $\alpha_\nu \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{\lambda - 1}$

Δ. $\alpha_1 \cdot \frac{\alpha_\nu - 1}{\lambda - 1}$ **Ε.** $\frac{\alpha_1 \cdot \alpha_\nu}{\lambda - 1}$

39. * Ο τύπος του αθροίσματος των ν όρων $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{\nu} - 1}{\lambda - 1}$ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ χρησιμοποιείται

Α. σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο

Β. σε γεωμετρική πρόοδο με $\lambda \neq 1$

Γ. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 > 0$ και $|\lambda| < 1$

Δ. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 > 0$ και $|\lambda| > 1$

Ε. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 < 0$ και $|\lambda| < 1$

40. * Ο τύπος του αθροίσματος των άπειρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου εφαρμόζεται

Α. μόνο αν είναι $\alpha_1 > 0$ και $|\lambda| < 1$

Β. μόνο αν είναι $\alpha_1 > 0$ και $|\lambda| > 1$

Γ. αν είναι $|\lambda| < 1$ ανεξάρτητα των τιμών του α_1

Δ. αν είναι $\alpha_1 > 0$ και $\lambda > 0$

Ε. αν είναι $\alpha_1 < 0$ και $\lambda < 0$

41. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $S_4 = \alpha$ και $S_5 = \beta$. Τότε ισχύει

Α. $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ **Β.** $\alpha_5 = \dfrac{\beta}{\alpha}$ **Γ.** $\alpha_1 = \dfrac{\beta - \alpha}{\lambda^4}$

Δ. $\alpha_5 = \dfrac{\beta - \alpha}{\lambda}$ **Ε.** $\alpha_5 = \beta - \alpha$

42. * Σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι

Α. το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων.

Β. το γινόμενο των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων.

Γ. το $\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \lambda^\nu$

Δ. το γινόμενο δύο οποιονδήποτε όρων της είναι ίσο με $\alpha_1 \cdot \alpha_\nu$

Ε. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων της είναι ίσο με $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_1}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους:

α)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	...	...	...
β)	...	...	6	- 2	...
γ)	2	...	8	...	...
δ)	...	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{1}{8}$	...

2. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους:

α)	2	...	128			
β)	2	...	...	128		
γ)	- 2	...	...	...	- 128	
δ)	- 2	...	...	...	...	- 128

3. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν ώστε οι παρακάτω γραμμές να είναι γεωμετρικές πρόοδοι (όπου x και y θετικοί):

α)	$\frac{x}{y}$	$x \cdot y$	...	...	...
β)	...	$x \cdot y$	...	$\frac{x}{y}$	...
γ)	...	$\frac{x}{y^2}$	...	...	$x \cdot y$
δ)	$\frac{x}{y^3}$	...	...	...	$x \cdot y^3$

4. ** α) Στην πρόοδο α_1, α_2, ..., α_{47} ο όρος που ισαπέχει με τον α_{13} από τα άκρα είναι ο .... ενώ αυτός που ισαπέχει με τον α_{32} είναι ο ....

β) Στην πρόοδο α_1, α_2, ..., α_{1999} ο μεσαίος όρος είναι ο ....

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε τους νιοστούς όρους, που υπάρχουν στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) 3, 12, 48, ... **2)** - 10, -5, $-\frac{5}{2}$, ... **3)** 24, 8, $\frac{8}{3}$, ...	**Α)** $\alpha_\nu = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1}$ **Β)** $\alpha_\nu = 3\cdot4^{\nu-1}$ **Γ)** $\alpha_\nu = 24\cdot3^{\nu-1}$ **Δ)** $\alpha_\nu = -10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ **Ε)** $\alpha_\nu = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}$

2. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων, που υπάρχουν στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) 5, 15, 45, ... **2)** 18, 6, 2, ... **3)** - 20, - 4, $-\frac{4}{5}$, ...	**Α)** $S_\nu = -27\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} - 1\right]$ **Β)** $S_\nu = 18\cdot(3^\nu - 1)$ **Γ)** $S_\nu = \frac{5}{2}\cdot(3^\nu - 1)$ **Δ)** $S_\nu = 25\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\nu} - 1\right]$ **Ε)** $S_\nu = 5\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\nu} - 1\right]$

3. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο με $|\lambda| < 1$ της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε το άθροισμα S των άπειρων όρων της, που γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) 27, 9, 3, ...	**Α)** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
	Β) $S = \dfrac{3}{4}$
2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{18}, \ldots$	**Γ)** $S = \dfrac{81}{2}$
	Δ) $S = \dfrac{27}{4}$
3) $\sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{9}}, \ldots$	**Ε)** $S = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$

4. * Σε κάθε τριάδα όρων γεωμετρικής προόδου της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε την ακέραιη θετική τιμή του x, της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α) $x = -8$
1) $x + 2, 4x, 7x + 2$	**Β)** $x = \dfrac{5}{2}$
	Γ) $x = 2$
2) $x, x - 3, x + 3$	**Δ)** $x = 1$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να σχηματισθούν οι γεωμετρικές πρόοδοι με:

α) $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 3$

β) $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

γ) $\alpha_1 = -20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

2. * Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. * α) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ να βρεθεί ο α_6

β) Αν $\alpha_6 = 448$ και $\lambda = 2$ να βρεθεί ο α_1

γ) Αν $\alpha_1 = 9$ και $\alpha_5 = 144$ να βρεθεί ο λ

δ) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$ να βρεθεί ο ν

4. * Να ορισθεί μία γεωμετρική πρόοδος, αν $\alpha_4 = -6$ και $\alpha_8 = -\frac{2}{27}$.

5. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_8 = 384$, να βρεθεί ο λ.

6. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

α) να βρεθεί το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της S_4 και

β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

7. ** Στην γεωμετρική πρόοδο

α) με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_\nu = \frac{1}{64}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ να βρείτε το πλήθος ν

β) με $\alpha_1 = -\frac{81}{4}$, $\alpha_5 = -\frac{1}{4}$ να βρείτε τον λόγο λ

8. ** Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος, όταν

α) με $\alpha_4 - \alpha_2 = 24$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 6$

β) με $\frac{\alpha_4}{\alpha_6} = 4$ και $\alpha_2 \cdot \alpha_8 = \frac{1}{4}$

9. ** α) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = 13$ $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$, να βρεθεί ο ν.

β) Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), αν έχουμε: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_\nu = 972$ και $S_\nu = 1456$

10. ** Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

11. ** Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

12. ** Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 625 και το τετράγωνο του τρίτου είναι τετραπλάσιο του γινομένου των δύο άκρων όρων.

13. ** Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

14. ** α) Να βρεθεί μία γεωμετρική πρόοδος που να είναι γνησίως αύξουσα και οι διαφορές του πρώτου από τον πέμπτο όρο της είναι 160 και του δεύτερου από τον τέταρτο όρο της είναι 48.

β) Να βρεθεί μία γεωμετρική πρόοδος που να είναι γνησίως φθίνουσα και η διαφορά του πέμπτου από τον πρώτο όρο της είναι 160 και του τέταρτου από τον δεύτερο όρο της είναι 48.

15. ** Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος αν ο έκτος όρος είναι τετραπλάσιος του τέταρτου όρου της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 216.

16. ** Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν ξέρουμε ότι ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο κατά 3 και ο τρίτος μικρότερος από τον τέταρτο κατά 12.

17. ** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81.

α) Να βρείτε τα γινόμενα $α_1 \cdot α_5$, $α_2 \cdot α_4$, $α_3^2$

β) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας

γ) Ισχύει $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$. Η ακολουθία 2, 4, 6, 12 είναι γεωμετρική πρόοδος;

δ) Τι συμπεραίνετε για το αντίστροφο του συμπεράσματος του (β);

18. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της: - 1, 2, - 4, 8, ...;

β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 85;

19. ** Να βρείτε το S_4 στη γεωμετρική πρόοδο με $α_{10} = 48\sqrt{2}$, $α_7 = 24$.

20. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο με $S_4 = 30$ και $α_5 + α_6 + α_7 + α_8 = 480$.

21. * Να βρείτε τα αθροίσματα άπειρων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων

α) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$

β) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, ...$

γ) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$

δ) $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, ...$

22. * Να βρεθεί ο $α_1$ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 100 και ο $λ = \frac{1}{2}$.

23. * Να βρεθεί ο λ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 30 και το $α_1 = 10$.

24. ** Μιας γεωμετρικής προόδου με $|λ| < 1$ το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι $\frac{25}{4}$ και $α_1 + α_2 = 6$. Να βρεθούν οι $α_1$ και λ.

25. ** Μια γεωμετρική πρόοδος $α_1, α_2, α_3, ...$ έχει $|λ| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $α_1^2, α_2^2, α_3^2, ...$ είναι και αυτή απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

β) Αν το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 6 και το άθροισμα των άπειρων όρων των τετραγώνων τους είναι 18, να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος.

26. ** Να βρεθούν τρεις αριθμοί που αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο, αν το άθροισμά τους είναι 65 και η διαφορά των άκρων όρων τους είναι 40.

27. ** Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο (α_ν), εάν

α) $\dfrac{S_{10}}{S_5} = 33$, $\alpha_1 = 2$

β) $S_3 = 26$ και η διαφορά $\alpha_4 - \alpha_1 = 52$.

28. ** Να βρείτε το άθροισμα $\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\nu^3} + \ldots$, αν ν φυσικός με $\nu \geq 2$.

29. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{8} + \ldots$

β) $6 - 1 + 3 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{27}{64} + \ldots$

γ) $\dfrac{2}{5} + 1 + \dfrac{4}{25} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{125} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{16}{625} - \dfrac{1}{8} + \ldots$

δ) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3^2} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{4}{3^4} + \ldots$

30. *** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^x = 2046$

β) $1 + x + x^2 + \ldots = 5$ με $0 < x < 1$

γ) $1 + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \ldots = 2$ με $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

δ) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\pi}{4}$ με $|x| < 1$

ε) $1 + |x| + |x^2| + |x^3| + \ldots = 5$ με $|x| < 1$

στ) $2^{x + x^2 + x^2 + \ldots} = 2\sqrt{2}$ με $|x| < 1$

ζ) $8^{1 + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \ldots} = 64$ με $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

31. ** Να βρείτε το $\theta \in [0, \pi]$, αν οι αριθμοί $\frac{\eta\mu\theta}{6}$, συνθ και εφθ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

32. ** Α. Αν α_ν, β_ν δυο γεωμετρικές πρόοδοι με λόγους λ_1, λ_2 αντίστοιχα και για κάθε ν είναι $\beta_\nu \neq 0$, εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος.

α) $\alpha_{2\nu+1}$

β) $|\alpha_\nu|$

γ) $2\alpha_\nu + 3$

δ) $(\alpha_\nu)^2$

ε) $\frac{1}{\beta_\nu}$

στ) $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_2}$, $\sqrt{\alpha_3}$, … (όπου $\alpha_\nu > 0$)

ζ) $\alpha_\nu \pm \beta_\nu$

η) $2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$

θ) $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$

ι) $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

Β. Στις περιπτώσεις που σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος, βρείτε τον αντίστοιχο νέο λόγο.

33. ** Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, α_μ και α_k είναι οι όροι της τάξεως μ και κ αντίστοιχα. Τότε ισχύει: $\alpha_\mu = \lambda^{\mu-k}\alpha_k$, $\mu, k \in N$

34. ** α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

β) Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να απλοποιήσετε την παράσταση: $\Pi = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 - (\alpha - \delta)^2$

35. ** Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$.

α) Να βρεθεί ο όρος $\alpha_{\nu+1}$.

β) Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λόγος λ και ο πρώτος της όρος α_1.

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

36. ** Δίνεται η ακολουθία με $S_ν = 2\,(3^ν - 1)$

α) Να βρεθεί το $S_{ν-1}$

β) Να βρεθεί το $α_ν$

γ) Να βρεθεί το $α_{ν+1}$

δ) Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λ και ο $α_1$.

ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

37. ** Δίνεται ο μεικτός περιοδικός $0,\overline{27}$ = 0,27 27 27 ....

α) Να γραφτεί σαν άθροισμα κλασμάτων με παρανομαστές δυνάμεις του 10.

β) Να γραφτεί στη μορφή $\frac{κ}{λ}$, όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί.

38. ** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΚ_1Λ_1$ είναι ισόπλευρο πλευράς α.

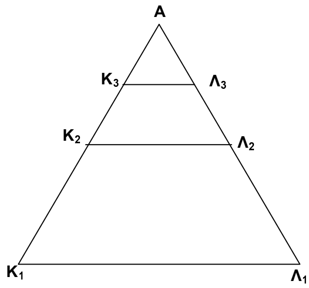
$Κ_2$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Κ_1$

$Λ_2$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Λ_1$

$Κ_3$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Κ_2$

$Λ_3$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Λ_2$

Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες:



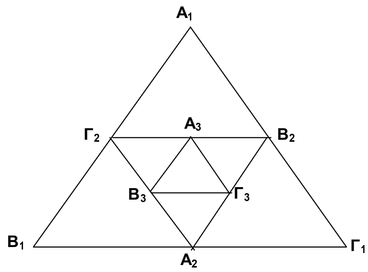
α)

Τρίγωνο	**Πλευρά**	**Περίμετρος**
$ΑΚ_1Λ_1$	$α_1 = α$	$Π_1 =$
$ΑΚ_2Λ_2$	$α_2 =$	$Π_2 =$
$ΑΚ_3Λ_3$	$α_3 =$	$Π_3 =$
	⋮	⋮
$ΑΚ_νΛ_ν$	$α_ν =$	$Π_ν =$

β) Εφαρμογή

Τρίγωνο	Πλευρά	Περίμετρος
$ΑΚ_1Λ_1$	$α_1 =$ 8 μέτρα	$Π_1 =$
$ΑΚ_2Λ_2$	$α_2 =$	$Π_2 =$
$ΑΚ_3Λ_3$	$α_3 =$	$Π_3 =$
	⋮	⋮
$ΑΚ_ρΛ_ρ$	$α_ρ =$	$Π_ρ < 1$ και $Π_{ρ+1} \geq 1$ μέτρο
	Μ	Μ
$ΑΚ_8Λ_8$	$α_8 =$	$Π_8 =$

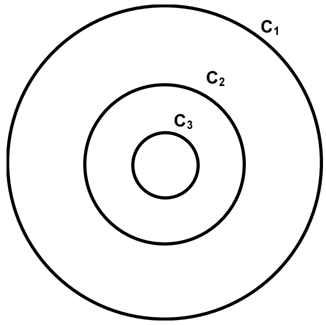
9. ** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $Α_2Β_2Γ_2$, όπου $Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$ τα μέσα των πλευρών του $Α_1Β_1Γ_1$. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $Α_3Β_3Γ_3$, όπου $Α_3$, $Β_3$, $Γ_3$ τα μέσα των πλευρών του $Α_2Β_2Γ_2$.



Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

	Πλευρά	Εμβαδόν	Περίμετρος
$Α_1Β_1Γ_1$	$α_1 = α$	$Ε_1 =$	$Π_1 =$
$Α_2Β_2Γ_2$	$α_2 =$	$Ε_2 =$	$Π_2 =$
$Α_3Β_3Γ_3$	$α_3 =$	$Ε_3 =$	$Π_3 =$
…	…	…	…
$Α_{10}Β_{10}Γ_{10}$	$α_{10} =$	$Ε_{10} =$	$Π_{10} =$
…	…	…	…
Αθροίσματα S απείρων όρων	$S_{πλ} =$	$S_Ε =$	$S_Π =$

0. ** Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος c_1 έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ. Οι ομόκεντροί του κύκλοι c_2 και c_3 έχουν ακτίνα $\frac{R}{2}$ και $\frac{R}{4}$ αντιστοίχως. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία να κατασκευάζουμε κύκλους (κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα απ' αυτόν).



i) Να βρείτε, συναρτήσει του R, την ακτίνα των c_5, c_6

ii) Να βρείτε το μήκος του κύκλου c_7

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου c_{12}

iv) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 5 πρώτων κύκλων

v) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο.

41. ** Ένας ασθενής παίρνει δόση των 10 mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ώρου στο αίμα του ασθενούς ενώ το υπόλοιπο παραμένει στο αίμα του ασθενούς.

α) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής μόλις πάρει την $2^η$ δόση του φαρμάκου.

β) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του πρώτου 12ώρου.

γ) Αν είναι γνωστό ότι, όταν η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς υπερβεί τα 50 mg, παρουσιάζονται επικίνδυνες παρενέργειες, δείξτε ότι ο ασθενής δεν κινδυνεύει ακόμη και με ισόβια λήψη του φαρμάκου.

δ) Ποια είναι η ποσότητα της επικίνδυνης δόσης.

42. ** Ένας φυσιοδίφης ανακάλυψε σε ζούγκλα του Αμαζονίου ένα περίεργο είδος φιδιού. Μελετώντας το παρατήρησε ότι, όταν συμπληρώσει τον 1ο χρόνο ζωής, έχει σχηματισθεί στο μέσο του σώματος του μια κόκκινη λωρίδα (Κ). Με τη συμπλήρωση του 2ου χρόνου του, στο μέσο του σώματός του έχει σχηματισθεί μια μαύρη λωρίδα (Μ) και δεξιά και αριστερά της από μια κόκκινη (Κ). Όταν συμπληρώσει τον 3ο χρόνο, η μαύρη λωρίδα παραμένει στο μέσο του σώματος του φιδιού, ενώ κάθε κόκκινη έχει δώσει τη θέση της σε μια τριάδα (Κ) - (Μ) - (Κ). Και συνεχίζει να αναπτύσσεται κάθε χρόνο με το ίδιο μοτίβο.

Α. α) Πόσες κόκκινες (Κ) και πόσες μαύρες (Μ) λωρίδες θα έχει το φίδι μόλις κλείσει 6 χρόνια ζωής;

β) Να γενικεύσετε για ν χρόνια.

Β. Κάποια στιγμή μετρήθηκαν 255 λωρίδες στο σώμα του φιδιού.

α) Πόσες από αυτές είναι κόκκινες;

β) Πόσα χρόνια ζωής είχε κλείσει το φίδι;

γ) Να γενικεύσετε για $N = 2^{\nu} + 1$ λωρίδες.

Γ. Οι παρατηρήσεις έδειξαν ακόμη ότι οι λωρίδες έχουν το ίδιο πλάτος και, όταν συμπληρώσει το 10ο χρόνο ζωής, το μήκος του φθάνει τα 10,23 m, ενώ όλο του το σώμα καλύπτεται από τις λωρίδες. Να βρείτε το πλάτος κάθε λωρίδας.

43. ** Ένα αυτοκίνητο κοστίζει σήμερα 10.000.000 δρχ. Είναι γνωστό ότι στο τέλος κάθε χρόνου χάνει το $\frac{1}{10}$ της αξίας που έχει στην αρχή του χρόνου.

I. Τότε

i) Η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι 9.500.000 δρχ. **Σ** **Λ**

ii) Οι αξίες στο τέλος κάθε χρόνου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$ **Σ** **Λ**

iii) Μετά την συμπλήρωση 2 χρόνων από την αγορά του η αξία του αυτοκινήτου μειώθηκε κατά 2.000.000 δρχ. **Σ** **Λ**

iv) Η αξία του είναι μεγαλύτερη από 5.000.000 δρχ. στο τέλος του 5^{ου} χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**

v) Η αξία του είναι μικρότερη από 4.000.000 δρχ. στο τέλος του 8^{ου} χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**

II. i) Η αξία του αυτοκινήτου στην αρχή του 3^{ου} χρόνου από την αγορά του είναι:

Α. 7.000.000 δρχ. **Β.** 7.200.000 δρχ. **Γ.** 7.290.000 δρχ.
Δ. 8.000.000 δρχ. **Ε.** 8.100.000 δρχ.

ii) Με την συμπλήρωση 3 χρόνων από την αγορά του η αξία του μειώθηκε κατά

Α. 4.000.000 δρχ. **Β.** 3.200.000 δρχ. **Γ.** 2.710.000 δρχ.
Δ. 1.900.000 δρχ. **Ε.** 1.710.000 δρχ.

iii) Η αξία του αυτοκινήτου γίνεται μικρότερη από 6.000.000 δρχ. στο τέλος του

Α. 3^{ου} χρόνου **Β.** 4^{ου} χρόνου **Γ.** 5^{ου} χρόνου
Δ. 6^{ου} χρόνου **Ε.** 7^{ου} χρόνου

44. ** α) Να συγκρίνετε τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών: 2, 8.

β) Δείξτε ότι η σχέση που θα βρείτε ισχύει γενικά για κάθε ζεύγος θετικών x, y.

45. ** Αν α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{\alpha - \beta}$, $\frac{1}{\alpha - \gamma}$, $\frac{1}{\alpha + \beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

46. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) αν αυξηθεί ο δεύτερος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική

iii) αν αυξηθεί και ο τρίτος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.

47. ** Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

ii) έχουν άθροισμα 15

iii) αν σ' αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

48. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) ελαττώνοντας τον τρίτο κατά 4 γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

iii) ελαττώνοντας τον δεύτερο και τον τρίτο της αριθμητικής προόδου κατά 1 σχηματίζεται πάλι γεωμετρική πρόοδος.

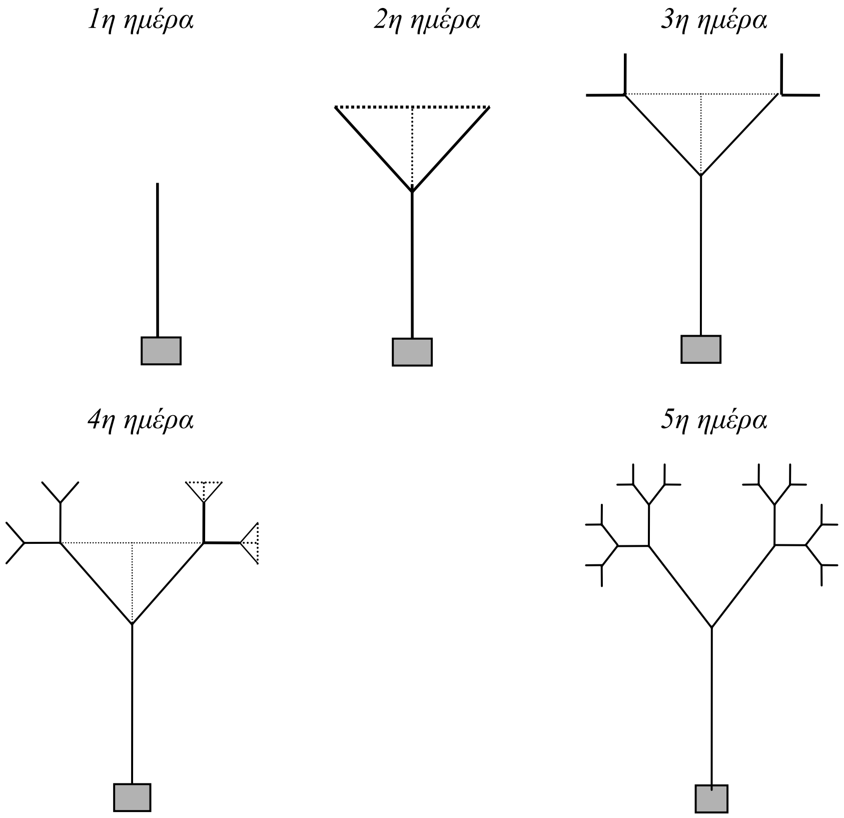
49. ** Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

iii) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

50. *** Το απειρόδενδρο είναι ένα φυτό εσωτερικού χώρου που μεγαλώνει με ένα παράξενο τρόπο. Την 1η μέρα υψώνεται κατά 1m. Τη 2η αναπτύσσονται δυο νέα κλαδιά, μήκους $\frac{1}{2}$ m το καθένα, κάθετα μεταξύ τους. Την επομένη μέρα εμφανίζονται σε κάθε άκρο δυο νέα κλαδιά, κάθετα μεταξύ τους και μισά σε μήκος από τα κλαδιά που είχαν εμφανιστεί την προηγούμενη μέρα (δηλ. μήκους $\frac{1}{4}$ m το καθένα). Και αυτό συνεχίζεται καθημερινά (βλ. σχήμα).



Είναι δυνατό ένα τέτοιο δένδρο να χωρέσει στο σαλόνι σας, χωρίς να εμποδίζεται η ανάπτυξη του λόγω χώρου;

51. ** Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα 12^α γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 15.000 και κάθε επόμενα γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 3.000 μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του.

Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: "Θα σου δώσω τώρα 500 δρχ. και κάθε επόμενα γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό". Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα 18^α γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.

α) Δικαιολογήσετε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.

β) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση έως και τα 21^α γενέθλιά του και πόσα θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1. * Ο νιοστός όρος α_ν μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$. **Σ** **Λ**

2. * Ο νιοστός όρος α_ν μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$. **Σ** **Λ**

3. * Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot\nu}{2}$. **Σ** **Λ**

4. * Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu = \dfrac{\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]\nu}{2}$. **Σ** **Λ**

5. * Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$. **Σ** **Λ**

6. * Το άθροισμα των απείρων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι $S = \dfrac{\alpha_1}{\lambda - 1}$ **Σ** **Λ**

7. * Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. **Σ** **Λ**

8. * Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\beta}$. **Σ** **Λ**

9. * Το άθροισμα $S_\nu = 1 + 2 + ... + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$. **Σ** **Λ**

0. * Η ακολουθία 2, 5, 8, ... είναι γεωμετρική πρόοδος. **Σ** **Λ**

1. * Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ... είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ** **Λ**

2. * Στην αριθμητική πρόοδο 2, 7, 12, 17, ... η διαφορά ω είναι 5. **Σ** **Λ**

3. * Στη γεωμετρική πρόοδο 100, 50, 25, ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

4. * Στη γεωμετρική πρόοδο 18, -9, $\frac{9}{2}$, - $\frac{9}{4}$ ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

5. * Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$ είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ** **Λ**

6. * Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος. **Σ** **Λ**

7. * Σε μία αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 5$ και ω = - 3 είναι $S_\nu = \frac{(13 - 3\nu)\nu}{2}$ **Σ** **Λ**

8. * Η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11, ... έχει $S_\nu = 4^\nu$-1. **Σ** **Λ**

9. * Η γεωμετρική πρόοδος 4, 8, 16, 32, ... έχει $S_\nu = 4\ (2^\nu - 1)$. **Σ** **Λ**

0. * Η γεωμετρική πρόοδος 100, 50, 25, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 200. **Σ** **Λ**

1. * Η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 6. **Σ** **Λ**

2. * Η γεωμετρική πρόοδος - 2, 4, - 8, 16, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 2. **Σ** **Λ**

3. * Σε μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 20$ και λ = $\frac{1}{2}$ είναι $S_\nu = 40$. **Σ** **Λ**

4. * Η αριθμητική πρόοδος - 5, - 8, - 11, ... έχει α_ν = - 3ν-2. **Σ** **Λ**

5. * Η γεωμετρική πρόοδος 2, 6, 18, ... έχει $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^{\nu-1}$. **Σ** **Λ**

6. * Σε μια αριθμητική πρόοδο με $α_1 = -3$ και $ω = 5$ το $α_ν = 3 \cdot 5^{ν-1}$. **Σ** **Λ**

7. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $α_1 = 4$ και $λ = 2$ το $α_ν = 2ν + 2$. **Σ** **Λ**

8. * Η αριθμητική πρόοδος 24, 17, 10, ... είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

9. * Η γεωμετρική πρόοδος 5, 10, 20, ... είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

0. * Οι αριθμοί 7, 14, 21 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Σ** **Λ**

1. * Οι αριθμοί 3, 6, 12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Σ** **Λ**

2. * Το 25 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών 5 και 45. **Σ** **Λ**

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

1ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Αριθμητικές πρόοδοι

1ο Θέμα

Α. α) Πότε μια ακολουθία ($α_ν$) είναι αριθμητική πρόοδος;

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς α, β, γ ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Β. α) Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η

Α. 3, 6, 8, 10, 11, ...

Β. 2, 4, 8, 16, 32, ...

Γ. -3, 1, 5, 9, 13 , ...

Δ. -3, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ...

Ε. $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, ...$

β) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $α_1 = 11$ και $ω = -3$. Τότε οι **θετικοί** της όροι είναι οι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** όλοι οι όροι της

γ) Ο 15 είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών

Α. 5 και 20 **Β.** -5 και -25 **Γ.** -9 και -21 **Δ.** 9 και 21 **Ε.** 9 και -21

δ) i) Ένας μαθητής ύψους 1,7 m στέκεται μπροστά σε μια σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18 cm. Το πρώτο σκαλοπάτι της σκάλας που βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από τον μαθητή είναι το

Α. όγδοο **Β.** δέκατο **Γ.** ενδέκατο **Δ.** δωδέκατο **Ε.** εικοστό

ii) **Δεν** υπάρχει σκαλοπάτι που να είναι σε ύψος (πάνω από το έδαφος)

Α. 36 cm **Β.** 54 cm **Γ.** 72 cm **Δ.** 1,44 m **Ε.** 1,56 m

2^{o} Θέμα

α) Να βρείτε το πλήθος των διψήφιων αρτίων αριθμών.

β) Να βρείτε το άθροισμα των διψήφιων αρτίων αριθμών.

γ) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.

δ) Να βρείτε την αριθμητικό πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της είναι ίσο με - 3 και το άθροισμα των 5 όρων της είναι ίσο με 10.

2ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Γεωμετρικές πρόοδοι

$1^{ο}$ Θέμα

Α. α) Ποια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος;

β) Ποια σχέση συνδέει τον $α_ν$ με τον $α_1$ και τον λ;

γ) Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να διατυπώσετε και να αποδείξετε τη σχέση που τους συνδέει.

Β. α) Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τους νιοστούς όρους της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1) 3, 12, 48, ... **2)** $-10, -5, -\frac{5}{2}, ...$ **3)** $24, 8, \frac{8}{3}, ...$	**Α)** $α_ν = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{ν-1}$ **Β)** $α_ν = 3\cdot 4^{ν-1}$ **Γ)** $α_ν = 24\cdot 3^{ν-1}$ **Δ)** $α_ν = -10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{ν-1}$ **Ε)** $α_ν = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{ν-1}$

Απάντηση:

1	**2**	**3**
……	……	……

β) Αν οι θετικοί αριθμοί $\frac{α}{β}$, γ, α·β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $γ = β^2$ **Β.** $γ = |β|$ **Γ.** $γ = 2α$ **Δ.** $γ = |α|$ **Ε.** $γ = α\cdot β$

γ) Για να είναι μία ακολουθία $α_1$, $α_2$, ... $α_ν$ γεωμετρική πρόοδος πρέπει

Α. η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Β. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων να είναι σταθερό $λ \in R^*$

Γ. το πηλίκο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό $λ \in R^*$

Δ. να είναι $α_1 + α_ν = λ$ για κάθε $ν \in N^*$

Ε. να είναι $α_ν^2 = α_1 \cdot λ$ για κάθε $ν \in N^*$

δ) Ο τύπος του αθροίσματος των άπειρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου εφαρμόζεται

Α. μόνο αν είναι $α_1 > 0$ και $|λ| < 1$

Β. μόνο αν είναι $α_1 > 0$ και $|λ| > 1$

Γ. αν είναι $|λ| < 1$ ανεξάρτητα των τιμών του $α_1$

Δ. αν είναι $α_1 > 0$ και $λ > 0$

Ε. αν είναι $α_1 < 0$ και $λ < 0$

ε) Σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι

Α. το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων.

Β. το γινόμενο των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων.

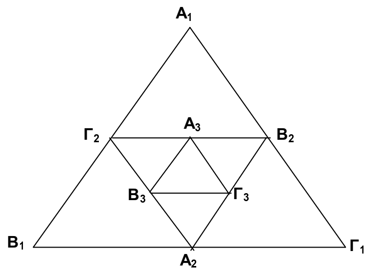
Γ. το $α_1 \cdot α_ν = λ^ν$

Δ. το γινόμενο δύο οποιονδήποτε όρων της είναι ίσο με $α_1 \cdot α_ν$

Ε. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων της είναι ίσο με $\frac{α_ν}{α_1}$

2^{o} Θέμα

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ όπου A_2, B_2, Γ_2 τα μέσα των πλευρών του $A_1B_1\Gamma_1$. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_3B_3\Gamma_3$ όπου A_3, B_3, Γ_3 τα μέσα των πλευρών του $A_2B_2\Gamma_2$.



Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

	Πλευρά	**Εμβαδόν**	**Περίμετρος**
$A_1B_1\Gamma_1$	$\alpha_1 = \alpha$	$E_1 =$	$\Pi_1 =$
$A_2B_2\Gamma_2$	$\alpha_2 =$	$E_2 =$	$\Pi_2 =$
$A_3B_3\Gamma_3$	$\alpha_3 =$	$E_3 =$	$\Pi_3 =$
…	…	…	…
$A_{10}B_{10}\Gamma_{10}$	$\alpha_{10} =$	$E_{10} =$	$\Pi_{10} =$
…	…	…	…
Αθροίσματα S απείρων όρων	$S_{\pi\lambda} =$	$S_E =$	$S_\Pi =$

3ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: **Πρόοδοι** *(επαναληπτικό)*

1ο Θέμα

Α. α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $\lambda \neq 1$ το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της είναι

Α. $\alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^{\nu-1}-1}{\lambda-1}$ **Β.** $\alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^{\nu}-1}{\lambda-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu \cdot \dfrac{\alpha_1-1}{\lambda-1}$

Δ. $\alpha_1 \cdot \dfrac{\alpha_\nu-1}{\lambda-1}$ **Ε.** $\dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_\nu}{\lambda-1}$

β) Να αποδείξετε τον τύπο που επιλέξατε

Β. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = \dfrac{1}{4}$

α) να βρεθεί το άθροισμα S_4 των τεσσάρων πρώτων όρων και

β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

2ο Θέμα

Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 55.000 δρχ. το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 3.500 δρχ. το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγουμένου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 10ου ορόφου από ένα του 7ου ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 100.000 δρχ. το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγουμένου ορόφου και ο 17ος όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

4ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: **Πρόοδοι** *(επαναληπτικό)*

1ο Θέμα

Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της 1ης ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της 2ης 33 cm, στο τέλος της 3ης 30 cm κ.λπ.

I.

i)	Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$	**Σ**	**Λ**
ii)	Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 36$	**Σ**	**Λ**
iii)	Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3	**Σ**	**Λ**
iv)	Στο τέλος της 5ης ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20 μέτρα	**Σ**	**Λ**
v)	Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λειώσει τελείως	**Σ**	**Λ**

II. i) Ποια από τις παρακάτω τριάδες είναι ύψη του κεριού στο τέλος τριών διαδοχικών ωρών:

Α. 21 , 23 , 25 **Β.** 18 , 20, 22 **Γ.** 24 , 25 , 26
Δ. 15 , 21, 27 **Ε.** 15 , 18 , 21

ii) Στο τέλος της 6ης ώρας το ύψος του κεριού θα είναι

Α. 25 cm **Β.** 20 cm **Γ.** 18 cm **Δ.** 21 cm **Ε.** 24 cm

iii) Το ύψος του κεριού θα γίνει μικρότερο από 18 cm στο τέλος της

Α. 4ης ώρας **Β.** 6ης ώρας **Γ.** 8ης ώρας **Δ.** 10ης ώρας **Ε.** 12ης ώρας

iv) Το κερί **δεν** θα έχει λειώσει τελείως μετά από

Α. 25 ώρες **Β.** 20 ώρες **Γ.** 18 ώρες **Δ.** 15 ώρες **Ε.** 12 ώρες

v) Το ύψος που θα έπρεπε να έχει το κερί για να λειώσει τελείως μετά από 24 ώρες είναι

Α. 59 cm **Β.** 66 cm **Γ.** 68 cm **Δ.** 70 cm **Ε.** 72 cm

2^o Θέμα

Δίνεται η ακολουθία με $S_ν = 2\ (3^ν - 1)$

α) Να βρεθεί το $S_{ν-1}$

β) Να βρεθεί ο $α_ν$

γ) Να βρεθεί ο $α_{ν+1}$

δ) Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λ και ο $α_1$.

ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε για να έχουμε άθροισμα 484;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**	**17.**	**Γ**	**32.**	**Γ**
2.	**Ε**	**18.**	**Γ**	**33.**	**Ε**
3.	**Δ**	**19.**	**Ε**	**34.**	**Δ**
4.	**Δ**	**20.**	**Δ**	**35.**	**Δ**
5.	**Α**	**21.**	**Γ**	**36.**	**Δ**
6.	**Δ**	**22α.**	**Β**	**37.**	**Γ**
7.	**Β**	**22β.**	**Ε**	**38.**	**Δ**
8.	**Β**	**23.**	**Δ**	**39.**	**Δ**
9.	**Δ**	**24.**	**Δ**	**40.**	**Γ**
10.	**Ε**	**25.**	**Ε**	**41.**	**Δ**
11.	**Γ**	**26.**	**Ε**	**42.**	**Γ**
12.	**Ε**	**27.**	**Δ**	**43.**	**Α**
13.	**Γ**	**28.**	**Γ**	**44.**	**Ε**
14.	**Ε**	**29.**	**Δ**	**45.**	**Γ**
15.	**Δ**	**30.**	**Δ**	**46.**	**Γ**
16.	**Γ**	**31.**	**Γ**	**47.**	**Δ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. **α)** 11 • 20 • 23 **β)** 13 • 19 **γ)** 3k+6 • 5k + 12 **δ)** 3x + 1 • 9x + 4 • 11x + 5

2. **α)** - 3 • - 1 • 3 • 9 • 15 **β)** - 25 • - 4 • - 7 • - 13 • - 19

3. **α)** 19 • 27 **β)** 2 • 11 **γ)** 11 • 25 **δ)** 17 • 49 • 81

4. α) 40 **β)** 30 • 50 **γ)** 25 • 40 • 55 **δ)** 22 • 34 • 46 • 58

5. α) x - 3y • x - 5y • x - 7y **β)** x - 2y • x • x + 2y

γ) x - 5y • x - y • x + y **δ)** $x + \frac{3}{2}y$ • x • $x - \frac{3}{2}y$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Α
2	Ε
3	Γ
4	Δ

2.

1	Α
2	Γ
3	Β
4	ΣΤ

3.

1	Β
2	Γ
3	ΣΤ
4	Α

4.

1	Β
2	Α
3	Ε

5.

1	Β
2	Δ
3	ΣΤ
4	Γ

6.

1	ΣΤ
2	Β
3	Δ
4	Ε

7.

1	Γ
2	Δ
3	Α

8.

1	Γ
2	Α
3	Δ

9.

1	Α
2	Β
3	Ε
4	Δ

10.

1	Δ
2	Α
3	Β

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $\alpha_1 = 7$ $\alpha_2 = 11$ $\alpha_3 = 15$ $\alpha_4 = 19$

β) $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 3$ $\alpha_3 = 1$ $\alpha_4 = 3$

γ) $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ $\alpha_3 = \frac{3}{4}$ $\alpha_4 = \frac{4}{5}$

δ) $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 2$ $\alpha_3 = \frac{2}{7}$ $\alpha_4 = \frac{14}{13}$

2. **α)** $\alpha_{\nu+1} = 2 + \alpha_\nu$ & $\alpha_1 = -1$ **β)** $\beta_{\nu+1} = 3\beta_\nu$ & $\beta_1 = 15$

γ) $\gamma_{\nu+1} = 2^\nu + \gamma_\nu$ & $\gamma_1 = 3$

3. **α)** $\alpha_\nu = \nu - 2$ **β)** $\beta_\nu = 15 \cdot 3^{\nu-1}$ **γ)** $\gamma_\nu = 1 + 2^\nu$

4. $\omega = 8$ & $\alpha_{10} = 78$

5. **α)** $\nu = 14$ **β)** $\alpha_{14} = 94$

6. $\omega = 3$ & $\alpha_1 = 2$

7. **α)** $\omega = 2$ & $\alpha_1 = -5$ **β)** $\omega = \frac{3}{2}$ & $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ή $\omega = -\frac{3}{2}$ & $\alpha_1 = \frac{13}{2}$

8. **α)** $\omega = -4$ & $\alpha_1 = 63$ **β)** 16

9. $\omega = 3$ & $\alpha_1 = -4$

10. 4

11. $\omega = 3$ & $\alpha_1 = 2$ ή $\omega = -3$ & $\alpha_1 = 23$

12. **α)** 13 **β)** 315

13. **α)** $\omega = 4$ & $\alpha_1 = 3$ **β)** 10

14. $\omega = 3$ & $\alpha_1 = -6$ ή $\omega = -3$ & $\alpha_1 = 24$

17. **β)** $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha + \beta + \gamma$, $\omega_1 \neq 0$

19. 2, 11, 20

20. 1, 3, 5, 7 ή 7, 5, 3, 1

21. $\omega = \frac{1}{3}$

22. 40

23. **α)** 45, 2475 **β)** 45, 2430 **γ)** 90, 4905 **δ)** 22, 1188

24. **α)** 63 **β)** 9

25. 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31

26. 8

27. 30°, 60°, 90°

29. ΑΒ = 7 cm, ΒΓ = 9 cm, ΓΔ = 11 cm, ΔΕ = 13 cm

30. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{2R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

32. **-** ν *αν ν άρτιος* ή ν *αν ν περιττός*.

Υπόδειξη: Να βρείτε χωριστά το άθροισμα των θετικών όρων και των αρνητικών στις περιπτώσεις i) ν άρτιος και ii) ν περιττός

i) ν = 2k. Στην περίπτωση αυτή οι θετικοί όροι είναι k το πλήθος, το ίδιο και οι αρνητικοί.

ii) ν = 2k + 1. Εδώ οι θετικοί όροι είναι k + 1, ενώ οι αρνητικοί k

33. ***α)*** 41 **β)** $S_{20} = 4220$

34. ***α)*** $\dfrac{(4+3\nu)\cdot(\nu+1)}{2}$ **β)** $(3 + \nu)\cdot(\nu + 1)$

Υπόδειξη: **α)** Βρείτε πρώτα την τάξη μ του όρου 2 + 3ν χρησιμοποιώντας τον τύπο $\alpha_\mu = \alpha_1 + (\mu - 1)\omega$ για $\alpha_\mu = 2 + 3\nu$.

β) Εργαστείτε με όμοιο τρόπο.

35. ***α)*** x = 1 **β)** x = 55

Υπόδειξη: **α)** Αν μ το πλήθος των προσθετέων τότε το Α΄ μέλος = μx + (2 + 5 + … + 29). Το πλήθος μ βρίσκεται από την τάξη του όρου 29 της προόδου 2, 5, …, 29 της παρένθεσης.

β) Να βρείτε πρώτα την τάξη του όρου x.

36. ***α)*** 3ν + 5 **γ)** 1455 **δ)** 20

37. ***α)*** $3\nu^2 - 5\nu + 2$ **β)** 6ν - 2 **γ)** 6ν + 4 **ε)** 17

38. $\alpha_1 = 1$ & $\omega = 1$

39. $\alpha_1 = 2$ & $\omega = 4$

40. Α. **α)** ναι **β)** όχι **γ)** ναι **δ)** όχι **ε)** όχι
στ) ναι **ζ)** ναι **η)** ναι **θ)** όχι **ι)** όχι
Β. **α)** $2\omega_1$ **γ)** $2\omega_1$ **στ)** $\omega_1 + \omega_2$
ζ) $\omega_1 - \omega_2$ **η)** $2\omega_1 + 3\omega_2$

42. Ι. i) *Βάθος:* 12ο m • *Κόστος 4ου m:* 3.500 δρχ.
Κόστος γεώτρησης: 4ου m = 11.000 δρχ. • 12ου m = 57.000 δρχ.
ii) Ε **iii)** Ε **iv)** Δ
ΙΙ. i) 14.000 δρχ. **ii)** 1.005.000 δρχ. **iii)** λιγότερο από 65 m

43. Ι. i) Λ **ii)** Σ **iii)** Σ **iv)** Λ **v)** Λ
ΙΙ. i) Ε **ii)** Δ **iii)** Γ **iv)** Ε **v)** Ε
ΙΙΙ. α) 15 cm **β)** 10 **γ)** 39 cm **δ)** 13 ώρες

44. α) 69.000 δρχ. **β)** 28.000 δρχ. **γ)** από τον 14ο όροφο και άνω **δ)** 44 γραφεία

45. Α. α) 9 **β)** 55
Β. α) 78 **β)** 20

46. α) 23 **β)** 18

47. Α. α) 16.000 δρχ. **β)** 24.000 δρχ.
Β. 30.000 δρχ.

48. Α. α) 34 **β)** 196
Β. α) 11η σειρά **β)** 55

49. Α. α) 15 **β)** 4
Β. α) $\rho = 4k - 1$ **β)** 5,5 m
Υπόδειξη: Στηριχθείτε στο σχήμα.

50. α) 1 **β)** 2 **γ)** 13

51. α) 45 **β)** 24 **γ)** 17 Μαρτίου 1996
Υπόδειξη: Το έτος είναι δίσεκτο.

52. α) 19 **β)** 190 **γ)** 11

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**	**15.**	**Α**	**29.**	**Ε**
2.	**Γ**	**16.**	**Δ**	**30.**	**Δ**
3.	**Δ**	**17.**	**Γ**	**31.**	**Α**
4.	**Γ**	**18.**	**Ε**	**32.**	**Β**
5.	**Δ**	**19.**	**Δ**	**33.**	**Γ**
6.	**Δ**	**20.**	**Δ**	**34.**	**Ε**
7.	**Β**	**21.**	**Γ**	**35.**	**Α**
8.	**Ε**	**22.**	**Δ**	**36.**	**Δ**
9.	**Δ**	**23.**	**Ε**	**37.**	**Β**
10.	**Α**	**24.**	**Α**	**38.**	**Β**
11.	**Γ**	**25.**	**Δ**	**39.**	**Β**
12.	**Δ**	**26.**	**Γ**	**40.**	**Γ**
13.	**Β**	**27.**	**Δ**	**41.**	**Ε**
14.	**Β**	**28.**	**Γ**	**42.**	**Β**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. **α)** 1 • - 2 • 4 **β)** 54 • -18 • $\frac{2}{3}$ **γ)** ± 4 • ± 16 • 32 **δ)** 1 • $\frac{1}{4}$ • $\frac{1}{16}$

2. **α)** ± 16 **β)** 8 • 32

γ) $\pm 4\sqrt{2}$ • - 16 • $\pm 32\sqrt{2}$ **δ)** $-4\sqrt[5]{2}$ • $-8\sqrt[5]{2^2}$ • $-16\sqrt[5]{2^3}$ • $-32\sqrt[5]{2^4}$

3. **α)** $xy^3 \bullet xy^5 \bullet xy^7$ **β)** $\pm xy^2 \bullet \pm x \bullet \pm \dfrac{x}{y^2}$

γ) $\dfrac{x}{y^3} \bullet \dfrac{x}{y} \bullet x$ **δ)** $\dfrac{x\sqrt{y}}{y^2} \bullet x \bullet xy\sqrt{y}$

4. **α)** $\alpha_{35} \bullet \alpha_{16}$ **β)** α_{1000}

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Β
2	Δ
3	Α

2.

1	Γ
2	Α
3	Δ

3.

1	Γ
2	Β
3	Ε

4.

1	Γ
2	Δ

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** 5, 15, 45, ... **β)** $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{12}, \dfrac{2}{48}, \ldots$ **γ)** - 20, - 10, - 5, ...

2. $x = 5$

3. **α)** $\alpha_6 = \dfrac{2}{243}$ **β)** $\alpha_1 = 14$ **γ)** $\lambda = \pm 2$ **δ)** $\nu = 5$

4. $\alpha_1 = -162$ & $\lambda = \frac{1}{3}$ ή $\alpha_1 = 162$ & $\lambda = -\frac{1}{3}$

5. $\lambda = 2$

6. **α)** $S_4 = \frac{85}{8}$ **β)** $S = \frac{32}{3}$

7. **α)** $\nu = 6$ **β)** $\lambda = \pm\frac{1}{3}$

8. **α)** $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ & $\lambda = 5$ **β)** $\alpha_1 = \pm 8$ & $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

9. **α)** $\nu = 10$ **β)** $\nu = 6$

10. 2, 4, 8 (ή 8, 4, 2)

11. $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16 (ή 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$)

12. $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{2}$, 10, 40 ή $-\frac{5}{8}$, $-\frac{5}{2}$, - 10, - 40

13. 4, 6, 9

14. **α)** $\alpha_1 = 2$ & $\lambda = 3$ **β)** $\alpha_1 = +162$ & $\lambda = \frac{1}{3}$

15. $\alpha_1 = 12$ & $\lambda = 2$ ή $\alpha_1 = \frac{108}{7}$ & $\lambda = -2$

16. 3, 6, 12, 24 ή - 1, 2, - 4, 8

17. **α)** 81 **β)** $\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \alpha_2\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_3\ \alpha_{\nu-2} = \ldots$ (= α^2_μ αν υπάρχει μεσαίος όρος α_μ)
γ) όχι **δ)** δεν ισχύει

18. **α)** $S_6 = 21$ **β)** $\nu = 8$

19. $S_4 = 9\,(1 + \sqrt{2}\,)$

20. $\alpha_1 = 2$ & $\lambda = 2$ ή $\alpha_1 = -6$ & $\lambda = -2$

21. **α)** 2 **β)** $\frac{1}{3}$ **γ)** $\frac{3}{2}$ **δ)** $\frac{1}{4}$

22. $\alpha_1 = 50$

23. $\lambda = \frac{2}{3}$

24. $\alpha_1 = 5$ & $\lambda = \frac{1}{5}$ ή $\alpha_1 = \frac{15}{2}$ & $\lambda = -\frac{1}{5}$

25. **α)** $\lambda' = \lambda^2$ **β)** $\alpha_1 = 4$ & $\lambda = \frac{1}{3}$

26. 5, 15, 45

27. **α)** $\lambda = 2$ **β)** $\alpha_1 = 2$ & $\lambda = 3$

28. $\frac{1}{\nu - 1}$

29. α) $2 - \sqrt{2}$ **β)** 8 **γ)** $\frac{4}{3}$ **δ)** $\frac{3}{2}$

30. **α)** x = 10 **β)** x = ± 0,8 **γ)** $x = \pm\frac{\pi}{3}$ **δ)** $x = \frac{1}{2}$

ε) $x = \pm\frac{4}{5}$ **στ)** $x = \frac{3}{5}$ **ζ)** $x = \frac{\pi}{3}$

31. $\theta = \frac{\pi}{3}$

Υπόδειξη: Με το σχήμα Horner δοκιμάστε τις τιμές $\frac{1}{\delta}$ όπου δ διαιρέτης του 6.

32. **Α. α)** Ναι **β)** Ναι **γ)** Όχι **δ)** Ναι **ε)** Ναι
στ) Ναι **ζ)** Όχι **η)** Όχι **θ)** Ναι **ι)** Ναι

Β. α) $\lambda' = \lambda_1^2$ **β)** $\lambda' = |\lambda|$ **δ)** $\lambda' = \lambda_1^2$ **ε)** $\lambda' = \frac{1}{\lambda_2}$

στ) $\lambda' = \sqrt{\lambda_1}$ $(\lambda_1 > 0)$ **θ)** $\lambda' = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ **ι)** $\lambda' = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

34. **α)** λ = ± 1 **β)** Π = 0

35. **α)** $\alpha_{\nu+1} = 3 \cdot 2^{\nu+1}$ **β)** $\alpha_1 = 6$ & $\lambda = 2$ **γ)** ν = 10

36. **α)** $S_{\nu-1} = 2(3^{\nu-1} - 1)$ **β)** $4 \cdot 3^{\nu-1}$ **γ)** $4 \cdot 3^{\nu}$ **δ)** $\alpha_1 = 4$ & $\lambda = 3$ **ε)** ν = 5

37. **α)** $0,\overline{27} = \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \ldots$ **β)** $0,\overline{27} = \frac{3}{11}$

38. **α)** $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\alpha}{4}$, $\alpha_\nu = \frac{\alpha}{2^{\nu-1}}$, $\Pi_1 = 3\alpha$, $\Pi_2 = \frac{3\alpha}{2}$, $\Pi_3 = \frac{3\alpha}{4}$, $\Pi_\nu = \frac{3\alpha}{2^{\nu-1}}$

β) $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, $\Pi_1 = 24$, $\Pi_2 = 12$, $\Pi_3 = 6$, $\Pi_\rho = 0{,}75$, $\rho = 6$, $\alpha_\rho = 0{,}25$

39. $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\alpha}{4}$, $\alpha_{10} = \frac{\alpha}{2^9}$

$E_1 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, $E_2 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, $E_3 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64}$, $E_{10} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4^{10}}$

$\Pi_1 = 3\alpha$, $\Pi_2 = \frac{3\alpha}{2}$, $\Pi_3 = \frac{3\alpha}{4}$, $\Pi_{10} = \frac{3\alpha}{2^9}$

$S_{\pi\lambda} = 2\alpha$, $S_E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$, $S_\Pi = 6\alpha$

40. **α)** $c_5 = \frac{R}{16}$, $c_6 = \frac{R}{32}$ **β)** $\Gamma_7 = \frac{\pi R}{32}$ **γ)** $E_{12} = \frac{\pi R^2}{4^{11}}$

δ) $S_5 = \frac{341\pi R^2}{256}$ **ε)** $S = \frac{4\pi R^2}{3}$

41. **α)** 17,5 mg **β)** $\cong$ 17,344 mg **γ)** 40 mg **δ)** 12,5 mg

Υπόδειξη: **α), β)** Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στο αίμα του ασθενούς είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτής που υπήρχε στην αρχή του τετραώρου. Έχουμε δηλαδή γεωμετρική πρόοδο με λόγο 0,75.

γ) Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου αυτής είναι 40 mg.

δ) Η επικίνδυνη δόση είναι αυτή που θα δώσει άθροισμα απείρων όρων 50 mg κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις.

42. **Α. α)** 32 Κ, **β)** $2^{ν-1}$Κ και $(2^{ν-1} - 1)$Μ

Β. α) 128 Κ και 127 Μ, **β)** 8 χρόνια **γ)** $K = 2^{n-1} + 1$

Γ. 1 cm

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον παρακάτω πίνακα:

Τέλος	Μοτίβο	Πλήθος Κ	Πλήθος Μ
1ου χρόνου	Κ	1	0
2ου χρόνου	Κ-Μ-Κ	2	1
3ου χρόνου	Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ	4	3
4ου χρόνου	Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ-Μ-Κ	8	7
5ου χρόνου	...	...	...
6ου χρόνου	...	...	...

43. **Ι. i)** Λ **ii)** Λ **iii)** Λ **iv)** Σ **v)** Λ

ΙΙ. i) Ε **ii)** Γ **iii)** Γ

44. **α)** $M_Γ = 4 < M_A = 5$ **β)** $M_Γ \leq M_A$

46. 4, 12, 36

47. 2, 5, 8 ή 26, 5, - 16

48. 1, 3, 9

49. 2, 4, 8, 12

50. S ύψους < 2 m, S πλάτους < 2 m, S “βάθους” < 1 m

Υπόδειξη: Υπολογίστε τα αθροίσματα των απείρων όρων των γεωμετρικών προόδων που δείχνουν την καθ’ ύψος, κατά πλάτος και κατά “βάθος” ανάπτυξη του φυτού.

51. **α)** Πρόταση Πέτρου: 33.000, πρόταση πατέρα: 32.000 δρχ.

β) Πρόταση Πέτρου: 285.000, πρόταση πατέρα: 511.500 δρχ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**	**9.**	**Σ**	**17.**	**Σ**	**25.**	**Σ**
2.	**Σ**	**10.**	**Λ**	**18.**	**Λ**	**26.**	**Λ**
3.	**Σ**	**11.**	**Λ**	**19.**	**Σ**	**27.**	**Λ**
4.	**Σ**	**12.**	**Σ**	**20.**	**Σ**	**28.**	**Λ**
5.	**Σ**	**13.**	**Σ**	**21.**	**Λ**	**29.**	**Σ**
6.	**Σ**	**14.**	**Λ**	**22.**	**Λ**	**30.**	**Λ**
7.	**Σ**	**15.**	**Σ**	**23.**	**Λ**	**31.**	**Σ**
8.	**Σ**	**16.**	**Σ**	**24.**	**Σ**	**32.**	**Λ**

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

ΕΜΒΑΔΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και ίσα εμβαδά, έχουν αντίστοιχα ίσα

Α. όλα τα ύψη τους

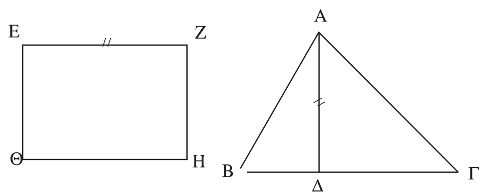
Β. όλες τις διαμέσους τους

Γ. τις διαμέσους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές

Δ. τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές

Ε. τις διχοτόμους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές*****

2. ***** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ και ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουν ίσα εμβαδά και το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι ίσο με την πλευρά ΕΖ. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η



Α. ΒΓ = ΕΘ **Β.** ΑΔ = ΕΘ **Γ.** ΕΘ = 2ΒΓ

Δ. ΕΘ = ΑΓ **Ε.** ΗΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$ *****

3. ***** Αν ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι $\frac{1}{3}$, τότε ο λόγος των εμβαδών είναι

Α. $\frac{1}{3}$ **Β.** $\frac{1}{9}$ **Γ.** $\frac{1}{6}$ **Δ.** $\frac{1}{27}$ **Ε.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *****

4. ***** Ο τύπος Ε = $\frac{\delta_1.\delta_2}{2}$ (δ_1, δ_2 οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου) εκφράζει το εμβαδό

Α. ενός τετραπλεύρου με δύο από τις πλευρές του ίσες

Β. ενός τετραπλεύρου με τις πλευρές του κάθετες ανά δύο

Γ. ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιους

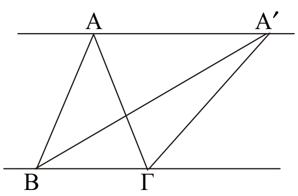
Δ. ενός ορθογωνίου με διαγώνιες που έχουν σχέση $\delta_1 = 2\delta_2$

Ε. ενός ισοσκελούς τραπεζίου*****

5. ***** Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς γ το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο

Α. $\gamma^2 \sqrt{\frac{3}{4}}$ **Β.** $\gamma \frac{\upsilon}{4}$ **Γ.** $\frac{\gamma}{2} \upsilon^2$ **Δ.** $\gamma^2 \sqrt{\frac{3}{16}}$ **Ε.** $\gamma^2 \frac{3}{\sqrt{4}}$ *****

6. ***** Αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ συμβαίνει ΑΑ΄ // ΒΓ τότε



Α. (ΑΒΓ) = (Α΄ΒΓ)

Β. τρίγωνο ΑΒΓ = τρίγωνο Α΄ΒΓ

Γ. γωνία Α΄ = Α

Δ. γωνία Α΄ = 90° - Α

Ε. τρίγωνο ΑΒΓ ≈ τρίγωνο Α΄ΒΓ*****

7. ***** Η διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα

Α. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Β. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

Γ. μόνο όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

Δ. πάντα

Ε. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο*****

8. ***** Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $Α_1Β_1Γ_1$ ο τύπος $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(Α_1Β_1Γ_1)} = \dfrac{ΑΒ.ΑΓ}{Α_1Β_1.Α_1Γ_1}$ ισχύει όταν

Α. γωνία $Γ = Γ_1$ **Β.** γωνία $Β = Β_1$

Γ. γωνία $Α = 180° - Β_1 - Γ_1$ **Δ.** γωνία $Α = 90° + Α_1$

Ε. γωνία $Α = Α_1$ ή γωνία $(Α + Α_1) = 180°$*****

9. ***** Το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα όταν

Α. γωνία Α = 90° **Β.** γωνία Α = Β **Γ.** γωνία Α = 60° = Β

Δ. ΒΓ = ΑΓ **Ε.** ΒΓ = ΑΒ*****

10. ***** Ένα τραπέζιο με βάσεις $β_1$, $β_2$ και ύψος α είναι ισοδύναμο με ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις είναι

Α. $β_1 + β_2$ και υ **Β.** $\dfrac{β_1 + β_2}{2}$ και $\dfrac{υ}{2}$ **Γ.** $β_1 + υ$ και $\dfrac{β_2}{2}$

Δ. $\dfrac{β_1 + β_2}{4}$ και 2υ **Ε.** 2υ και $\dfrac{β_1 + β_2}{2}$ *****

11. ***** Ο τύπος $Ε = \sqrt{τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ)}$ δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές α, β, γ αν

Α. $τ = α + β + γ$ **Β.** $2α = 2(τ - β)$ **Γ.** $α = \dfrac{β + γ}{2}$

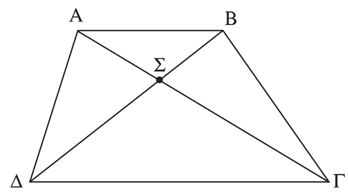
Δ. $τ = \dfrac{α}{2} + \dfrac{β}{2} + \dfrac{γ}{2}$ **Ε.** τ = αβημΓ*****

12. * Αν $Ε_1$, $Ε_2$ τα εμβαδά δύο ομοίων πολυγώνων και λ ο λόγος ομοιότητάς τους, τότε ισχύει

Α. $\lambda^2 = Ε_1 . Ε_2$ **Β.** $\lambda^2 = \dfrac{Ε_1}{Ε_2}$ **Γ.** $Ε_1\lambda = Ε_2^2$

Δ. $\lambda = \left(\dfrac{Ε_1}{Ε_2}\right)^2$ **Ε.** $Ε_1 . Ε_2 = \lambda$*****

13. * Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και Σ το σημείο τομής των διαγωνίων του, τότε ισχύει



Α. (ΣΑΔ) = (ΣΒΓ)
Β. (ΣΑΒ) = (ΣΔΓ)
Γ. (ΣΒΓ) = (ΣΑΔ) + (ΣΔΓ)
Δ. (ΑΒΓ) = (ΑΔΓ)
Ε. (ΣΑΔ) = 2 (ΣΒΓ)*****

14. * Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου είναι $4\sqrt{3}$ cm^2. Η κάθε πλευρά του είναι

Α. $4\sqrt{3}$ cm **Β.** $8\sqrt{3}$ cm **Γ.** $4\sqrt[4]{3}$ cm

Δ. 4 cm **Ε.** $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ cm*****

15. * Από τους παρακάτω τύπους εκείνος που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ο

Α. $\dfrac{1}{2}$ αγημΑ **Β.** $\dfrac{1}{2}$ αβσυνΓ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ βγσυν (90° - Α)

Δ. $\sqrt{\tau(\tau+\alpha)(\tau+\beta)(\tau+\gamma)}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}$ αγσυνΒ*****

16. * Το εμβαδόν τετραγώνου με διαγώνιο δ δίνεται από

Α. $\dfrac{1}{2}\delta^2$ **Β.** $\dfrac{\delta^2}{4}$ **Γ.** $2\delta^2$ **Δ.** $\delta\sqrt{2}$ **Ε.** $\dfrac{\delta\sqrt{2}}{2}$ *****

17. ***** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) το εμβαδόν του δίνεται από τη σχέση

Α. $\frac{1}{2}$ αβημΑ **Β.** $\frac{1}{2}$ βγ **Γ.** $\frac{1}{2}$ αγημΑ

Δ. $\frac{1}{2}$ βγσυνΑ **Ε.** $\frac{1}{2}$ αβγ*****

18. ***** Αν ένα τετράπλευρο έχει κάθετες τις διαγώνιές του δ_1, δ_2, τότε το εμβαδόν του ισούται με

Α. $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ **Β.** $\frac{\delta_1 . \delta_2}{2}$ **Γ.** $\frac{\delta_1 . \delta_2}{4}$ **Δ.** $\delta_1^2 . \delta_2^2$ **Ε.** $\delta_1 . \delta_2$*****

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. ***** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.*****	**Σ**	**Λ**
2. ***** Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διχοτόμο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.*****	**Σ**	**Λ**
3. ***** Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από ένα ύψος του σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.*****	**Σ**	**Λ**
4. ***** Ένα τρίγωνο χωρίζεται από μία διάμεσό του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.*****	**Σ**	**Λ**
5. ***** Δύο ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.*****	**Σ**	**Λ**
6. ***** Ο τύπος του Ήρωνα $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ισχύει μόνο σε ορθογώνια τρίγωνα.*****	**Σ**	**Λ**
7. ***** Ο τύπος $E = \frac{\delta_2 . \delta_2}{2}$ όπου δ_1, δ_2 οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου ισχύει σε κάθε τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιους.*****	**Σ**	**Λ**

8. * Δύο τρίγωνα όμοια και ισεμβαδικά είναι ίσα.* **Σ** **Λ**

9. * Δύο τετράγωνα τα οποία έχουν ίσα εμβαδά είναι ίσα.* **Σ** **Λ**

0. * Ο λόγος των εμβαδών δύο ισοπλεύρων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των υψών τους.* **Σ** **Λ**

1. * Αν οι γωνίες Α και Δ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι συμπληρωματικές, τότε $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \frac{ΑΒ.ΑΓ}{ΔΕ.ΔΖ}$.* **Σ** **Λ**

2. * Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, αν Μ είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ, τότε τα σχήματα ΑΜΓΔ και ΑΜΓΒ είναι ισοδύναμα.* **Σ** **Λ**

3. * Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 4 cm η καθεμία, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 16 cm^2.* **Σ** **Λ**

4. * Αν η πλευρά τετραγώνου τριπλασιαστεί, τότε το εμβαδόν του 9-πλασιάζεται.* **Σ** **Λ**

5. * Τετράγωνο πλευράς α είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με τη διαγώνιο του τετραγώνου.* **Σ** **Λ**

6. * Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, β είναι ισοδύναμο με τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.* **Σ** **Λ**

7. * Ρόμβος με διαγωνίους $δ_1$, $δ_2$ είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις διαγώνιες $δ_1$, $δ_2$ του ρόμβου.* **Σ** **Λ**

8. * Ρόμβος με διαγώνιες $δ_1$, $δ_2$ είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $δ_1$, $δ_2$.* **Σ** **Λ**

9. * Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς α.* **Σ** **Λ**

0. * Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α είναι ισοδύναμο με ρόμβο πλευράς α και οξείας γωνίας 60°.* **Σ** **Λ**

1. ***** Αν οι γωνίες Α και Δ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι συμπληρωματικές, τότε $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \frac{ΑΒ.ΑΓ}{ΔΕ.ΔΖ}$.***** **Σ** **Λ**

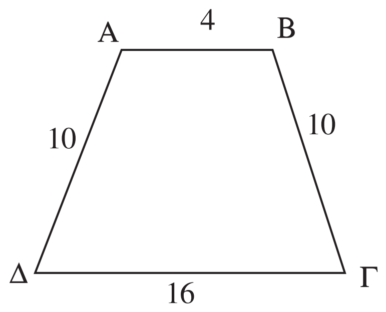
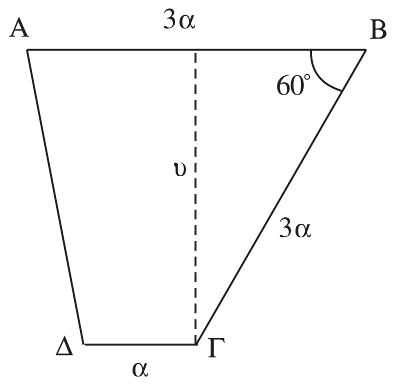
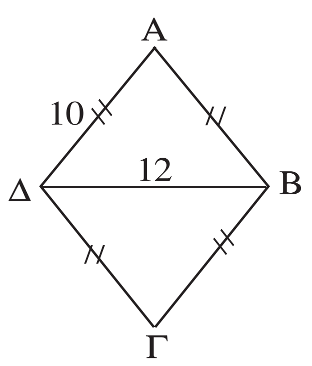
2. ***** Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε $\frac{(ΑΒΓ)}{ΑΒ^2} = \frac{(ΚΛΜ)}{ΚΛ^2} = λ^2$, όπου ΑΒ και ΚΛ ομόλογες πλευρές τους. ***** **Σ** **Λ**

3. ***** Το εμβαδό ενός τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{2}$ $δ^2$, όπου δ η διαγώνιός του.***** **Σ** **Λ**

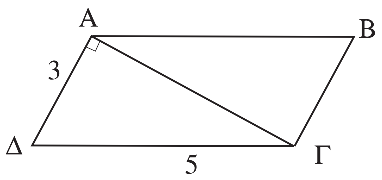
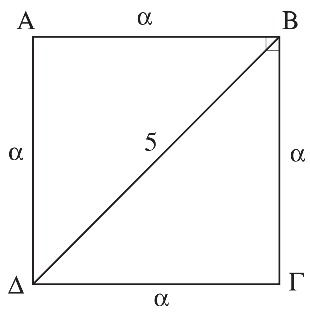
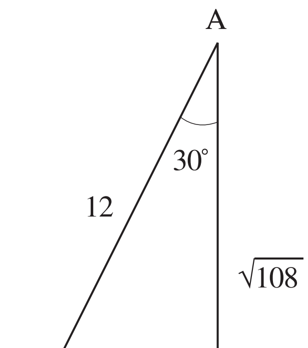
4. ***** Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δύο βάσεων τραπεζίου το διαιρεί σε δύο ισοδύναμα τραπέζια.***** **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

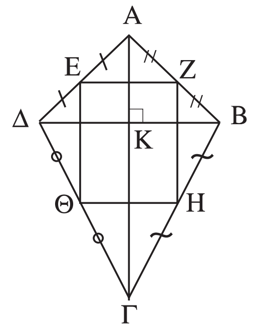
1. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το εμβαδό του στη στήλη (Β).*****

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $3\alpha^2\sqrt{3}$ **Β)** 80
2. 	**Γ)** 60 **Δ)** 96
3. 	**Ε)** $9\alpha^2\sqrt{3}$

2. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το εμβαδόν του στη στήλη (Β).*****

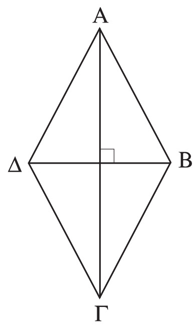
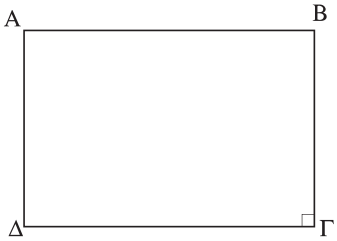
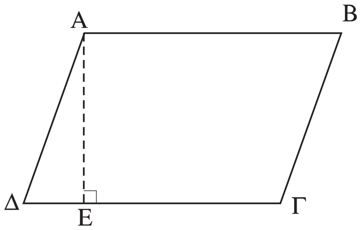
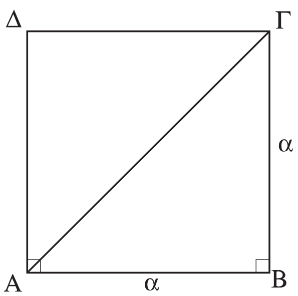
στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** 12,5
	Β) 25
2. 	**Γ)** $3\sqrt{108}$
3. 	**Δ)** $\dfrac{\sqrt{108}}{12}$
	Ε) 12

3. ***** Οι ισότητες στη στήλη (Α) εκφράζουν εμβαδά και περιέχουν στοιχεία του διπλανού σχήματος. Οι προτάσεις στη στήλη (Β) προσδιορίζουν τα στοιχεία του διπλανού σχήματος, όπως αυτά χρησιμοποιούνται στις ισότητες της στήλης (Α). Να αντιστοιχίσετε τις ισότητες της στήλης (Α) με τις προτάσεις της στήλης (Β).*****

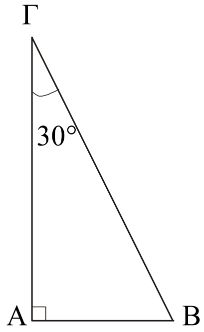
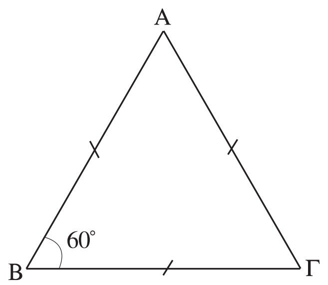
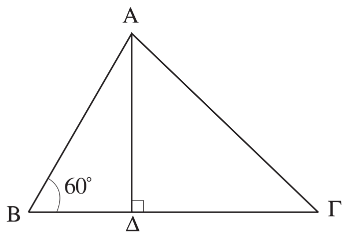
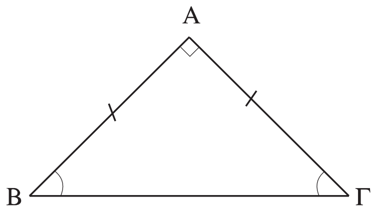


στήλη Α	στήλη Β
1. $(\Delta A\Gamma) = \dfrac{\Delta K . A\Gamma}{2}$	**Α)** ΑΓ, ΔΒ διαγώνιοι του ΑΒΓΔ
	Β) ΕΖ ύψος του ΕΖΗΘ
2. $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{A\Gamma . \Delta B}{2}$	**Γ)** ΔΒ βάση του τριγώνου ΑΔΒ
3. $EZ . ZH = (EZH\Theta)$	**Δ)** ΔΚ ύψος του τριγώνου ΑΔΓ
4. $(A\Delta B) = \dfrac{\Delta B . AK}{2}$	**Ε)** ΑΓ βάση του τριγώνου ΑΒΓ
	ΣΤ) ΔΒ βάση του τριγώνου ΔΓΒ

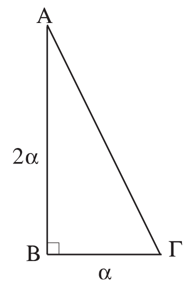
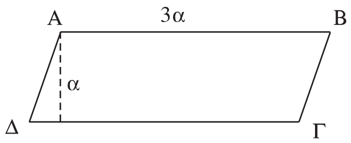
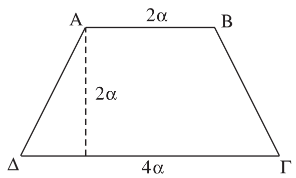
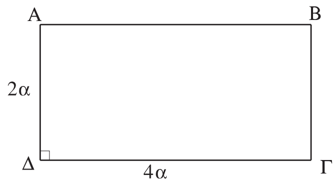
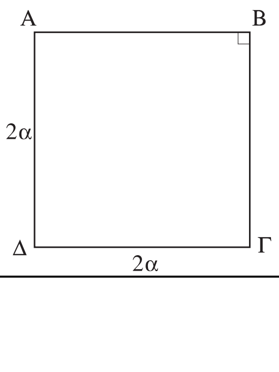
4. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης (Α) με έναν τύπο της στήλης (Β) ο οποίος εκφράζει το εμβαδόν του.*****

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $Ε = \dfrac{ΔΑ^2}{2}$ **Β)** $Ε = ΑΔ.ΒΓ$
2. 	**Γ)** $Ε = ΑΒ.ΑΕ$
3. 	**Δ)** $Ε = ΑΔ.ΔΓ$ **Ε)** $Ε = \dfrac{ΑΓ^2}{2}$
4. 	**ΣΤ)** $Ε = \dfrac{ΑΓ.ΔΒ}{2}$

5. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης (Α) με έναν τύπο της στήλης (Β) ο οποίος εκφράζει το εμβαδόν του.*****

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $\frac{1}{4}$ ΑΓ.ΒΓ
	Β) ΑΒ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
2. 	**Γ)** $\frac{ΑΓ.ΑΒ}{2}$
	Δ) $\frac{1}{2}$ ΑΒ.ΒΓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. 	**Ε)** $\frac{1}{2}$ ΑΓ.ΒΓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 	**ΣΤ)** $\frac{ΑΒ^{2}\sqrt{3}}{4}$

6. ***** Στη στήλη (Α) υπάρχουν ευθύγραμμα σχήματα. Στη στήλη (Β) υπάρχουν εμβαδά. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το εμβαδόν του στη στήλη (Β).*****

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $8\alpha^2$ **Β)** $7\alpha^2$
2. 	**Γ)** $6\alpha^2$ **Δ)** $4\alpha^2$
3. 	**Ε)** $3\alpha^2$
4. 	**ΣΤ)** $2\alpha^2$ **Ζ)** α^2
5. 	**Η)** $\dfrac{3\alpha^2}{2}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου των μη παράλληλων πλευρών επί ………………*

2. * Αν το ένα ύψος ενός παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το άλλο του ύψος, τότε η μία πλευρά που αντιστοιχεί σ' αυτό είναι ………………*

3. * Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει (ΑΒΓ) = $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου τ = ………………*

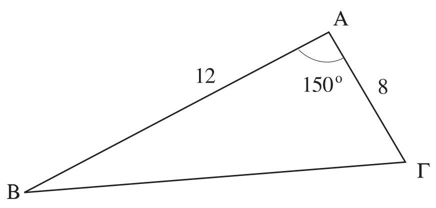
4. * Αν το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{\alpha\beta}{2}$ (όπου α, β πλευρές), τότε η μεγαλύτερη γωνία του είναι η ……………… και είναι ίση με ……………*

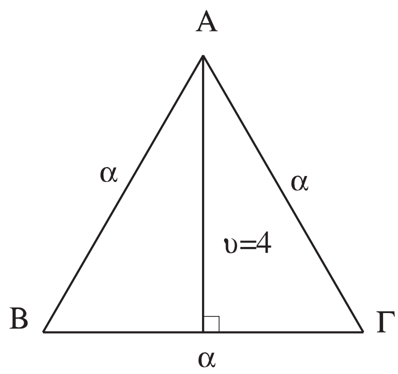
5. * Αν δ_1, δ_2 είναι οι διαγώνιοι ρόμβου, το εμβαδό του ισούται με …………*

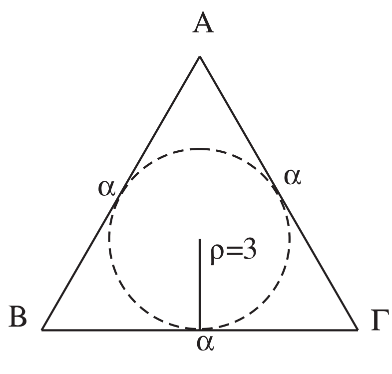
6. * Αν ένας ρόμβος πλευράς α με διαγώνιες δ_1, δ_2 είναι ισοδύναμος με ένα ορθογώνιο, τότε οι πλευρές του ορθογωνίου είναι οι ……………… ή οι ………………*

7. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι 30°. Το εμβαδόν του συναρτήσει των πλευρών του α, γ είναι ………………*

8. ***** Υπολογίστε και συμπληρώστε στη στήλη (Β) τα εμβαδά των σχημάτων που βρίσκονται στη στήλη (Α). *****

<table>
<tr><th>στήλη Α</th><th>στήλη Β</th></tr>
<tr><td>


</td><td>Ε = ………..</td></tr>
<tr><td>


</td><td>Ε = ………..</td></tr>
<tr><td>


</td><td>Ε = ………..</td></tr>
</table>

9. * Υπολογίστε και συμπληρώστε στη στήλη (Β) τα εμβαδά των τριγώνων των οποίων τα στοιχεία βρίσκονται στη στήλη (Α). *

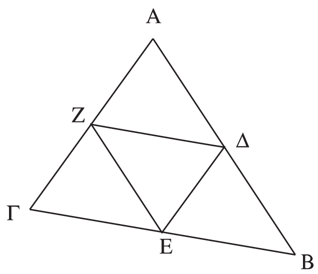
στήλη Α **στοιχεία τριγώνου ΑΒΓ**	**στήλη Β** **εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ**
$\alpha = 2,\ \gamma = 3,\ B = 60°$	Ε = …………
$\alpha = 3,\ \beta = 3,\ \gamma = 4$	Ε = …………
$\alpha = \beta = \gamma,\ \ \upsilon_\alpha = 5\sqrt{3}$	Ε = …………
$\alpha = \beta = \gamma = 4$	Ε = …………

Ερωτήσεις ανάπτυξης

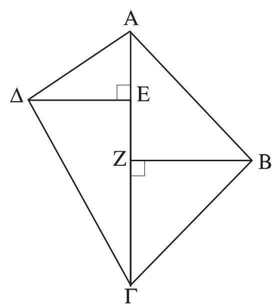
1. ****** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) (ΔΕΖ) = (ΖΓΕ)

β) (ΔΕΖ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ) ******



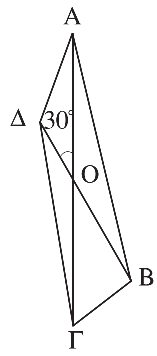
2. ****** Να δείξετε ότι το εμβαδόν τυχόντος τετραπλεύρου ισούται με το γινόμενο της μιας διαγωνίου του επί το ημιάθροισμα των αποστάσεων των δύο άλλων κορυφών από τη διαγώνιο αυτή. ******



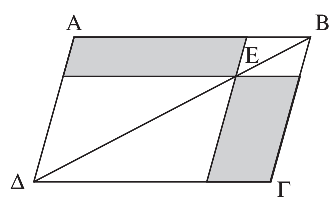
3. ****** Όταν οι διαγώνιες ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία Ο = 30°, να δείξετε ότι ισχύει:

α) (ΑΟΔ) = $\frac{1}{4}$ ΟΔ.ΟΑ

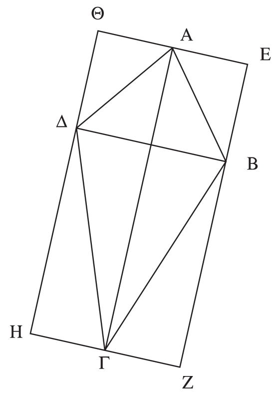
β) (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{4}$ ΑΓ.ΔΒ******



4. ****** Από ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ είναι ισοδύναμα.******

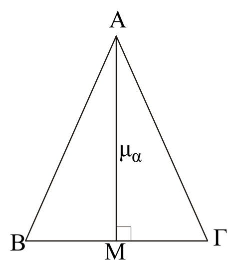


5. ** Από τις κορυφές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγωνίους του. Να δείξετε ότι το περιγεγραμμένο στο τετράπλευρο παραλληλόγραμμο ΗΖΕΘ έχει εμβαδό διπλάσιο από το εμβαδό του τετραπλεύρου.**

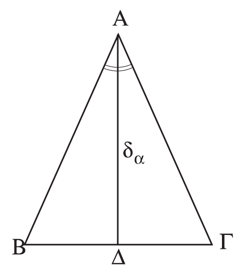


6. ** Να δείξετε ότι σε ρόμβο, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας διαγωνίου επί την πλευρά του, η μια γωνία του είναι 60°.**

7. ** Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου το εμβαδόν ισούται με $\frac{1}{2}$ α.μ_α, όπου μ_α η διάμεσος από την κορυφή Α, είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.**

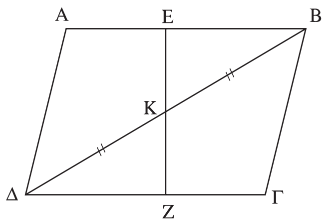


8. ** Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το εμβαδόν του οποίου ισούται με $\frac{1}{2}$ α.δ_α, όπου δ_α η διχοτόμος της γωνίας Α, είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.**



9. ****** Να δείξετε ότι αν ένα τετράγωνο πλευράς α και ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς β έχουν την ίδια περίμετρο, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με $\frac{9\beta^2}{16}$.******

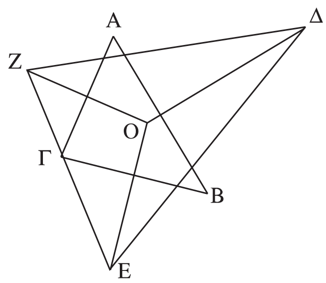
10. ****** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το μέσο Κ της διαγωνίου ΒΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία ΕΖ που τέμνει τις ΑΒ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι (ΑΕΖΔ) = (ΒΓΖΕ).******



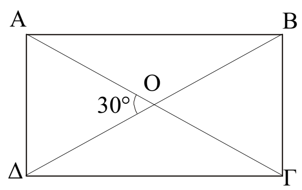
11. ****** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από ένα σημείο Ο εσωτερικό του ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ = ΑΒ, ΟΕ = ΒΓ, ΟΖ = ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ισχύει:

α) (ΔΟΕ) = (ΑΒΓ) και

β) (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ)******

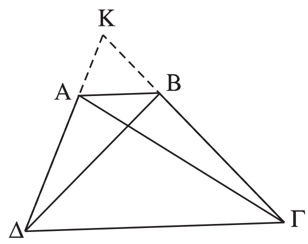


12. ****** Ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ το εμβαδόν του είναι ίσο με $\frac{\text{ΑΓ}^2}{4}$, όπου ΑΓ η μία διαγώνιός του. Δείξτε ότι η οξεία γωνία ΑΟΔ των διαγωνίων του είναι 30°.******

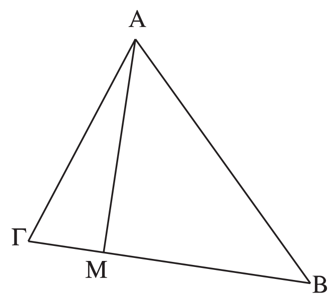


13. ****** Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 256 cm^2. Αν ελαττώσουμε την πλευρά του κατά 10 cm, τότε να δείξετε ότι το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 220 cm^2.******

14. ** Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ είναι ισοδύναμα.**



15. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ, τέτοιο ώστε ΒΜ = $\frac{2}{3}$ ΒΓ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΜ είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.**



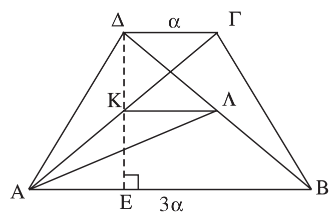
16. ** Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α και ΚΛΜ τρίγωνο με γωνία Κ = 120°. Τότε να δείξετε ότι $\frac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΚΛ.ΛΜ}}{\alpha^2}$.**

17. ** Τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις α και 3α και ύψος 2α και Κ, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΛ.

β) Να δείξετε ότι:

(ΑΚΛ) = (ΒΚΛ) = (ΓΚΛ) = (ΔΚΛ).**

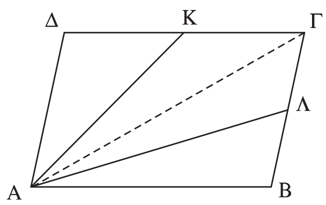


18. ****** Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 136 m^2. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου αυτού.******

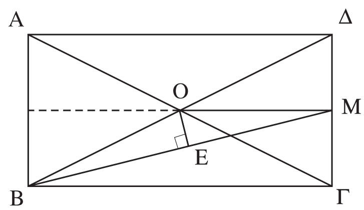
19. ****** Η περίμετρος ενός ρόμβου ΑΒΓΔ είναι 48 cm και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5 cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ρόμβου.******

20. ****** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει γωνία $\Gamma = 60°$, $\beta = 12$ cm, $\alpha = 3$ cm και είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί η πλευρά του ισοπλεύρου αυτού τριγώνου.******

21. ****** Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή Α με τα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(\text{ΑΚΓΛ}) = \dfrac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.******



22. ****** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΒΓ = α και ΑΒ = β. Φέρνουμε την ΟΜ, όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ.

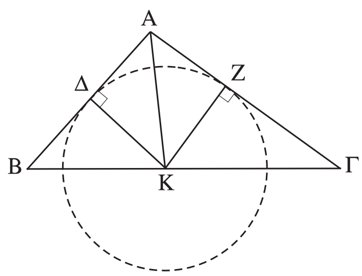


α) Να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου ΟΜΒ συναρτήσει των α, β.

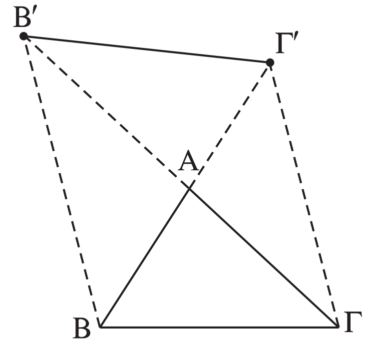
β) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΓ είναι ισοδύναμα.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΟΜΒ συναρτήσει των α, β.******

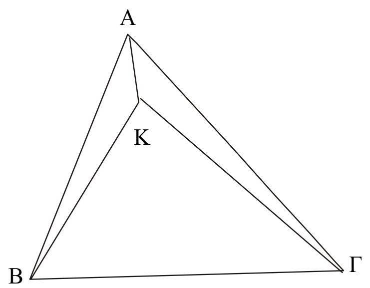
23. ****** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και κύκλος (Κ, R) που έχει το κέντρο του στην πλευρά ΒΓ και εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Να δείξετε ότι: $R(\beta + \gamma) = 2E$.******



24. ****** Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μια οποιαδήποτε ευθεία που να συναντά την προέκταση της ΓΑ προς το μέρος του Α σε ένα σημείο Β΄, καθώς και την ΓΓ΄//ΒΒ΄, που συναντά την προέκταση της ΒΑ στο Γ΄. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ είναι ισεμβαδικά.******



25. ****** Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Κ έτσι ώστε να είναι γωνία ΑΚΒ = ΓΚΑ = 120° και ΚΑ = 2 cm, ΚΒ = 6 cm, ΚΓ = 10 cm. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριγώνων α) ΚΒΓ και β) ΑΒΓ.******



26. ****** Αν το άθροισμα των διαγωνίων ενός ρόμβου είναι 14 cm και η περίμετρός του είναι 20 cm, να βρεθούν:

α) το εμβαδόν του και

β) το ύψος του ρόμβου από την κορυφή Α.******

27. ****** Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μια γωνία του 5-πλάσια μιας άλλης και την περίμετρό του 12-πλάσια μιας πλευράς. Αν το εμβαδόν του είναι 40 cm^2, να υπολογισθούν:

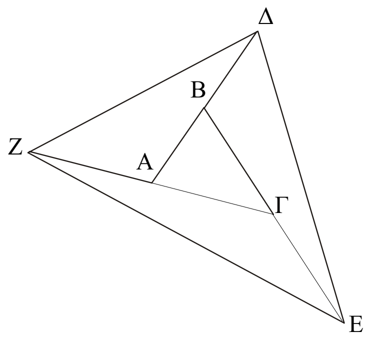
α) οι πλευρές του και

β) τα ύψη του.******

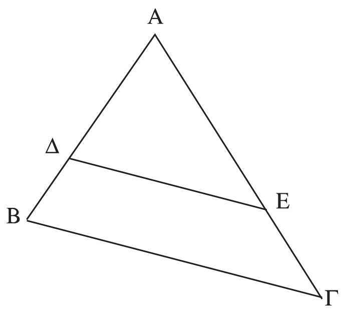
8. ****** Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως κατά τμήματα ΒΔ = ΒΑ, ΓΕ = ΓΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να δείξετε ότι:

α) (ΖΓΕ) = 2 (ΑΒΓ) και

β) (ΔΕΖ) = 7 (ΑΒΓ).******



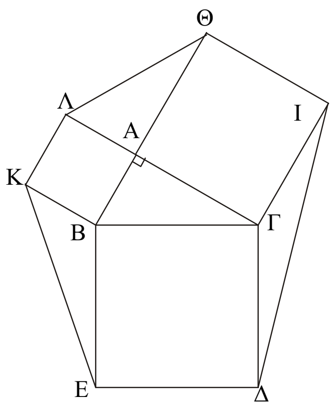
29. ****** Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $(\text{ΑΒΕ})^2$ = (ΑΒΓ) . (ΑΔΕ).******



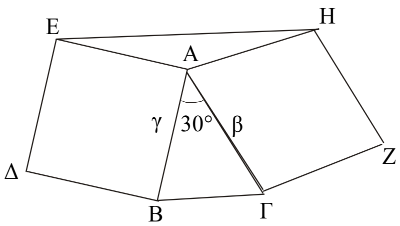
0. ****** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Κατασκευάζουμε επί των τριών πλευρών και εκτός του τριγώνου τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΓΑΘΙ, ΑΒΚΛ. Να υπολογισθούν:

α) τα εμβαδά (ΚΒΕ), (ΔΓΙ), (ΛΑΘ) και

β) το εμβαδόν του εξαγώνου ΔΕΚΛΘΙ, αν γνωρίζουμε τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α.******



31. ** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = γ, ΑΓ = β και γωνία Α = 30°. Επί των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και έξω από το τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ και φέρνουμε την ΕΗ.



α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

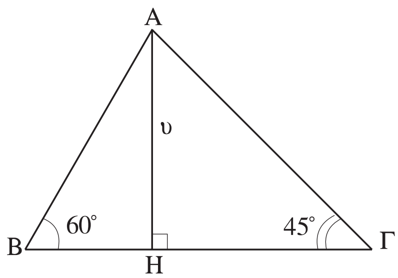
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΒΓΖΗΕΔΒ.**

32. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΗ=υ, γωνία Β = 60° και γωνία Γ = 45°. Να υπολογίσετε συναρτήσει του υ:

α) τις πλευρές του τριγώνου

β) το εμβαδόν του και

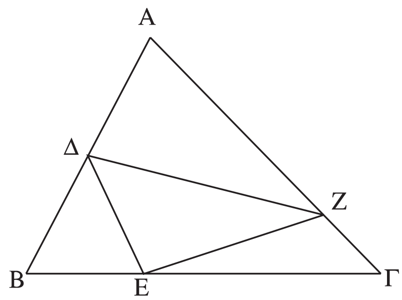
γ) τα ύψη προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.**



33. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ έτσι ώστε: $ΑΔ = \frac{1}{2}$ ΑΒ, $ΒΕ = \frac{1}{3}$ ΒΓ, $ΓΖ = \frac{1}{4}$ ΓΑ.

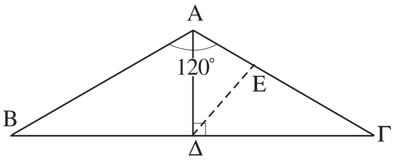
Να υπολογίσετε:

α) τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΕ, ΕΖΓ, ΑΔΖ, αν γνωρίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ = Ε και



β) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ, αν γνωρίζουμε το εμβαδόν του ΑΒΓ = Ε.**

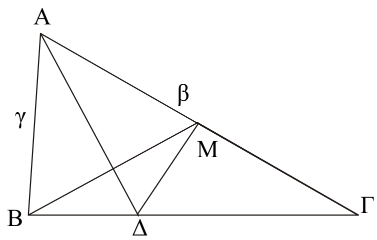
34. ****** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με ΑΒ = 6 cm και γωνία ΒΑΓ = 120°.



α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν Ε σημείο της ΑΓ, τέτοιο ώστε ΑΕ = $\frac{1}{2}$ ΕΓ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.******

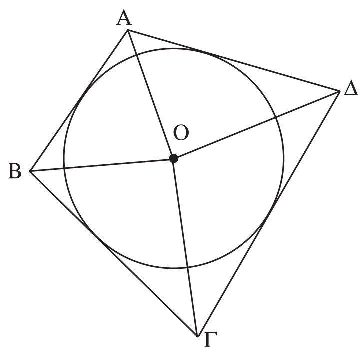
35. ****** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 2γ, ΑΔ μια διχοτόμος του και ΒΜ μια διάμεσός του. Να δείξετε ότι:



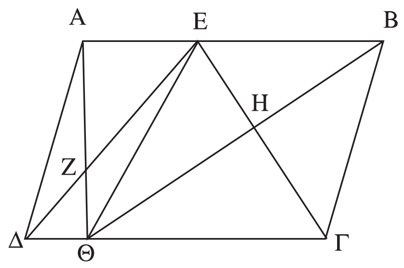
α) $\frac{(\text{ΒΜΔ})}{(\text{ΔΜΓ})} = \frac{1}{2}$ και

β) $\frac{(\text{ΜΔΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{1}{3}$ ******

36. ****** Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Ο. Να δείξετε ότι αληθεύει η σχέση (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).******



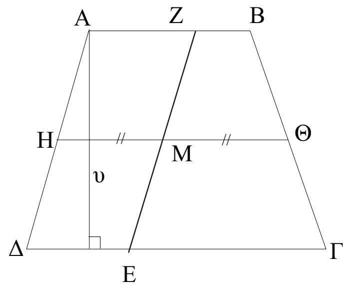
37. ****** Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε δύο τυχόντα σημεία Ε και Θ επί των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Οι ευθείες ΔΕ και ΑΘ τέμνονται στο Ζ και οι ευθείες ΓΕ και ΒΘ τέμνονται στο Η. Να δείξετε ότι:



α) (ΕΖΘ) = (ΑΖΔ)

β) το εμβαδόν του τετράπλευρου ΕΗΘΖ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΒΓΗ και ΑΔΖ.******

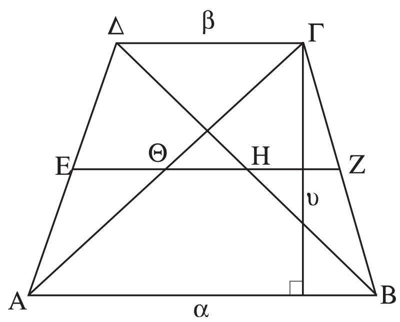
38. ****** Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ, υ το ύψος από το Α και ΗΘ η διάμεσός του. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το μέσο Μ της ΗΘ και τέμνει τις ΑΒ, ΔΓ στα σημεία Ζ, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



α) (ΑΖΕΔ) = ΗΜ.υ και

β) (ΑΖΕΔ) = (ΖΒΓΕ)******

39. ****** Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι βάσεις είναι ΑΒ = α, ΓΔ = β και υ το ύψος του. Φέρνουμε τη διάμεσο ΕΖ που τέμνει τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ στα Θ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:



α) (ΑΗΓ) = $\frac{(\alpha - \beta)\,\upsilon}{4}$ και

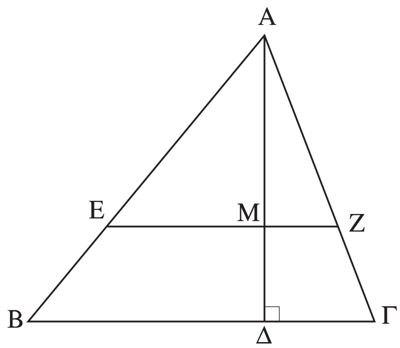
β) (ΑΒΖΕ) - (ΕΖΓΔ) = (ΑΗΓ)******

40. **** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει α = 17 cm, β = 8 cm, γ = 15 cm.

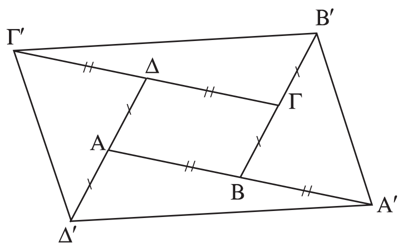
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$.**

41. **** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν 90 cm^2. Από ένα σημείο Μ του ύψους του ΑΔ, που το διαιρεί σε δύο τμήματα ΑΜ, ΜΔ με λόγο $\frac{2}{1}$, φέρνουμε παράλληλο προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.**



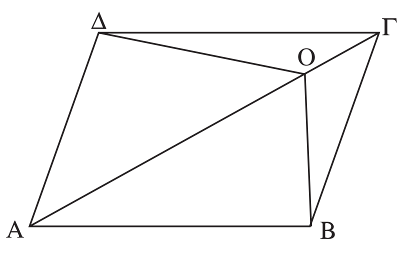
42. **** Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις πλευρές του και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΑΔ΄ = ΑΔ, ΒΑ΄ = ΒΑ, ΓΒ΄ = ΓΒ, ΔΓ΄ = ΔΓ.



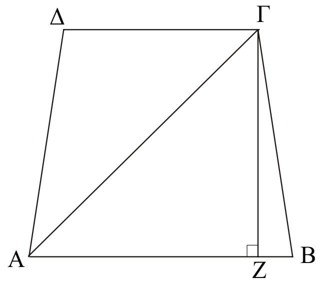
α) Να δείξετε ότι το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι παραλληλόγραμμο

β) Να εκφραστεί το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄Δ΄, αν γνωρίζουμε το εμβαδόν Ε του ΑΒΓΔ.**

43. **** Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο σημείο της διαγωνίου του ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΔ είναι ισοδύναμα.**



44. ** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ και ύψος ΓΖ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου αυτού είναι διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΖ.**

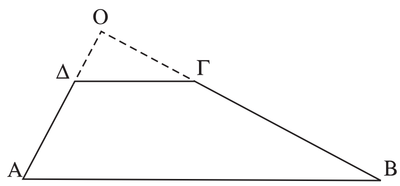


45. ** Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου, αν γνωρίζουμε ότι η περίμετρός του είναι 60 m, το εμβαδόν του 160 m^2 και το ύψος του 8 m.**

46. ** Δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, που έχει βάσεις ΑΒ = 70 cm, ΓΔ = 20 cm και μη παράλληλες πλευρές ΒΓ = 40 cm και ΑΔ = 30 cm.

α) Να αποδειχθεί ότι οι ΒΓ και ΑΔ είναι κάθετοι.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.**

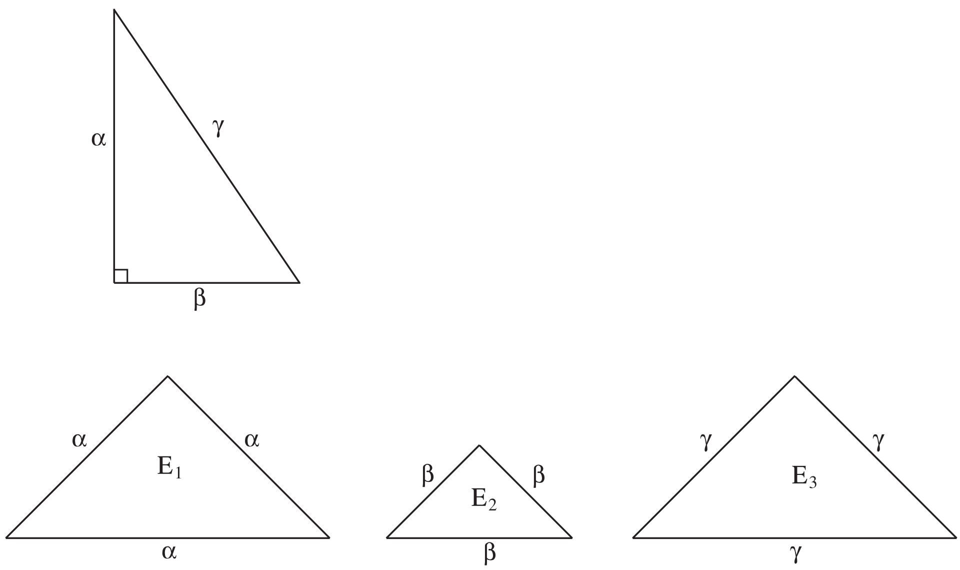


47. ** Να δείξετε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει: $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3E\sqrt{3}$ (μ_α, μ_β, μ_γ οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου και Ε το εμβαδόν του).**

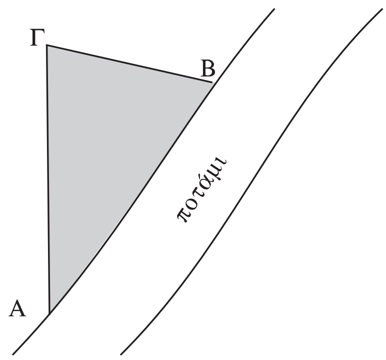
48. ** Τα τρίγωνα που έχουν κορυφή ένα τυχόν σημείο της περιμέτρου ενός παραλληλογράμμου και βάσεις τις διαγώνιές του, έχουν σταθερό άθροισμα εμβαδών.**

49. ** Να διαιρεθεί τετράγωνο πλευράς α = 6 cm σε τρία ισοδύναμα μέρη με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.**

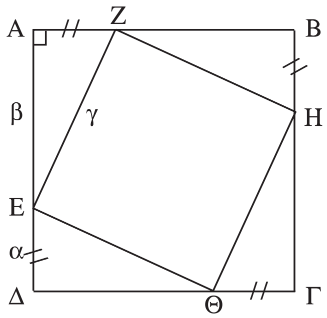
50. ****** Παρατηρώντας τα 4 παρακάτω τρίγωνα, βρείτε τη σχέση που συνδέει μεταξύ τους τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 των αντίστοιχων τριγώνων. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. ******



51. ****** Μια ομάδα προσκόπων κατασκηνώνει δίπλα σ’ ένα ποτάμι και θέλει να σχηματίσει μια τριγωνική περίφραξη στην όχθη του ποταμού (βλ. διπλανό σχήμα). Η ομάδα έχει στη διάθεσή της δύο σχοινιά μήκους 30 m και 40 m και θέλει να περιφράξει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. Πώς θα το καταφέρει;******



52. ** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και ΕΔ = ΘΓ = ΗΒ = ΑΖ.



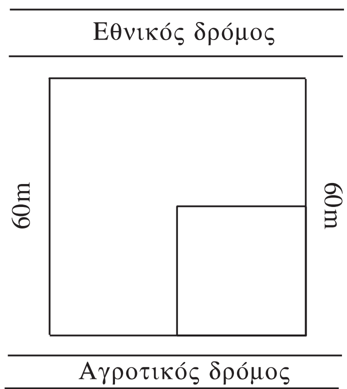
α) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ συναρτήσει των α, β.

β) Τι σχήμα είναι το ΕΖΗΘ;

γ) Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΖΕ, ΕΔΘ, ΘΓΗ, ΗΒΖ και του σχήματος ΕΖΗΘ.

δ) Χρησιμοποιώντας τις απαντήσεις των ερωτημάτων (α), (γ), ποιο βασικό πολύ γνωστό γεωμετρικό θεώρημα μπορείτε να αποδείξετε;**

53. ** Τέσσερις αδελφοί κληρονόμησαν από τον πατέρα τους διαμπερές τετραγωνικό οικόπεδο πλευράς 60 m. Για να πληρώσουν την Εφορία πούλησαν ένα τμήμα από αυτό σχήματος τετραγώνου, πλευράς 30 m, με πρόσοψη στον αγροτικό δρόμο. Το υπόλοιπο οικόπεδο το μοίρασαν μεταξύ τους τα αδέλφια σε 4 ισεμβαδικά οικόπεδα με πρόσοψη στον Εθνικό δρόμο.



α) Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα πούλησαν για να πληρώσουν την Εφορία.

β) Να βρείτε πόσο είναι το εμβαδόν καθενός από τα 4 οικόπεδα που πήραν οι αδελφοί.

γ) Να σχεδιάσετε τα οικόπεδα που πήρε καθένας από τους τέσσερις αδελφούς και να βρείτε την περίμετρό τους.

δ) Αν το τετράγωνο που πουλήθηκε ήταν σε διαφορετική θέση, μπορούσε να γίνει δικαιότερη η διαίρεση του υπόλοιπου οικοπέδου για τα τέσσερα αδέλφια; **

Παρατήρηση: *Η ερώτηση (δ) να μην δοθεί σε διαγώνισμα, γιατί είναι θέμα που μπορούμε να διαπραγματευθούμε μόνο στην τάξη.*

54. ****** Για να ρυμοτομηθεί τετραγωνικό αγροτεμάχιο πλευράς 600 m, κατασκευάζεται στο κέντρο του τετραγωνική πλατεία πλευράς 300 m. Το υπόλοιπο αγροτεμάχιο χωρίζεται σε 8 ισεμβαδικά οικόπεδα.

α) Σχεδιάστε τις διαγωνίους του τετραγωνικού αγροτεμαχίου και υπολογίστε το μήκος τους.

β) Τοποθετήστε στο σχήμα την τετραγωνική πλατεία και υπολογίστε το εμβαδόν της.

γ) Ολοκληρώστε το σχήμα σχεδιάζοντας τα 8 ζητούμενα ισεμβαδικά οικόπεδα. Τι σχήμα έχουν αυτά;

δ) Υπολογίστε για καθένα από τα 8 οικόπεδα:

i) το εμβαδόν του

ii) την περίμετρό του.******

Παρατήρηση: *Το παραπάνω πρόβλημα μπορούμε να το διαπραγματευθούμε στην τάξη και με την παρακάτω εκφώνηση:*

Πρόβλημα:

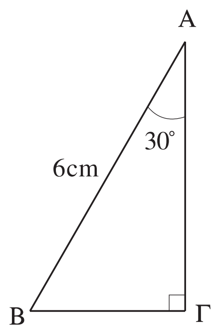
Για να ρυμοτομηθεί τετραγωνικό αγροτεμάχιο πλευράς 600 m, κατασκευάζεται στο κέντρο του τετραγωνική πλατεία πλευράς 300 m. Το υπόλοιπο αγροτεμάχιο να χωριστεί σε 8 ισεμβαδικά οικόπεδα.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1ο ΣΧΕΔΙΟ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο προς αυτήν ύψος.



Β. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΒΓ

β) την πλευρά ΑΓ και

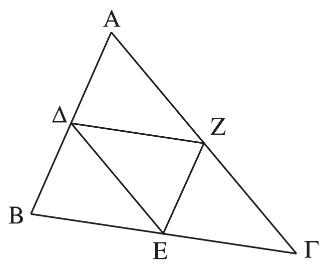
γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 2ο

Τριγώνου ΑΒΓ τα Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του. Να δειχθεί ότι:

α) (ΔΕΖ) = (ΕΖΓ)

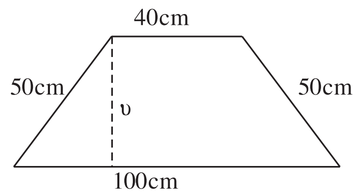
β) (ΑΒΓ) = 4 (ΔΕΖ)



2ο ΣΧΕΔΙΟ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με Ε = $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.\upsilon$ όπου β_1, β_2 οι βάσεις του και υ το ύψος του.



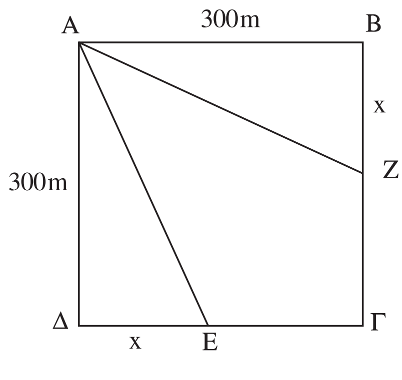
Β. Στο διπλανό ισοσκελές τραπέζιο να υπολογίσετε:

α) το ύψος του υ και

β) το εμβαδόν του

ΘΕΜΑ 2ο

Τετραγωνικός αγρός με πλευρά 300 m χωρίζεται σε τρία ισεμβαδικά οικόπεδα, όπως στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε για κάθε οικόπεδο:



Α. α) το εμβαδόν του,

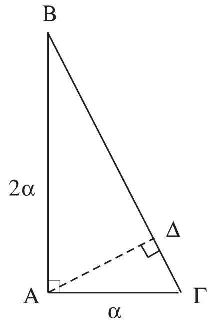
β) τις διαστάσεις του.

Β. Στο διπλανό σχήμα τα ΑΒΖ, ΑΖΓΕ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά. Υπολογίστε το x.

3ο ΣΧΕΔΙΟ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του.



Β. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

α) το εμβαδόν του

β) την ΒΓ και

γ) το ύψος ΑΔ.

ΘΕΜΑ 2ο

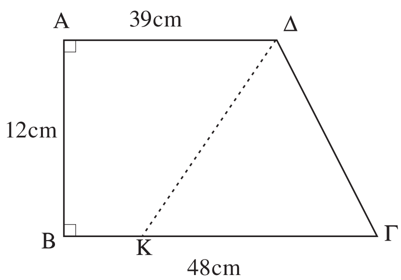
Δίνεται ένα ορθογώνιο τραπέζιο.

Να υπολογίσετε:

Α. το εμβαδόν του

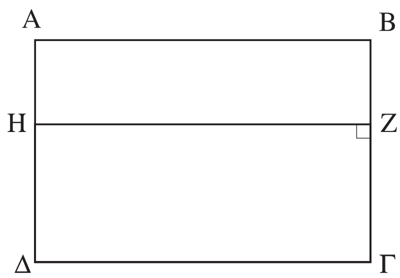
Β. την περίμετρό του

Γ. Αν η ΔΚ χωρίζει το τραπέζιο ΑΒΓΔ σε δύο ισοδύναμα σχήματα ΑΒΚΔ και ΚΓΔ., να υπολογίσετε τα μήκη ΒΚ και ΚΓ.



4ο ΣΧΕΔΙΟ

ΘΕΜΑ 1ο



Α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν τυχόντος παραλληλογράμμου είναι ίσο προς το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο προς αυτή ύψος.

Β. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:
(ΑΒΖΗ) = 20 cm^2, (ΗΖΓΔ) = 30 cm^2
και ΑΒ = 10 cm.

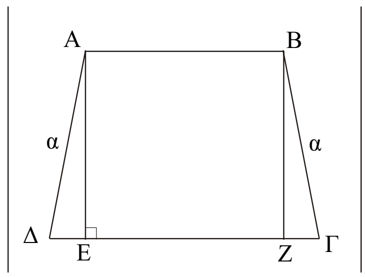
i) Το μήκος του ΒΖ είναι

α) 4 cm, β) 2 cm, γ) 3 cm, δ) 1,5 cm, ε) $\frac{10}{2}$ cm

ii) Το μήκος του ΖΓ είναι

α) $\frac{30}{2}$ cm, β) 12 cm, γ) 2 cm, δ) 3 cm, ε) 6 cm

ΘΕΜΑ 2ο



Όταν το οικόπεδο του διπλανού σχήματος συμπεριελήφθη στο σχέδιο πόλης, οι δύο δρόμοι που χαράχθηκαν, απέκοψαν τέτοιο τμήμα της έκτασής του, ώστε ο λόγος του αρχικού εμβαδού του προς το εμβαδόν που αποκόπηκε είναι $\frac{5}{1}$. Αν ΑΒ = 10 m και οι γωνίες Δ και Γ είναι ίσες με 60°, να υπολογίσετε:

α) το μήκος του ΔΕ συναρτήσει του α

β) την πλευρά α

γ) το εμβαδόν που αποκόπηκε από τη χάραξη των δρόμων.

δ) Αν το οικόπεδο είχε πριν τη χάραξη των δρόμων αξία 3.000.000 δρχ., πόση πρέπει να είναι η αποζημίωση του οικοπεδούχου από την απαλλοτρίωση αυτή;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δ, **2.** Ε, **3.** Β, **4.** Γ, **5.** Δ, **6.** Α, **7.** Δ, **8.** Ε, **9.** Γ, **10.** Δ, **11.** Δ, **12.** Β, **13.** Α, **14.** Δ, **15.** Γ, **16.** Α, **17.** Β, **18.** Β.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Λ, **2.** Σ, **3.** Σ, **4.** Σ, **5.** Λ, **6.** Λ, **7.** Σ, **8.** Σ, **9.** Σ, **10.** Σ, **11.** Λ, **12.** Σ, **13.** Λ, **14.** Σ, **15.** Λ, **16.** Λ, **17.** Σ, **18.** Λ, **19.** Λ, **20.** Λ, **21.** Λ, **22.** Σ, **23.** Σ, **24.** Σ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Β
2	Α
3	Δ

2.

1	Ε
2	Α
3	Γ

3.

1	Δ
2	Α
3	Β
4	Γ

4.

1	ΣΤ
2	Δ
3	Γ
4	Ε

5.

1	Α
2	ΣΤ
3	Δ
4	Γ

6.

1	Ζ
2	Ε
3	Γ
4	Α
5	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Το ύψος του.

2. Το μισό της άλλης.

3. $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

4. Η Γ και είναι ίση με 90°.

5. Το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

6. δ_1, $\dfrac{\delta_2}{2}$ ή οι $\dfrac{\delta_1}{2}$, δ_2.

7. $\dfrac{\alpha\gamma}{4}$

8. α) 24 β) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ γ) $\dfrac{9\alpha}{2}$

9. α) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ β) $2\sqrt{5}$ γ) $25\sqrt{3}$ δ) $4\sqrt{3}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Το τετράπλευρο ΔΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, από το οποίο προκύπτει (ΔΕΖ) = (ΖΓΕ).

β) Όμοια (ΑΔΖ) = (ΔΕΖ) = (ΔΒΕ) = (ΖΕΓ). Άρα (ΔΕΖ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ)

2. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ΑΓ η διαγώνιος. Προσθέτοντας τα εμβαδά των δύο τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ καταλήγουμε στο ζητούμενο.

3. α) (ΑΟΔ) = $\frac{1}{4}$ ΟΔ· ΟΑ

β) (ΑΒΓΔ) = (ΑΟΔ) + (ΟΓΔ) + (ΒΟΓ) + (ΑΟΒ) = $\frac{1}{4}$ ΑΓ·ΑΒ

4. Αν από το Ε φέρουμε ΖΗ // ΒΓ // ΑΔ και ΚΛ // ΑΒ // ΓΔ τότε (ΔΑΒ) = (ΔΓΒ). Επίσης (ΕΖΒ) = (ΕΛΒ) και (ΔΚΕ) = (ΔΗΕ) ως γνωστό. Αν από ίσα αφαιρέσουμε ίσα προκύπτει (ΑΚΕΖ) = (ΕΛΓΗ).

5. Παρατηρούμε ότι αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΒΓΔ έχουμε: (ΒΟΑ) = (ΒΑΕ), (ΒΓΖ) = (ΒΟΓ), (ΔΟΓ) = (ΔΗΓ), (ΔΟΑ) = (ΔΑΘ). Από αυτά παίρνουμε ότι (ΗΖΕΘ) = 2 (ΑΒΓΔ).

6. Θα είναι $\frac{\delta_1\delta_2}{2} = \frac{\delta_1\alpha}{2}$ ή $\alpha = \delta_2$, δηλαδή ο ρόμβος χωρίζεται σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα από την διαγώνιο δ_2. Άρα έχει μια γωνία 60°.

7. Είναι $\frac{1}{2}\alpha\ \mu_\alpha = \frac{1}{2}\ \alpha\ \upsilon_\alpha$ ή $\mu_\alpha = \upsilon_\alpha$. Τότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

8. Έχουμε $\frac{1}{2}α\, δ_α = \frac{1}{2}α\, υ_α$ ή $δ_α = υ_α$. Άρα το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

9. Είναι $α = \frac{3β}{4}$ και $α^2 = \frac{9β^2}{16}$.

10. Τα τραπέζια ΑΕΖΔ και ΒΓΖΕ είναι ισοδύναμα, γιατί έχουν ίσα ύψη και ίσο ημιάθροισμα βάσεων.

11. α) Επειδή γωνία Ο + γωνία Β = 180° προκύπτει $\frac{(ΔΟΕ)}{(ΑΒΓ)} = 1$ ή (ΔΟΕ) = (ΑΒΓ)

β) Όμοια βρίσκουμε ότι (ΔΟΖ) = (ΑΒΓ) και (ΕΟΖ) = (ΑΒΓ).

Άρα (ΔΕΖ) = 3 (ΑΒΓ).

12. Είναι $\frac{ΑΓ^2}{4} = 4\,(ΑΟΔ)$ ή $ΑΓ^2 = 2ΑΓ^2 ημφ$ ή $ημφ = \frac{1}{2}$ ή φ = 30°.

13. Αν ελαττωθεί η πλευρά κατά 10, τότε η πλευρά του τετραγώνου γίνεται 6.

14. Τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ είναι ισοδύναμα, γιατί το κάθε ένα αποτελείται από το ΚΑΒ τρίγωνο και από τα ισοδύναμα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ.

15. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΒΓ έχουν κοινό ύψος και ο λόγος των εμβαδών τους είναι όπως ο λόγος των βάσεών τους.

16. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν δύο γωνίες παραπληρωματικές. Επομένως

$$\frac{(ΚΛΜ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΚΛ \cdot ΛΜ}{α^2}$$

17. α) $\frac{\alpha^2}{2}$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΛ, ΒΚΛ, ΓΚΛ, ΔΚΛ έχουν κοινή βάση την ΚΛ και κοινό ύψος α.

18. $\alpha = 15$ cm

19. $E = 60\ cm^2$

20. $\alpha = 6$ cm είναι η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου.

21. Φέρνουμε την διαγώνιο ΑΓ και εκφράζουμε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ και ΑΓΛ σαν μέρος του εμβαδού του ΑΒΓΔ.

22. α) $ΟΜ = \frac{\alpha}{2}$, $ΟΒ = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $ΒΜ = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+\beta^2}$

β) (ΟΒΜ) = (ΟΓΜ)

γ) $(ΟΒΜ) = \frac{\alpha\beta}{8}$

23. Παίρνουμε (ΑΒΓ) = (ΚΑΒ) + (ΚΑΓ) με Ε = (ΑΒΓ) προκύπτει $2E = R(\beta + \gamma)$.

24. Παίρνουμε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒ΄Γ΄)}$ και από την ομοιότητα στη συνέχεια των τριγώνων ΑΒΒ΄ και ΑΓΓ΄ προκύπτει ότι (ΑΒΓ) = (ΑΒ΄Γ΄).

25. $(ΚΒΓ) = 15\sqrt{3}$, $(ΑΒΓ) = 23\sqrt{3}$

26. α) Η πλευρά του ρόμβου είναι 5. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 = 5^2$ ή $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 100$. Στη συνέχεια από τη γνωστή ταυτότητα $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 2\delta_1\delta_2 = 100$. Από την σχέση αυτή καταλήγουμε ότι: $\delta_1\delta_2 = 48$ και Ε = 24.

β) υ = 4,8.

27. Αν γωνία Δ = x και γωνία Α = 5x τότε το ύψος ΑΜ = $\frac{1}{2}$ ΑΔ. Επίσης αν ΑΔ = y τότε y = 4 cm και ΑΒ = ΓΔ = 20 cm. Το άλλο του ύψος θα είναι 10 cm.

28. α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΖΕ έχουν τις γωνίες τους Γ παραπληρωματικές. Επομένως έχουμε ότι (ΓΖΕ) = 2 (ΑΒΓ).

β) Όμοια βρίσκουμε ότι: (ΒΕΔ) = 2 (ΑΒΓ), (ΖΑΔ) = 2 (ΑΒΓ).
Τελικά (ΔΕΖ) = 7 (ΑΒΓ)

29. Αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΕ)}$. Παρατηρήστε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία την γωνία Α, όμοια για τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΕ.

30. α) γωνία ΚΒΕ + γωνία ΑΒΓ = 180° $\Rightarrow$ (ΚΒΕ) = (ΑΒΓ) $\Rightarrow$ (ΚΒΕ) = $\frac{\beta\cdot\gamma}{2}$.

Όμοια (ΔΓΙ) = $\frac{\beta\cdot\gamma}{2}$ και (ΛΑΕ) = $\frac{\beta\cdot\gamma}{2}$

β) (ΔΕΚΛΘΙ) = $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\cdot\gamma$

31. α) ΕΑΗ + ΒΑΓ = 180°

β) (ΒΓΖΗΕΔΒ) = $\beta^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$

32. α) Το τρίγωνο ΑΗΓ ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα ΗΓ = υ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ ΑΒ = 2ΒΗ. Προκύπτει ΑΒ = $\frac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}$, ΑΓ = $\upsilon\sqrt{2}$, ΒΓ = $\upsilon + \frac{\upsilon\sqrt{3}}{3}$

β) Ε = $\frac{1}{6}\upsilon^2(\sqrt{3}+3)$

γ) (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ΑΓ·υ΄, (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ΑΒ·υ΄΄

33. α) Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Β. Άρα $\frac{(\Delta B E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{6}$. Όμοια τα τρίγωνα ΖΓΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Γ. Άρα $\frac{(Z\Gamma E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{6}$. Όμοια τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Α. Άρα $\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{8}$.

β) (ΔΕΖ) = $\frac{7}{24}$ (ΑΒΓ)

34. α) (ΑΒΓ) = $9\sqrt{3}$ cm^2

β) Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Γ.

Άρα (ΔΕΓ) = $3\sqrt{3}$ cm^2

35. α) Τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΔΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Μ. Επίσης εφαρμόζουμε θεώρημα διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

β) Τα τρίγωνα ΜΔΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Γ.

36. Στο περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Ο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

ΑΒ + ΔΓ = ΑΔ + ΒΓ

37. α) (ΕΖΘ) = (ΑΘΕ) - (ΑΖΕ)

(ΑΖΔ) = (ΑΔΕ) - (ΑΖΕ)

β) Όμοια ισχύει (ΕΗΘ) = (ΒΓΗ)

38. α) $\text{HM} = \dfrac{\text{AZ} + \Delta\text{E}}{2}$

β) ΗΜ = ΜΘ

39. α) (ΑΗΓ) = (ΑΘΗ) + (ΘΗΓ)

$\Theta\text{H} = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

β) $(\text{ABZE}) - (\text{EZ}\Gamma\Delta) = \dfrac{(\alpha - \beta)}{4} \cdot \upsilon$

40. α) Πυθαγόρειο θεώρημα

β) Υπολογίζουμε τα ΔΓ και ΒΔ από τα γνωστά στοιχεία

41. Ισχύει ΑΕΖ ≈ ΑΒΓ. Άρα $\dfrac{(\text{AEZ})}{(\text{AB}\Gamma)} = \left(\dfrac{\text{AM}}{\text{A}\Delta}\right)^2$

$(\text{AEZ}) = 40 \text{ cm}^2$

42. α) Αποδείξτε ότι $Α'Δ' = Β'Γ'$ και $Α'Β' = Γ'Δ'$

β) $(Α'Β'Γ'Δ') = 5 \cdot Ε$

43. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΔ έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη.

44. $ΑΒ = 2 \cdot ΖΒ + ΔΓ$

45. Βάση μεγάλη Β = 26 m

Βάση μικρή β = 14 m

Μη παράλληλες πλευρές γ = 10 m

46. α) Υπολογίζουμε τα ΟΔ και ΟΓ με δεδομένο ότι ΟΔΓ≈ΟΑΒ.

β) (ΑΒΓΔ) = (ΟΑΒ) - (ΟΔΓ)

47. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha = \upsilon_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (αντίστοιχα για μ_β, μ_γ) και $Ε = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

48. Δείξτε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων ισούται με το ημιεμβαδόν του παραλληλογράμμου.

50. $Ε_1 + Ε_2 = Ε_3$.

51. Γωνία $Γ = 90°$

52. α) $(\alpha + \beta)^2$, β) Τετράγωνο, γ) $\dfrac{\alpha \cdot \beta}{2}$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, δ) Πυθαγόρειο θεώρημα.

53. α) 900 cm^2 β) 675 cm^2

54. γ) τραπέζιο δ) i) 33.750, ii) $500\sqrt{2}$

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΥΘΕΙΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α $(x_1,\ y_1)$ και Β $(x_2,\ y_2)$ ορίζεται πάντα ως $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. **Σ** **Λ**

3. * Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία Α $(x_1,\ y_1)$ και Β $(x_1,\ y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν. **Σ** **Λ**

4. * Υπάρχουν δύο ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. **Σ** **Λ**

5. ** Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \dfrac{1}{|\lambda|}x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$. **Σ** **Λ**

6. * Οι ευθείες $2x + y = 1$ και $x - 2y = 1$ τέμνονται. **Σ** **Λ**

7. * Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται. **Σ** **Λ**

8. * Οι ευθείες $y = -\dfrac{\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$. **Σ** **Λ**

9. * Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $4x - 2y + 5 = 0$ είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**

0. * Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων x΄x, y΄y έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ και τέμνονται κάθετα. **Σ** **Λ**

1. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**

2. * Οι ευθείες $5x + y = 1$ και $x - 5y - 1 = 0$ είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

3. ***** Τα σημεία Α (- 2, - 1), Β (1, 4) και Γ (- 4, 2) είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

4. ***** Τα σημεία Α (κ, α), Β (λ, α), Γ (μ, α) είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

5. ****** Τα σημεία Α (α + β, γ), Β (β + γ, α), Γ (γ + α, β) είναι συνευθειακά αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. **Σ** **Λ**

6. ***** Η ευθεία που περνά από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) έχει εξίσωση: $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ με $(x_1 \neq x_2)$. **Σ** **Λ**

7. ***** Από το σημείο Α (x_0, y_0) περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ. **Σ** **Λ**

8. ***** Η ευθεία που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 4$, έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x - 1)$. **Σ** **Λ**

9. ***** Η ευθεία ΑΒ με Α (1, - 4) και Β (- 1, - 5) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 3$. **Σ** **Λ**

0. ****** Δίνονται τα σημεία Α (- 3, - 1), Β (2, 2), Γ (- 3, 4) και Δ (3, - 6). Η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ. **Σ** **Λ**

1. ****** Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (1, 1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ίση με 135° είναι $x + y = 0$. **Σ** **Λ**

2. ***** Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α (α, 0) και Β (0, β). **Σ** **Λ**

3. ***** Η ευθεία $2y - 3x + 4 = 0$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(\frac{4}{3}, 0)$. **Σ** **Λ**

4. ***** Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_0$. **Σ** **Λ**

5. * Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία x + y = 0 με τον άξονα x΄x είναι 45°. Σ Λ

6. ** Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα x΄x είναι 120°. Σ Λ

7. * Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 με $Α \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας. Σ Λ

8. ** Αν $Α \neq Β$, τότε η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει πάντοτε ευθεία. Σ Λ

9. ** Στην ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει Β = 0. Σ Λ

0. * Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή Αx + Βy = 0. Σ Λ

1. * Το διάνυσμα $\vec{n}$ =(- 2, 1) είναι κάθετο στην ευθεία x + y + 2 = 0. Σ Λ

2. * Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ = (Β, - Α). Σ Λ

3. * Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}$ = (Α, - Β). Σ Λ

4. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ = (Α, Β) και $\vec{\delta}_2$ = (- Β, Α) αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ Λ

5. ** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ = (Α, Β) με $Β \neq 0$ έχει εξίσωση της μορφής: Αx + Βy + Γ = 0. Σ Λ

6. * Η απόσταση του σημείου $Μ_0$ (x_0, y_0) από την ευθεία (ε): Αx + Βy + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο $d(Μ_0, ε) = \dfrac{Αx_0 + Βy_0 + Γ}{\sqrt{Α^2 + Β^2}}$. Σ Λ

7. * Η απόσταση $d(Μ_0, ε)$ του σημείου $Μ_0$ (x_0, y_0) από την ευθεία (ε): Αx + Βy + Γ = 0 επαληθεύει την ισότητα $|Αx_0 + Βy_0 + Γ| = d(Μ_0, ε)\sqrt{Α^2 + Β^2}$. Σ Λ

8. ***** Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με την ορίζουσα det ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$). **Σ** **Λ**

9. ***** Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. **Σ** **Λ**

0. ***** Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x για κάθε $\kappa \neq 0$. **Σ** **Λ**

1. ***** Η ευθεία $x + \lambda (x - y) - \lambda = 0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ. **Σ** **Λ**

2. ****** Οι ευθείες ε_1: $y = 2x + 1$, ε_2: $y = 2x - 1$, ε_3: $x + 2y + 1 = 0$ και ε_4: $x + 2y + 2 = 0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **Σ** **Λ**

3. ****** Η απόσταση των ευθειών ε_1: $y = \lambda x + \beta_1$ και ε_2: $y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο: $d (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dfrac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$. **Σ** **Λ**

4. ***** Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία ε΄ : $x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο (3, 2), είναι $y = 3$. **Σ** **Λ**

5. ***** Οι ευθείες $2x - 3y = 11$ και $4y + 3x + 9 = 0$ έχουν κοινό σημείο το (- 1, 3). **Σ** **Λ**

6. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα x΄x για κάθε $\lambda \in R$. **Σ** **Λ**

7. ***** Αν οι ευθείες $(\mu + 1) x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu = 2$. **Σ** **Λ**

8. ****** Οι ευθείες ε_1: $7x + 3y + 2 = 0$ και ε_2: $2x + 5y - 3 = 0$ είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

9. ***** Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου. **Σ** **Λ**

0. * Το σημείο Α (ημθ, 0) με $θ = \frac{π}{7}$ ανήκει στην ευθεία $2x + κy = 3$. Σ Λ

1. * Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y = x$ και $y = x + 1$ είναι 1. Σ Λ

2. ** Η εξίσωση $y = x + β$ με $β \in R$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y = x$. Σ Λ

3. * Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις $3x - y = 4$, $y = - 5x - 4$, $y = 3x + 5$. Σ Λ

4. ** Η συμμετρική της ευθείας $y = 3x$ ως προς τον άξονα x΄x έχει εξίσωση $y = 3x + 3$. Σ Λ

5. ** Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α (5, 1), Β (6, 3) και Γ (2, 2) είναι $y - 2 = - \frac{1}{2} (x - 2)$. Σ Λ

6. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x + 5y = 10$ και τους άξονες x΄x και y΄y, είναι 5 τ.μ. Σ Λ

7. ** Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών: $(x + y + 1) + λ (3x - 2y - 4) = 0$ περνούν από το σημείο (2, 1). Σ Λ

8. * Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. Σ Λ

9. ** Η εξίσωση της ευθείας $Αx + Βy + Γ = 0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{δ} . \vec{v} + Γ = 0$, όπου $\vec{δ} = (Α, Β)$ και $\vec{v} = (x, y)$. Σ Λ

0. * Οι ευθείες $Α_1x + Β_1y + Γ_1 = 0$ και $Α_2x + Β_2y + Γ_2 = 0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $Α_1.Α_2 = Β_1.Β_2$. Σ Λ

1. * Αν Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου και (ΑΒΓ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $\det (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AΓ}) = 2 (ΑΒΓ)$ ή $\det (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AΓ}) = - 2 (ΑΒΓ)$. Σ Λ

2. ****** Τα σημεία Α (1, 1), Β (- 1, 1) και Γ (1, - 1) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. **Σ** **Λ**

3. ***** Για την απόσταση d (Α, ε) του σημείου Α από την ευθεία ε ισχύει d (Α, ε) = 0. Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε. **Σ** **Λ**

4. ***** Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. **Σ** **Λ**

5. ***** Η εξίσωση $y = |x|$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ****** Αν η εξίσωση με δύο αγνώστους $f(x, y) = 0$ (1) είναι εξίσωση μιας γραμμής C, τότε

Α. οι συντεταγμένες μόνο μερικών σημείων της C επαληθεύουν την (1)
Β. οι συντεταγμένες των σημείων της C δεν επαληθεύουν την (1)
Γ. το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την (1) δεν ανήκει στην C
Δ. όλα τα σημεία που επαληθεύουν την (1) ανήκουν στην C
Ε. υπάρχουν σημεία της C των οποίων οι συντεταγμένες δεν επαληθεύουν την (1)

2. ****** Δίνεται ένα σημείο Μ μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (3, -4)$. Ξεκινώντας από το σημείο Μ θα ξαναβρεθούμε σε σημείο της ευθείας, όταν

Α. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες κάτω
Β. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες πάνω
Γ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες δεξιά
Δ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες αριστερά
Ε. κινηθούμε 3 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες πάνω

3. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον x΄x ισούται

Α. με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Β. με την εφαπτομένη της συμπληρωματικής γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Γ. με το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος κάθετου στην (ε)

Δ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Ε. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με το θετικό ημιάξονα Οy

4. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $7 + 3y = - 4x$ είναι

Α. -4 **Β.** 7 **Γ.** $-\frac{4}{3}$ **Δ.** $-\frac{7}{3}$ **Ε.** $-\frac{3}{4}$

5. ***** Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$. Μια άλλη ευθεία (ε΄), που είναι κάθετη στην (ε), έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α. $-\frac{3}{2}$ **Β.** $-\frac{2}{3}$ **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** $\frac{3}{2}$ **Ε.** -1

6. ***** Μια ευθεία (ε) έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$ και διέρχεται από τη σημείο (- 1, 3). Η εξίσωσή της είναι

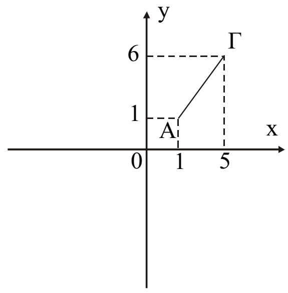
Α. $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$ **Β.** $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$ **Γ.** $x + 1 = \frac{1}{2}(y - 3)$

Δ. $x - 3 = \frac{1}{2}(y + 2)$ **Ε.** καμία από τις παραπάνω

7. ***** Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

Α. $\frac{6}{5}$ **Β.** $\frac{5}{4}$ **Γ.** $\frac{4}{5}$

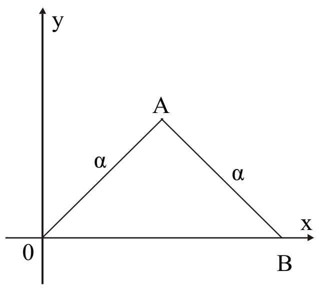
Δ. $\frac{2}{3}$ **Ε.** $\frac{5}{6}$



8. ***** Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}\,x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με

Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45°

Δ. 90° **Ε.** 135°



9. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον y΄y ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** εφ $\frac{\pi}{4}$ **Ε.** δεν ορίζεται

10. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

Α. $y_1 \neq y_2$ **Β.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$

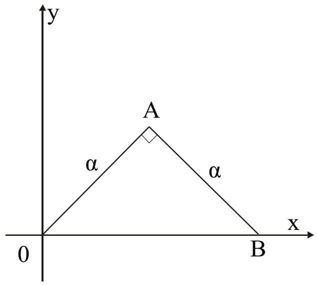
Γ. $x_1 \neq -x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **Ε.** $x_1 \neq x_2$

11. ****** Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει πάντα ευθεία με

Α. Α = 0 και Β = 0 **Β.** Α = 0 ή Γ ≠ 0

Γ. $Α^2 + Β^2 \geq 0$ **Δ.** $|Α| + |Β| > 0$ **Ε.** $|Α| + |Β| < 0$

2. ***** Στο διπλανό σχήμα η γωνία ΟΑΒ είναι ορθή, $\alpha \neq 1$ και Β (β, 0). Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι



Α. $y = \dfrac{\alpha}{\beta}\ x$ **Β.** $y = \dfrac{\beta}{\alpha}\ x$ **Γ.** $y = \sqrt{\alpha}\ x$

Δ. $y = \alpha\beta x$ **Ε.** $y = x$

13. ***** Το κοινό σημείο του άξονα x΄x και της ευθείας ΑΒ με Α (0, 4) και Β (1, 5) είναι

Α. (4, 0) **Β.** (0, 0) **Γ.** (5, 0) **Δ.** (- 4, 0) **Ε.** (0, - 3)

14. ***** Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (1, - 1) και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + 6y = 1$ είναι

Α. $y - 1 = -\dfrac{1}{3}\ (x + 1)$ **Β.** $y + 1 = -\dfrac{1}{3}\ (x - 1)$ **Γ.** $y - 1 = \dfrac{1}{3}\ (x - 1)$

Δ. $y + 1 = -\dfrac{1}{3}\ (x + 1)$ **Ε.** $y + 1 = \dfrac{1}{3}\ (x + 1)$

15. ***** Αν Α (1, 3) και Β (- 2, 4), τότε η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

Α. $y + 3 = -\dfrac{1}{3}\ (x - 1)$ **Β.** $y - 4 = -\dfrac{1}{3}\ (x + 2)$ **Γ.** $y - 1 = -\dfrac{1}{3}\ (x - 3)$

Δ. $y = -\dfrac{1}{3}\ x + 4$ **Ε.** $3y + x + 10 = 0$

16. ****** Η ευθεία $y = \lambda x + 3$

Α. είναι κάθετη στον x΄x για κάποια τιμή του $\lambda \in R$

Β. είναι κάθετη στον y΄y για κάποια τιμή του $\lambda \in R$

Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\dfrac{1}{\lambda}, 5)$

Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων

Ε. για $\lambda = 1$ είναι κάθετη στην $y = x$

17. ****** Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

Α. τέμνονται για κάθε $\lambda \in R$

Β. είναι και οι δύο κάθετες στην $y = - x$

Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = - 1$

Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$

Ε. τέμνονται στο σημείο $(- 1, 0)$ για $\lambda = 2$

18. ****** Το διάνυσμα $\vec{\delta}\ (- 2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία

Α. $2x - 3y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 1 = 0$ **Γ.** $3x + 2y + 1 = 0$

Δ. $3x - 2y + 1 = 0$ **Ε.** $3x - 2y - 1 = 0$

19. ****** Έστω (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:

Α. το διάνυσμα $\vec{v} = (B, A)$ είναι κάθετο στην (ε)

Β. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, - B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Γ. το διάνυσμα $\vec{v} = (- B, A)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Δ. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Ε. το διάνυσμα $\vec{v} = (- A, B)$ είναι κάθετο στην (ε)

20. ***** Η ευθεία που περνά από το σημείο $(- 1, 5)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{3}x - 7$ έχει εξίσωση

Α. $y = - 3x + 7$ **Β.** $y + 1 = - 3 (x - 5)$ **Γ.** $y - 5 = - 3 (x + 1)$

Δ. $y - 5 = 3 (x + 1)$ **Ε.** $y + 1 = 3 (x + 5)$

21. ***** Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ με Α $(1998, 0)$, Β $(0, 1998)$ είναι

Α. $1998x - 1998y = 0$ **Β.** $1998y + 1998x = 1$ **Γ.** $\frac{x}{1998} + \frac{y}{1998} = 1$

Δ. $1998x - 1998y = 1$ **Ε.** $y = 1998x + 1998$

22. ***** Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α (3, 5) και Β (- 1, 8). Η προβολή του ΑΒ στον άξονα x΄x έχει μήκος

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** - 1 **Δ.** 8 **Ε.** 4

23. ****** Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v}$ = (α, β) με αβ ≠ 0. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

Α. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$ **Β.** $y - y_0 = \beta\,(x - x_0)$ **Γ.** $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$

Δ. $y = \frac{\beta}{\alpha}\,(x - x_0)$ **Ε.** $y - y_0 = -\,\frac{\beta}{\alpha}\,(x - x_0)$

24. ****** Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία είναι

Α. $y = |\lambda|\,x - 2$ **Β.** $y = 2$ **Γ.** $y = 3x + 2$

Δ. $y = |\lambda|\,x + \beta$ με $\lambda < 0$ **Ε.** η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$

25. ****** Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα Α (α, 0), Β (0, β) αντίστοιχα με α = 2β. Τότε

Α. η (ε) σχηματίζει γωνία 60° με τον x΄x

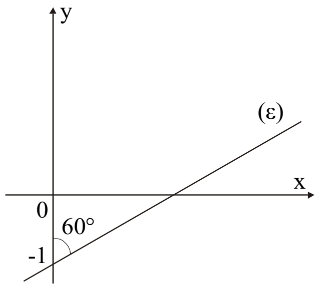
Β. η (ε) σχηματίζει γωνία 90° με τον x΄x

Γ. η (ε) σχηματίζει γωνία οξεία με τον x΄x

Δ. η (ε) σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον x΄x

Ε. ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\frac{1}{2}$

6. ****** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει εξίσωση



Α. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ **Β.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$

Γ. $y = \frac{1}{2}x + 1$ **Δ.** $y = \frac{1}{2}x - 1$

Ε. $y = \sqrt{3}x + 1$

27. ***** Αν το σημείο (3, κ) ανήκει στην ευθεία (ε) $\frac{x - 1}{2} + \frac{y - 2}{3} = 1$, τότε

Α. κ = 0 **Β.** κ = 2 **Γ.** κ = 3 **Δ.** κ = 5 **Ε.** κ = 1

28. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει

Α. μια ευθεία κάθετη στον x΄x

Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy

Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx΄

Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx΄

Ε. μια ευθεία κάθετη στον y΄y

29. ****** Δίνονται τα σημεία Α (8, 1), Β (7, 3), Γ (4, 5). Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ είναι

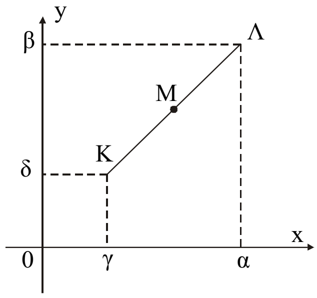
Α. $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$ **Β.** $y - 5 = 2(x + 4)$ **Γ.** $y - 5 = -2(x - 4)$

Δ. $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες

30. ***** Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (- 8, 4) και Β (- 6, - 2) είναι

Α. (1, - 7) **Β.** (3 ,- 1) **Γ.** (- 5, - 1) **Δ.** (- 7, 1) **Ε.** (- 1, - 3)

1. ***** Στο διπλανό σχήμα το μέσο Μ του ΚΛ έχει συντεταγμένες στον άξονα x΄x το σημείο



Α. $(0, \frac{\beta - \delta}{2})$ **Β.** $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\beta - \delta}{2})$

Γ. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, 0)$ **Δ.** $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, 0)$

Ε. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta + \delta}{2})$

32. ***** Αν Α (1, 3) και Β (5, 3), το συμμετρικό του μέσου του ΑΒ ως προς τον άξονα x΄x είναι το

Α. (2, 3) **Β.** (2 ,- 3) **Γ.** (3, - 3) **Δ.** (- 3, 3) **Ε.** (- 3, - 3)

33. ***** Δίνονται τα σημεία Α (0, 4) και Β (4, 0). Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΟΑΒ είναι (Ο το σημείο τομής των x΄x, y΄y)

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** - 2 **Ε.** - 4

34. ****** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α (0, 0), Β (3, 1), Γ (5 ,3) και Δ (κ, κ). Η τιμή του κ είναι

Α. 3 **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** - 2 **Ε.** - 3

35. ***** Τα σημεία Α (1, 1), Β (3, 3) και Γ (5, κ) είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι

Α. - 4 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 1

36. ***** Το σημείο Μ $(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (- 1, - 5). Το σημείο Β είναι το

Α. (0, - 5) **Β.** $(-1, -\frac{19}{2})$ **Γ.** (- 1, 4) **Δ.** (1, - 4) **Ε.** $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$

37. ***** Δίνεται ευθεία (ε): - 3x + 2y + 1 = 0 και το σημείο Μ (1, - 2). Τότε η απόσταση του Μ από την (ε) είναι

Α. $-\dfrac{6}{\sqrt{13}}$ **Β.** $\dfrac{6}{13}$ **Γ.** $-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\dfrac{\sqrt{6}}{13}$

38. *** *** Η απόσταση του σημείου Α (- 1, 1) από την ευθεία αx + βy = 0 με α > β είναι

Α. $\dfrac{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Β.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Γ.** $-\dfrac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Δ. $\dfrac{|\alpha+\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ **Ε.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha+\beta}$

39. ***** Τα σημεία Α (α, α + 1), Β (α + 1, α + 2) και Γ (α + 2, α + 3) είναι

Α. συνευθειακά

Β. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

Γ. κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου

Δ. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

Ε. κορυφές ισοσκελούς οξυγωνίου τριγώνου

40. ***** Τα σημεία Ο (0, 0), Α (κ, 0), Β (0, λ) με κ, λ. > 0 ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

Α. 2κλ **Β.** $\dfrac{1}{2}$ (κ + λ) κ **Γ.** κλ

Δ. $\dfrac{1}{2}$ (κ - λ) (κ + λ) **Ε.** $\dfrac{1}{2}$ κλ

41. ***** Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές Α (0, 0), Β (α, 0) και Γ (α, β) είναι

Α. $\dfrac{\alpha\beta}{2}$ **Β.** $\dfrac{\alpha|\beta|}{2}$ **Γ.** αβ **Δ.** $\dfrac{|\alpha\beta|}{2}$ **Ε.** $\dfrac{|\alpha|\beta}{2}$

42. ***** Η απόσταση του σημείου (5, - 1) από την ευθεία 3x - 2y - 2 = 0 είναι

Α. $\frac{13\sqrt{15}}{13}$ **Β.** $\frac{13\sqrt{13}}{15}$ **Γ.** $\frac{15\sqrt{13}}{13}$ **Δ.** $\frac{15\sqrt{15}}{13}$ **Ε.** $\frac{15\sqrt{13}}{15}$

43. ****** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία 3x + 3y = 6 είναι σε τετραγωνικές μονάδες

Α. $\frac{9}{2}$ **Β.** 9 **Γ.** 4 **Δ.** 2 **Ε.** 1

44. ***** Το συμμετρικό του σημείου (4, 1) ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων είναι

Α. (- 4, 1) **Β.** (4, - 1) **Γ.** (- 4, - 1) **Δ.** (2, $\frac{1}{2}$) **Ε.** (1, 4)

45. ***** Οι ευθείες y = 2 και y = $\sqrt{3}$ x - 1 σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με

Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45° **Δ.** 75° **Ε.** 15°

46. ***** Δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεων τους

Α. έχει άπειρες λύσεις **Β.** έχει μοναδική λύση

Γ. δεν έχει λύση **Δ.** έχει δύο λύσεις

Ε. έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x)

47. ***** Μια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν

Α. η εξίσωσή της είναι της μορφής y = c

Β. έχει συντελεστή διεύθυνσης 0

Γ. είναι παράλληλη με τον x΄x

Δ. δεν ορίζεται ο συντελεστής της

Ε. έχει εξίσωση y = λx

48. ***** Η ευθεία λx + y + μ = 0 είναι κάθετη στην y = x. Τότε ο λ είναι ίσος με

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** 2

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ****** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία που η εξίσωσή της βρίσκεται στη στήλη (Α) με τον συντελεστή της που βρίσκεται στη στήλη (Β) ($\alpha, \beta \neq 0$).

στήλη Α	στήλη Β
1) **ε_1:** $y = \alpha x + \beta$	**Α)** 0
2) **ε_2:** $y = y_0$	**Β)** δεν ορίζεται
3) **ε_3:** $x = x_0$	**Γ)** 1
4) **ε_4:** $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$,	**Δ)** β
5) **ε_5:** $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	**Ε)** α
	ΣΤ) $-\frac{\beta}{\alpha}$
	Ζ) $-\frac{\alpha}{\beta}$

2. ****** Η πρώτη στήλη περιέχει τους συντελεστές διεύθυνσης κάποιων ευθειών και η δεύτερη τις γωνίες που σχηματίζουν οι ίδιες ευθείες με τον άξονα x΄x. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα αντίστοιχα στοιχεία.

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	**Α)** 0
2) $-\sqrt{3}$	**Β)** $\frac{\pi}{4}$
3) δεν ορίζεται	**Γ)** $\frac{2\pi}{3}$
4) -1	**Δ)** $\frac{\pi}{6}$
5) 0	**Ε)** $\frac{\pi}{3}$
	ΣΤ) $\frac{\pi}{2}$
	Ζ) $\frac{5\pi}{6}$
	Η) $\frac{3\pi}{4}$

3. ****** Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις των ευθειών της στήλης (Α) με τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα x΄x της στήλης (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y = x - 1$	**Α)** 50°
	Β) 45°
2) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$	**Γ)** 135°
	Δ) 30°
3) $y = -x + \alpha$	**Ε)** 120°

4. ****** Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης (Α) με τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα της στήλης (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y = 2x - 1$	**Α)** $\vec{\delta}_1 = (0, 2)$
	Β) $\vec{\delta}_2 = (2, -1)$
2) $2x + y + 2 = 0$	**Γ)** $\vec{\delta}_3 = (2, 0)$
3) $y = 3$	**Δ)** $\vec{\delta}_4 = (2, 1)$
4) $x = -1$	**Ε)** $\vec{\delta}_5 = (1, -2)$
	ΣΤ) $\vec{\delta}_6 = (-1, -2)$

5. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης (Α) με το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους στη στήλη (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
1) ε_1**:** $y = x$, ε_2**:** $x = 5$	**Α)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2) ε_1**:** $y = 3$, ε_2**:** $y = \sqrt{3}x + 5$	**Β)** 0
3) ε_1**:** $x = -2$, ε_2**:** $\sqrt{3}x - y = 0$	**Γ)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ) 1
	Ε) $\frac{1}{2}$

6. ****** Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος γωνίας - σημείου στη στήλη (Α) με την αντίστοιχη ευθεία που ορίζεται από αυτό το ζεύγος και βρίσκεται στη στήλη (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
1) 45°, (0, 0)	**Α)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$
2) 60°, (0, 1)	**Β)** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) + 1$
3) 150°, (- 1, 0)	**Γ)** $y = x - 1$
4) 30°, (1, 1)	**Δ)** $y = x$
	Ε) $y = \sqrt{3}x + 1$

7. ****** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία της στήλης (Α) την απόσταση της αρχής των αξόνων από αυτή, που εμφανίζεται στη στήλη (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y = 2$	**Α)** 0
2) $x = -3$	**Β)** - 2
3) $2x - y = 0$	**Γ)** 1
4) $3x + 4y - 5 = 0$	**Δ)** 2
	Ε) - 1
	ΣΤ) 3

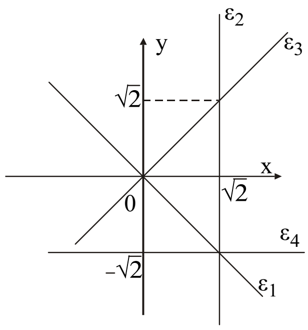
8. ****** Κάθε σημείο της στήλης (Α) βρίσκεται σε μια ευθεία της στήλης (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σημείο με την ευθεία στην οποία ανήκει.

στήλη Α **σημεία**	**στήλη Β** **ευθείες**
1) $(-1, 2)$	**Α)** $x - 3y = 9$
2) $(0, -3)$	**Β)** $3x + y = 15$
3) $(5, 0)$	**Γ)** $x + y = 1$
4) $(-2, -1)$	**Δ)** $2x - y = 0$
	Ε) $x + 2y + 4 = 0$
	ΣΤ) $y = 5x$

9. ****** Κάθε ευθεία της στήλης (Α) περιέχει ένα σημείο που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε ευθεία με το αντίστοιχο σημείο.

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y = -3x + 1$	**Α)** $(12, 0)$
	Β) $(0, 12)$
2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$	**Γ)** $(\frac{1}{3}, 0)$
3) $x = 2$	**Δ)** $(0, \frac{1}{3})$
	Ε) $(2, 7)$
	ΣΤ) $(7, 2)$

0. ****** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης (Α) με την εξίσωσή της που βρίσκεται στη στήλη (Β).

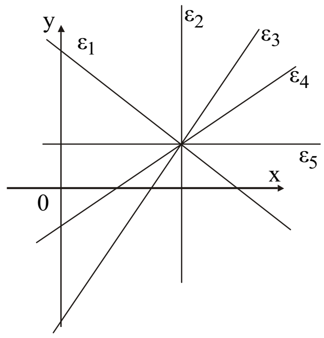


στήλη Α	**στήλη Β**
1) ε_1	**Α)** $y = x$
2) ε_2	**Β)** $x + y = \sqrt{2}$
3) ε_3	**Γ)** $x + y = 0$
4) ε_4	**Δ)** $x = \sqrt{2}$
5) x΄x	**Ε)** $y = \sqrt{2}\, x$
6) y΄y	**ΣΤ)** $y = 0$
	Ζ) $y = -\sqrt{2}$
	Η) $x = 0$
	Θ) $y = x + \sqrt{2}$

11. ****** Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε ευθεία της στήλης (Α) με μια ευθεία της στήλης (Β) στην οποία είναι κάθετη.

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y - x = 0$	**Α)** $3x = 2y$
2) $y = 2$	**Β)** $x + 2y = 2$
3) $2x + y = 2$	**Γ)** $x - 2y = 2$
4) $x - \frac{y}{2} = 1$	**Δ)** $x = 2$
	Ε) $y - x = 1$
	ΣΤ) $x + y = 0$

2. ****** Στη στήλη (Α) δίνεται ο χαρακτηρισμός του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.



στήλη Α	στήλη Β
1) αρνητικός	**Α)** ε_1
	Β) ε_2
2) μηδέν	**Γ)** ε_3
	Δ) ε_4
3) δεν ορίζεται	**Ε)** ε_5

13. ****** Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σημείο της στήλης (Α) με την εξίσωση της οικογένειας ευθειών της στήλης (Β), της οποίας αποτελεί το κέντρο.

στήλη Α **κέντρο**	**στήλη Β** **εξίσωση οικογένειας ευθειών**
1) (2, 1)	**Α)** $(x + 6y - 7) + \lambda (2x - 15y + 1) = 0$
	Β) $(x + y + 1) + \lambda (2x - 5y + 7) = 0$
2) (7, 1)	
	Γ) $(x + y - 3) + \lambda (2x - y - 3) = 0$
3) (- 1, 2)	**Δ)** $(x + y - 1) + \lambda (x + 2y - 3) = 0$
	Ε) $(x + y - 8) + \lambda (- x + 2y + 5) = 0$

14. ****** Δίνονται οι ευθείες ε: $y = \lambda x + 7$ και δ: $y = 3x - 1$. Για κάθε τιμή του λ που βρίσκεται στη στήλη (Α), η ευθεία ε παίρνει μια θέση στο καρτεσιανό επίπεδο που περιγράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε φορά τα αντίστοιχα στοιχεία.

Στήλη Α	**στήλη Β**
1) $\lambda = -\frac{1}{3}$	**Α)** ε // δ
	Β) ε // x΄x
2) $\lambda = 3$	
	Γ) ε // y΄y
3) $\lambda = 0$	**Δ)** $\varepsilon \perp \delta$
	Ε) ε // διχοτόμος της xOy

Ερωτήσεις διάταξης

1. ** Να γράψετε σε μια σειρά τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών:

ε_1: $y = -2x + 5$ **ε_2:** $5x - 3y + 7 = 0$

ε_3: $y = \varepsilon\varphi \dfrac{\pi}{3} x + 4$ **ε_4:** παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (2, 7)$

ε_5: κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 1)$ **ε_6:** $y + (\eta\mu\alpha)\, x + 5 = 0$

ώστε καθένας να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.

2. ** Δίνονται οι ευθείες:

ε_1: $y = -x + 7$ **ε_2:** $y = \sqrt{3}\, x + 4$ **ε_3:** $x = 3$

ε_4: $x - y + 3 = 0$ **ε_5:** $x - \sqrt{3}\, y + 5 = 0$ **ε_6:** $y = 1$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, ώστε κάθε επόμενη να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία μεγαλύτερη από την προηγούμενή της.

3. ** Δίνονται τα σημεία Α (1, 1), Β (2, 3), Γ (- 1, 2) και Δ (- 2, 3). Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερο μήκος.

4. ** Δίνονται οι ευθείες:

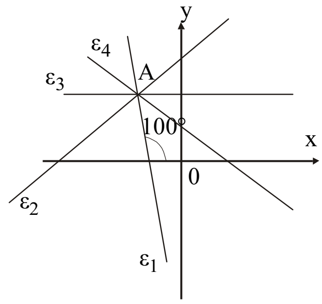
ε_1: $x - 2y - 4 = 0$ **ε_2:** $3x - y + 2 = 0$

ε_3: $2x + 3y - 1 = 0$ **ε_4:** $4x - 5y + 5 = 0$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή διεύθυνσης μεγαλύτερο από την προηγούμενή της.

5. ** Να γραφούν τα σημεία Α (1, 3), Β (- 3, 1) και Γ (2, 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα να απέχει από την ευθεία y = x απόσταση μεγαλύτερη από την απόσταση του προηγούμενού του.

6. ** Στο διπλανό σχήμα να γράψετε σε μια σειρά τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή μικρότερο της προηγούμενής της.



Ερωτήσεις συμπλήρωσης

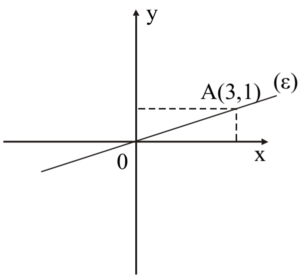
1. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

ευθεία	**κλίση ευθείας**	**σχετική θέση ευθείας ως προς x΄x**	**σχετική θέση ευθείας ως προς y΄y**
y = 3			
x = 2			
y = 2x - 1			

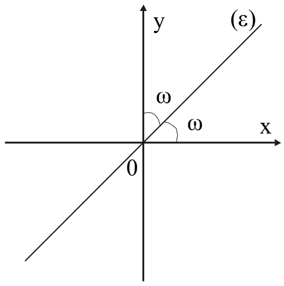
2. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

	Είδος τριγώνου		
κορυφές τριγώνου ΑΒΓ	**ορθογώνιο**	**ισοσκελές**	**εμβαδόν τριγώνου**
Α (- 3, 2) Β (5, 0) Γ (- 2 , 6)			
Α (1, 1) Β (- 3, 1) Γ (-1 ,2)			
Α (0, 2) Β (3, 0) Γ (0 ,0)			
Α (3, 0) Β (0, 4) Γ (- 3 , 0)			

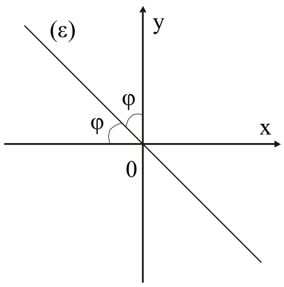
3. * Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) που υπάρχει σε καθένα από τα επόμενα σχήματα:

α) 

ε:

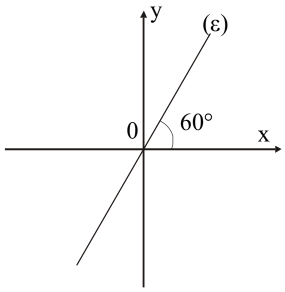
β) 

ε:

γ) 

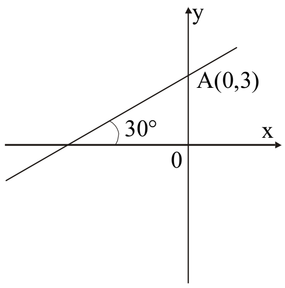
ε:

δ)



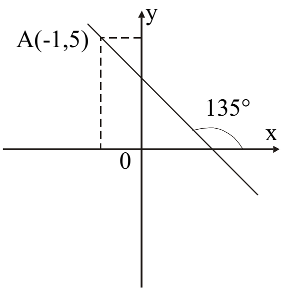
ε:

ε)



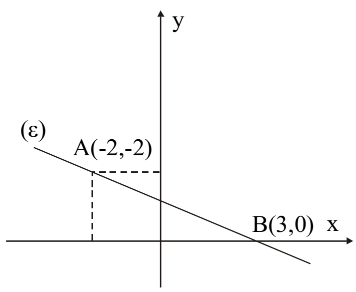
ε:

στ)



ε:

ζ)



ε:

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ***** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία:

   α) $\omega = \frac{\pi}{3}$ β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$ γ) $\omega = \pi$

2. ***** Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x μια ευθεία ε, η οποία διέρχεται από τα σημεία:

   α) Α (- 6, - 2) Β (3, 7)
   β) Α (1, 3) Β (2, 4)
   γ) Α ($\sqrt{3}$, 3) Β (0, 4)
   δ) Α (1, - 1) Β (1, 2)
   ε) Α (0, $\sqrt{3}$) Β (1, 0)

3. ****** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α (- 2, 3), Β (- 6, 1) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

4. ****** Δίνονται τα σημεία Α (7, 5), Β (6, - 7) και Γ (2, 3). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

5. ***** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (3, - 2) και:

   α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, - 5)
   β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, 3)
   γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (- 2, 0)
   δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, 1)
   ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, - 2)
   στ) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω = 135°.

6. ****** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (- 1, 2), Β (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των πλευρών του

β) οι εξισώσεις δύο υψών του

γ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του

δ) οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του

ε) οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του

στ) οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του

ζ) οι συντεταγμένες του εκκέντρου του

η) οι συντεταγμένες του περικέντρου του.

7. ****** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α (κσυνφ, λημφ), Β (κημφ, - λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου κ, λ $\in$ R και 0 < φ < π. Για ποιες τιμές του φ τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά;

8. ***** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: 3x + 4y - 11 = 0 και 2x - 3y + 21 = 0 και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία x + 2y + 1 = 0

β) κάθετη προς την ευθεία 3x - y + 5 = 0

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) παράλληλη στον άξονα x΄x

ε) παράλληλη στον άξονα y΄y

στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων

ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων

η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.

9. ****** Τα σημεία M_1 (1, 1), M_2 (2, 2) και M_3 (3, - 1) είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:

α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του

β) οι συντεταγμένες του κέντρου του

γ) το εμβαδόν του

10. ****** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

11. ****** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.

12. ****** Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: Α $(-8, 2)$, Β $(7, 4)$ και Η $(5, 2)$ το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:
    α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ
    β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
    γ) τις εξισώσεις των πλευρών του

13. ****** Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α $(1, 2)$ και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

14. ****** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:
    α) $ε_1$: $3x - y + 1 = 0$ και $ε_2$: $-6x + 2y - 3 = 0$
    β) $ε_1$: $x = 4$ και $ε_2$: $x = -6$
    γ) $ε_1$: $y = x$ και $ε_2$: $y = x - 3$

15. ****** Το σημείο Α $(3, -1)$ είναι κορυφή του τετραγώνου ΑΒΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

16. ***** Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: $(λ + 2)x + λy + 3λ - 1 = 0$ και $ε_2$: $(λ - 1)x + λy + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι $ε_1 // ε_2$.

17. ****** Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: $(μ + 1) x + (μ + 2) y = 0$ και $ε_2$: $μx - (3μ + 2) y + 7 = 0$. Να βρείτε τον μ, ώστε η γωνία των $ε_1$ και $ε_2$ να είναι 90°.

18. ****** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:

α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου

β) το εμβαδόν του.

19. ****** Δίνονται τα σημεία Α (2, 1), Β (6, 4) και Γ $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$.

α) Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

20. ****** Αν οι ευθείες $ε_1$: $2x - y + 1 = 0$ και $ε_2$: $x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και Α (2, - 1) μια κορυφή του, να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.

21. ******* Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία Α (ημω, συνω) και Β (ημφ, συνφ). Να βρεθεί η απόσταση του Ο (0, 0) από αυτήν $\left(0 \leq ω \neq φ < \frac{π}{2}\right)$.

22. ****** Δίνονται τα σημεία Α (λ, 0), Β (2λ, 3λ), $λ \neq 0$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία $x = - 2λ$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

23. ****** Έστω οι ευθείες $ε_1$: $2x - 3y + 1 = 0$, $ε_2$: $- x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο Α (1, - 2). Να βρεθεί σημείο Μ της $ε_2$, ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην $ε_1$.

24. ****** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία Α (1, - 2), Β (- 2, 3), Γ (- 1, - 4) και Δ (5, 0).

25. ****** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

26. ****** Τα σημεία Α (1, 0) και Β (3, 6) ισαπέχουν από το σημείο Γ (- 4, λ). Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

27. ****** Δίνονται τα σημεία Α (4, 2), Β (3, - 1) και η ευθεία ε: $y = - 3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

28. ****** Δίνονται τα σημεία Α (1, 4) και Β (- 1, - 5).

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

29. ****** Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in R$ οι ευθείες ε_1: $(\mu + 1)\ x - 2\mu y = \lambda$ και ε_2: $(\mu - 1)\ x - 3y = 2\lambda - 1$:

α) τέμνονται,

β) είναι παράλληλες,

γ) συμπίπτουν.

30. ****** Θεωρούμε τις ευθείες ε: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, ε_1: $\alpha x - \beta y + \gamma = 0$, ε_2: $\alpha x - \beta y - \gamma = 0$ και ε_3: $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$

β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$

γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

31. ****** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Ρ (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την (ε).

32. ****** Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in R$.

33. ****** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} + y\eta\mu^2 \frac{\theta}{2} + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

34. ****** Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)\ x - (\lambda^2 + \lambda - 2)\ y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1) Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η (1) παριστάνει ευθεία;

35. ****** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ $(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in R$.

36. ****** Τριγώνου ΑΒΓ οι κορυφές είναι Α (- 2, 2κ), Β (2κ, κ) και Γ (κ - 2, - κ), $\kappa \in R$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.

37. ****** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.

38. ****** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

39. ****** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία Α (3, 2) και Β (- 1, 2) έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην ΑΒ.

40. ****** Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda (x - 3y - 4) = 0$.

41. ******* Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ (2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλόμενης ακτίνας.

42. ****** Ένα σημείο Ρ του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Ρ΄ του Ρ ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.

43. ******* Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (5, 3), Β (0, 0) και Γ (6, 0). Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

44. ****** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 1) και (ε΄): 2x + y - 1 = 0

β) Α (2, - 3) και (ε΄): x = - 3

γ) Α (- 2, 1) και (ε΄): y = - 1

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (- 1, 1) και (ε΄): 2x + y + 1 = 0

β) Α (4, - 3) και (ε΄): 2x + 1 = 0

γ) Α (2, - 1) και (ε΄): y = 4

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x΄x.

Εφαρμογή:

α) Α (- 2, 3) και φ = 30°

β) Α (4, - 5) και φ = 90°

γ) Α (3, - 3) και φ = 135°

- Τέμνει τους άξονες στα σημεία Α (x_1, 0) και Β (0, y_2).

Εφαρμογή:

α) Α (4, 0) και Β (0, 4)

β) Α (- 3, 0) και Β (0, 1)

- Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ($ε_1$) και ($ε_2$).

Εφαρμογή:

α) ($ε_1$): 3x - y + 1 = 0 και ($ε_2$): - 6x + 2y - 3 = 0

β) ($ε_1$): x = 4 και ($ε_2$): x = - 6

γ) ($ε_1$): y = x και ($ε_2$): y = x - 3

- Απέχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) $d = \sqrt{2}$ από (ε΄): $2x + y - 1 = 0$

β) $d = 4$ από (ε΄): $y = 3$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και απέχει απόσταση d από το Β (x_1, y_1).

Εφαρμογή:

α) Α (3, - 1) και απέχει $d = \sqrt{2}$ από το Β (2, 2)

β) Α (2, 1) και απέχει $d = 1$ από το Β (0, 0)

- Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα ΑΒ.

Εφαρμογή:

α) Α (- 2, 1) και Β (2, 3)

β) Α (3, 0) και Β (0, - 5)

- Είναι άξονας συμμετρίας του ΑΒ με Α, Β γνωστά σημεία.

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 1) και Β (- 1, 3)

β) Α (- 3, 4) και Β (4, - 3)

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (2, 1) και $\varphi = 45°$ με την $x - y + 1 = 0$

β) Α (- 2, 1) και $\varphi = 30°$ με την $y + 2 = 0$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{\nu}$.

Εφαρμογή:

α) Α (3, - 2) και $\vec{\nu} = (0, 1)$

β) Α (- 2, - 3) και $\vec{\nu} = (2, 3)$

γ) Α (- 1, 0) και $\vec{\nu} = (- 4, 0)$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) Α (5, - 2)   και $\vec{v}$ = (- 1, 3)

β) Α (- 2, 2)   και $\vec{v}$ = (0, 4)

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 2)   και   φ = 60°   με το $\vec{v}$ = (1, 1)

β) Α (0, 3)   και   φ = 45°   με το $\vec{v}$ = (2, 1)

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

Εφαρμογή:

α) Α (- 1, 2)   και   εμβαδόν 3 τ.μ.

β) Α (- 1, 0)   και   εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

45. ****** Τον Δεκέμβριο το καλοριφέρ μιας κατοικίας λειτούργησε 4 ώρες την ημέρα και το κόστος έφτασε τις 45.000 δρχ. ενώ τον Ιανουάριο που λειτούργησε 5 ώρες την ημέρα το κόστος ήταν 49.960 δρχ. Αν η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος είναι $y = αx + β$, όπου x οι ώρες λειτουργίας, να βρεθούν:

α) οι τιμές των α, β

β) το προβλεπόμενο κόστος για τον Φεβρουάριο, αν λειτουργήσει 4,5 ώρες την ημέρα (28 ημέρες).

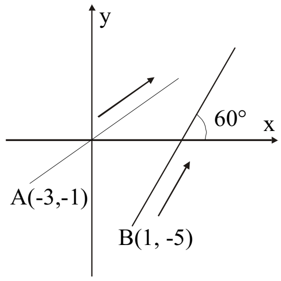
46. ****** Οι συντεταγμένες δύο πλοίων $Π_1$, $Π_2$ είναι $Π_1$ (t - 1, t + 2) και $Π_2$ (3t, 3t - 1) για κάθε χρονική στιγμή t (t > 0).

α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή t = 3.

7. ** Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία Α και Β αντιστοίχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων Α και Β.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.

γ) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Β από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό.

δ) Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.

48. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Α (2, 6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π $(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in R$.

α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του Α;

β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι Α, όταν κινείται ευθύγραμμα.

γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

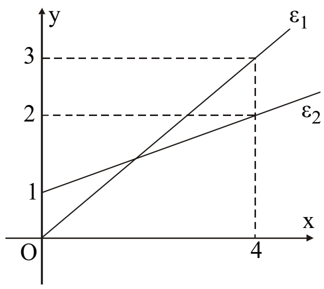
49. ** Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκηνωτές (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.

α) Να τοποθετήσετε, σε ένα πρόχειρο σχέδιο, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες.

β) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ’ αυτό το σύστημα.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.

50. ** Σε ένα εργοστάσιο ο νέος διευθυντής ζήτησε να ενημερωθεί για την οικονομική πορεία της επιχείρησης από το έτος που ιδρύθηκε. Οι υπεύθυνοι των οικονομικών του παρέδωσαν το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



ε_1 *η ευθεία των εσόδων*
ε_2 *η ευθεία των εξόδων*
Ox *ο άξονας των ετών λειτουργίας*
Oy *ο άξονας των εκατοντάδων εκατομμυρίων δραχμών*

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2.

β) Να βρείτε πόσα χρόνια μετά την έναρξη της λειτουργίας της, η επιχείρηση αρχίζει να έχει κέρδη.

γ) Να βρείτε το κέρδος (έσοδα μείον έξοδα) της επιχείρησης τον τέταρτο χρόνο της λειτουργίας της.

δ) Πότε η επιχείρηση θα παρουσιάσει κέρδος 300 εκατομμύρια (3 εκατοντάδες εκατομμύρια);

51. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι Α και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.

α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Α;

β) Πόσο απέχει το λιμάνι Α από το Ο;

γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοιάριου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Ευθεία

1ο Θέμα

Α. α) i) Τι ονομάζεται γωνία μιας ευθείας ε με τον άξονα x΄x;

ii) Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1), Β (x_2, y_2) με $x_1 \neq x_2$;

iii) Ποιες είναι οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών ε_1, ε_2;

iv) Πότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία;

v) Σε ποιο διάνυσμα είναι παράλληλη η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ και σε ποιο κάθετη;

β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda (x - x_0)$.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$

β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x -y + 5 = 0$

γ) είναι παράλληλη στον άξονα y΄y

δ) σχηματίζει με τον x΄x γωνία $135°$

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $(0, 2)$

2ο Θέμα

Οι συντεταγμένες δύο κινητών P_1 και P_2 για κάθε χρονική στιγμή t $(t > 0)$ είναι: $P_1\ (t, t + 3)$, $P_2\ (2t - 5, t + 1)$

α) Όταν το P_1 έχει συντεταγμένες $(1, 4)$ ποιες είναι οι συντεταγμένες του P_2;

β) Να βρεθεί η απόσταση των κινητών τη χρονική στιγμή $t = 2$.

γ) Να βρεθούν οι γραμμές στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση:

i) να συναντηθούν οι πορείες (όχι υποχρεωτικά τα κινητά)

ii) να συναντηθούν τα κινητά.

2ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Ευθεία

1ο Θέμα

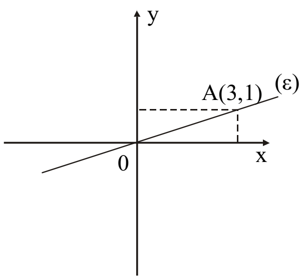
Α. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $B \neq 0$ ή $A \neq 0$.

Β. α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\alpha - 1)x + (2\alpha + 1)y + \alpha^2 - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό α. Για ποια τιμή του α η ευθεία είναι παράλληλη με τον x΄x;

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (-1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + y = 0$.

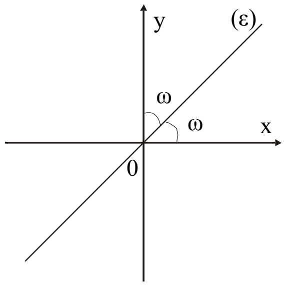
2ο Θέμα

Α. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) που υπάρχει σε καθένα από τα επόμενα σχήματα:

α) 

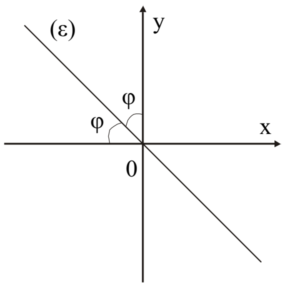
ε:

β)



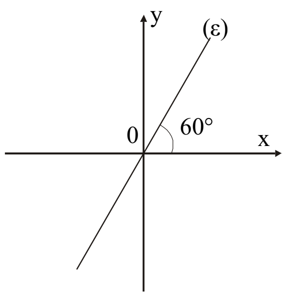
ε:

γ)



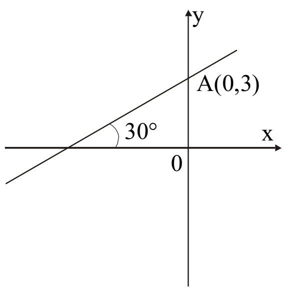
ε:

δ)



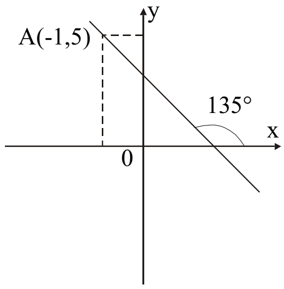
ε:

ε)



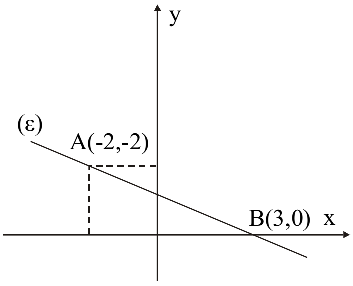
ε:

στ)



ε:

ζ)



ε:

Β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία του σχήματος (ε) με τους άξονες x΄x και y΄y.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1.	**Σ**	**18.**	**Σ**	**35.**	**Σ**	**52.**	**Σ**
2.	**Λ**	**19.**	**Σ**	**36.**	**Λ**	**53.**	**Λ**
3.	**Λ**	**20.**	**Σ**	**37.**	**Σ**	**54.**	**Λ**
4.	**Λ**	**21.**	**Λ**	**38.**	**Λ**	**55.**	**Σ**
5.	**Λ**	**22.**	**Σ**	**39.**	**Σ**	**56.**	**Σ**
6.	**Σ**	**23.**	**Σ**	**40.**	**Λ**	**57.**	**Λ**
7.	**Λ**	**24.**	**Σ**	**41.**	**Σ**	**58.**	**Σ**
8.	**Σ**	**25.**	**Λ**	**42.**	**Σ**	**59.**	**Σ**
9.	**Σ**	**26.**	**Σ**	**43.**	**Σ**	**60.**	**Λ**
10.	**Σ**	**27.**	**Σ**	**44.**	**Λ**	**61.**	**Σ**
11.	**Λ**	**28.**	**Σ**	**45.**	**Λ**	**62.**	**Σ**
12.	**Σ**	**29.**	**Σ**	**46.**	**Λ**	**63.**	**Σ**
13.	**Λ**	**30.**	**Λ**	**47.**	**Λ**	**64.**	**Σ**
14.	**Σ**	**31.**	**Λ**	**48.**	**Λ**	**65.**	**Λ**
15.	**Σ**	**32.**	**Σ**	**49.**	**Λ**		
16.	**Σ**	**33.**	**Λ**	**50.**	**Λ**		
17.	**Σ**	**34.**	**Σ**	**51.**	**Λ**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Β
3.	Δ
4.	Γ
5.	Γ
6.	Β
7.	Β
8.	Β
9.	Ε
10.	Ε
11.	Δ
12.	Ε
13.	Δ
14.	Β
15.	Β
16.	Β

17.	Γ
18.	Α
19.	Γ
20.	Γ
21.	Γ
22.	Ε
23.	Α
24.	Ε
25.	Δ
26.	Β
27.	Β
28.	Δ
29.	Δ
30.	Δ
31.	Ε
32.	Γ

33.	Δ
34.	Β
35.	Δ
36.	Δ
37.	Δ
38.	Β
39.	Α
40.	Ε
41.	Δ
42.	Γ
43.	Δ
44.	Ε
45.	Β
46.	Β
47.	Δ
48.	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχησης

1.

1	Ε
2	Α
3	Β
4	Ζ
5	ΣΤ

2.

1	Δ
2	Γ
3	ΣΤ
4	Η
5	Α

3.

1	Β
2	Δ
3	Γ

4.

1	Β
2	Δ
3	Α
4	Γ

5.

1	Α
2	Ε
3	Γ

6.

1	Δ
2	Ε
3	Α
4	Β

7.

1	Δ
2	ΣΤ
3	Α
4	Γ

8.

1	Γ
2	Α
3	Β
4	Ε

9.

1	Γ
2	Β
3	Ε

10.

1	Γ
2	Δ
3	Α
4	Ζ
5	ΣΤ
6	Η

11.

1	ΣΤ
2	Δ
3	Γ
4	Β

12.

1	Α
2	Ε
3	Β

13.

1	Γ
2	Ε
3	Δ

14.

1	Δ
2	Α
3	Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-2,\ -\sqrt{3},\ -ημα,\ \frac{5}{3},\ \sqrt{3},\ \frac{7}{2}$

2. $ε_6$, å$_5$, $ε_4$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_1$

3. ΓΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ

4. $ε_3$, $ε_1$, $ε_4$, $ε_2$

5. Γ, Α, Β

6. $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$, $ε_1$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

6. Παρατήρησε ότι τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο

7. $\begin{vmatrix} κ(ημφ-συνφ) & κ(ημφ-1) \\ λ(ημφ+συνφ) & λ(συνφ+1) \end{vmatrix} = 0$

10. Το σημείο τομής είναι Α(- 1, 6). Η απέναντι κορυφή είναι το συμμετρικό του Α ως προς την x + 7y - 16 = 0.

12. α) ΑΗ $\perp$ ΒΓ **β)** ΒΗ $\perp$ ΑΓ

13. Οι διάμεσοι είναι οι $ΒΜ_1$ και $ΓΜ_2$.

15. Βρες την κάθετη από το Α στην πλευρά.

17. Θεώρησε παράλληλα προς τις ευθείες διανύσματα.

21. $\lambda = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\varphi - \eta\mu\omega}$ και ορίζεται πάντα λόγω του περιορισμού.

22. Το Γ(- 2λ, λ) και (ΑΒ) = (ΑΓ) = $\sqrt{10} \cdot |\lambda|$

25. Θεώρησε τριώνυμο ως προς y ή x.

30. Αν το $(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ τότε $(x_0, -y_0) \in (\varepsilon_1)$.

33. $\sigma\upsilon\nu\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2} - 1$

38. Η εξίσωση γράφεται: $(x - \lambda)^2 - (y + 2\lambda)^2 = 0$

40. Το κέντρο της οικογένειας είναι το (4, 0) και ανήκει στην ευθεία.

41. Βρες το συμμετρικό του Σ ως προς την ευθεία.

42. Το συμμετρικό του A(k, k) ανήκει στην (ε): 7x - y - 2 = 0 αφού η κάθετη από το (Α) στην x + 2y - 1 = 0 τέμνει την (ε) στο Β και τα Α, Β ισαπέχουν από την x + 2y - 1 = 0.

43. Θεώρησε την y = k και βρες τα σημεία τομής της με τις ΑΒ, ΑΓ.

45. Θεώρησε τα σημεία (4, 45.000) και (5, 49.960) πάνω στην $y = \alpha \cdot x + \beta$ για να υπολογίσεις τα α, β.

46. Βρες τις εξισώσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στα $Π_1$, $Π_2$.

48. α) $λ - 1 < 2$ **β)** το σύστημα $λ - 1 = 2$ και $2 + λ = 6$ είναι αδύνατο.

γ) απόσπαση σημείου από ευθεία

49. Τα σημεία είναι τα (1, 2) (3, - 1) (- 2, 0)

50. β) Να βρεθεί το σημείο τομής των $(ε_1)$, $(ε_2)$

γ) είναι η διαφορά 3 - 2 **δ)** $\frac{3}{4}x - (\frac{1}{4}x + 1) = 3$

51. α) Θέσε $t = 0$.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 = α$ $(α > 0)$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. **Σ** **Λ**

3. * Ο κύκλος με κέντρο Κ $(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$, έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$. **Σ** **Λ**

4. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + α(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό α. **Σ** **Λ**

5. * Το σημείο $\left(\frac{ημθ}{2}, \frac{συνθ}{2}\right)$ ανήκει στον κύκλο $4(x - ημθ)^2 + 4(y - συνθ)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ. **Σ** **Λ**

6. * Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

7. * Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. **Σ** **Λ**

8. ** Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά **Σ** **Λ**

9. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$. **Σ** **Λ**

0. ** Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. **Σ** **Λ**

1. * Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

3. * Οι εξισώσεις $x = ρημφ$ και $y = ρσυνφ$, $φ \in [0, 2π)$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου C: $x^2 + y^2 = ρ^2$. **Σ** **Λ**

4. * Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1, έχει εξίσωση $x + y = 1$. **Σ** **Λ**

5. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο (1, 0). **Σ** **Λ**

6. * Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = α^2$, είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. **Σ** **Λ**

7. * Η σχέση $y = \sqrt{α^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο $(- α \le x \le α)$. **Σ** **Λ**

8. ** Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$. Έχει πάντα εξίσωση $(x - α)^2 + (y - α)^2 = α^2$. **Σ** **Λ**

9. * Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < ρ^2$. **Σ** **Λ**

0. ** Η παραβολή με εστία το σημείο (1, 0) έχει παράμετρο $p = 2$. **Σ** **Λ**

1. * Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$. **Σ** **Λ**

2. * Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας y΄y και η εστία Ε. **Σ** **Λ**

3. * Ο άξονας x΄x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$. **Σ** **Λ**

4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1 (x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p (x + x_1)$. **Σ** **Λ**

5. ** Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. **Σ** **Λ**

6. * Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$. **Σ** **Λ**

7. * Μια παραβολή με κορυφή το O (0, 0) και διευθετούσα την $y = -\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x. **Σ** **Λ**

8. * Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία x = - 2 και το σημείο (4, 0). **Σ** **Λ**

9. ** Όλα τα σημεία της $y^2 = 2px$ με p > 0 εκτός του (0, 0), έχουν θετική τετμημένη. **Σ** **Λ**

0. * Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$. **Σ** **Λ**

1. * Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία y = - 1. **Σ** **Λ**

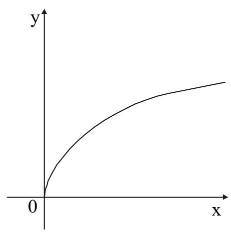
2. ** Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = - 2x$ εφάπτονται. **Σ** **Λ**

3. * Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία y = x. **Σ** **Λ**

4. * Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2 = 2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$. **Σ** **Λ**

5. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$. **Σ** **Λ**

6. * Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος. **Σ** **Λ**



7. * Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **Σ** **Λ**

8. * Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. **Σ** **Λ**

9. * Η εξίσωση $\frac{x^2}{α^2}$ + $\frac{y^2}{β^2}$ = 1 παριστάνει έλλειψη μόνο αν α > β. **Σ** **Λ**

0. ** Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

1. * Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $\frac{2}{3}$ x^2 + $\frac{1}{5}$ y^2 = $\frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. **Σ** **Λ**

3. * Το σημείο (κ, λ) ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο Ο, η οποία περιέχει το σημείο (- κ, - λ). **Σ** **Λ**

4. * Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες. **Σ** **Λ**

5. * Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

6. * Το σημείο Α (2, - 2) βρίσκεται έξω από την έλλειψη C: $\frac{x^2}{25}$ + $\frac{y^2}{9}$ = 1. **Σ** **Λ**

7. * Η εξίσωση x^2 + κy^2 = 1 παριστάνει έλλειψη μόνο όταν κ > 0. **Σ** **Λ**

8. * Η έλλειψη x^2 + 2y^2 = 1 και ο κύκλος x^2 + y^2 = 1 δεν έχουν κοινό σημείο. **Σ** **Λ**

9. ** Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{2}$ + y^2 = 1 είναι εσωτερικά της έλλειψης $\frac{x^2}{3}$ + $\frac{y^2}{5}$ = 1. **Σ** **Λ**

0. * Η ευθεία y = - 3 είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2}$ + $\frac{y^2}{9}$ = 1. **Σ** **Λ**

1. * Η ευθεία x = 2 είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. **Σ** **Λ**

2. * Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. **Σ** **Λ**

3. * Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της Μ (ασυνθ, βημθ) είναι (συνθ) x + (ημθ) y = 1. **Σ** **Λ**

4. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Σ** **Λ**

5. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες. **Σ** **Λ**

6. * Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ισχύει πάντα α > β. **Σ** **Λ**

7. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**

8. * Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. **Σ** **Λ**

9. * Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}$. **Σ** **Λ**

0. * Η υπερβολή $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες ε_1: $y = \frac{\alpha}{\beta} x$ και ε_2: $y = -\frac{\alpha}{\beta} x$. **Σ** **Λ**

1. * Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. **Σ** **Λ**

2. * Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. **Σ** **Λ**

3. ** Το σημείο (5, 4) ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$. **Σ** **Λ**

4. * Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

5. * Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. **Σ** **Λ**

6. * Η εξίσωση $κx^2 + λy^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $κ, λ \in R$. **Σ** **Λ**

7. * Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y στα σημεία (0, 2) και (0, - 2). **Σ** **Λ**

8. ** Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. **Σ** **Λ**

9. * Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. **Σ** **Λ**

0. * Η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**

1. ** Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{α^2} - \frac{x^2}{β^2} = 1$. **Σ** **Λ**

2. * Υπάρχει $\theta \in R$, ώστε το σημείο (ημθ, 1) ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. **Σ** **Λ**

3. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το σημείο Μ (- 2, 3) ανήκει στη γραμμή με εξίσωση

Α. $x = 3$ **Β.** $x = -2$ **Γ.** $x^2 + y^2 = 1$

Δ. $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 1$ **Ε.** $y^2 = -2x$

2. * Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α (1, -3) και Β (7, 5), έχει συντεταγμένες

Α. (4, 4) **Β.** (3, 4) **Γ.** (4, - 4) **Δ.** (4, 1) **Ε.** (4, - 1)

3. * Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ είναι

Α. 2 **Β.** $2\sqrt{2}$ **Γ.** $4\sqrt{2}$ **Δ.** 4 **Ε.** 8

4. * Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι

Α. (3, - 2) **Β.** (2, - 3) **Γ.** (2, 3) **Δ.** (- 2, 3) **Ε.** (- 3, 2)

5. * Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (- 1, - 1) και διέρχεται από το σημείο (4, - 3), είναι

Α. $x^2 + y^2 = 29$ **Β.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$

Γ. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$ **Δ.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$

6. * Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο (3, 9) και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση

Α. $x^2 + y^2 = 81$ **Β.** $x^2 + y^2 = 3$ **Γ.** $x^2 + y^2 = 9$

Δ. $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ **Ε.** $(x - 3)^2 + y^2 = 49$

7. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο (1, 2) και εφάπτεται στον άξονα των x΄x, έχει εξίσωση

Α. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ **Β.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ **Δ.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

8. ** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο (2, 1) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $x - 2y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 7 = 0$ **Γ.** $x + 2y = 4$

Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ **Ε.** $y = x$

9. ** Ο κύκλος $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = ρ^2$ εφάπτεται του άξονα x΄x. Η τιμή του ρ είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 5

Ε. καμία από τις προηγούμενες

10. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 8κy + κ^2 - 2κ + 1 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι

Α. 4 **Β.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0

11. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το $(x_0, 0)$, εφάπτεται στον άξονα y΄y ($x_0 \neq ρ$). Η εξίσωσή του είναι

Α. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$ **Β.** $x^2 + y^2 = x_0^2$ **Γ.** $(x - x_0)^2 + y^2 = ρ^2$

Δ. $(x - ρ)^2 + y^2 = ρ$ **Ε.** $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0$

12. ** Ο κύκλος $(x - α)^2 + (y - β)^2 = ρ^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Οx, Οy, όταν

Α. $α = β \neq ρ$ **Β.** $α \neq β = ρ$ **Γ.** $α > β$

Δ. $α = ρ = β$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

13. ** Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x - α)^2 + (y - α)^2 = α^2$

Α. διέρχεται από το σημείο Α (α, α)

Β. διέρχεται από το σημείο Α ($\sqrt{α}$, $\sqrt{α}$)

Γ. έχει το κέντρο του στην $y = x + 1$

Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = - x$

Ε. εφάπτεται στους άξονες x΄x και y΄y

14. ** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις C_1: $(x - α)^2 + y^2 = α^2$ και C_2: $x^2 + (y - α)^2 = α^2$ $(α \neq 0)$.

Α. Η απόσταση των κέντρων τους είναι 2α

Β. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $|α|\sqrt{2}$

Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2α^2$

Δ. Το κέντρο του C_1 είναι εσωτερικό του C_2

Ε. Το κέντρο του C_2 βρίσκεται πάνω στον C_1

15. ** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Αx + Βy + Γ = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν

Α. $Α^2 + Β^2 - 4Γ$ είναι τέλειο τετράγωνο **Β.** $|Α| + |Β| \neq 0$

Γ. $Α^2 + Β^2 > 4Γ$ **Δ.** $4Α^2 + 4Β^2 - Γ < 0$

Ε. $Α^2 + Β^2 < 4Γ$

16. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 + x = 0$

Α. εφάπτεται στον x΄x **Β.** εφάπτεται στον y΄y

Γ. τέμνει τον y΄y σε δύο σημεία **Δ.** δεν τέμνει κανένα άξονα

Ε. εφάπτεται και στους δύο άξονες

17. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2α (x + y) = - α^2$, $α > 0$ έχει κέντρο

Α. (α, α) **Β.** (2α, α) **Γ.** $(\frac{α}{2}, 2α)$ **Δ.** (α, - 2α) **Ε.** $(α^2, α)$

18. ** Δίνεται το σημείο Α $(\frac{1}{2}$ ημθ, $\frac{1}{2}$ συνθ$)$, $θ \in R$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Α. Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο, για κάθε $θ \in R$

Β. Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο, αν $θ \in (0, π)$

Γ. Το σημείο Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

Δ. Το σημείο Α βρίσκεται μέσα στον κύκλο

Ε. Το σημείο Α βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

19. ** Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ (- 1, - 2) και περνά από το σημείο (2, 2), είναι

Α. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ **Β.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = - 3$

Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ **Δ.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$

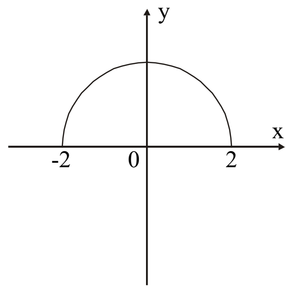
Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

0. ** Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

Α. $x^2 + y^2 = 2$ **Β.** $x^2 + y^2 = 4$

Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$ **Δ.** $x = \sqrt{4 - y^2}$

Ε. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$



21. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του Μ (- 1, 2). Η εφαπτομένη του στο Μ έχει εξίσωση

Α. $2x - y = 5$ **Β.** $- x - 2y = 5$ **Γ.** $x + 2y - 5 = 0$

Δ. $x - 2y + 5 = 0$ **Ε.** $2x + y = 5$

22. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 3$ και το σημείο του Μ $(+\sqrt{2}, -1)$. Η εφαπτομένη στο Μ είναι

Α. $-\sqrt{2}x + y - 3 = 0$ **Β.** $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$ **Γ.** $x - y = 3$

Δ. $\sqrt{2}x + y = 3$ **Ε.** $-x + \sqrt{2}y = 3$

23. ** Η παραβολή που έχει εστία Ε (0, 4) και κορυφή το Ο (0, 0), έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 8x$ **Β.** $y^2 = -8x$ **Γ.** $y^2 = 16x$

Δ. $x^2 = 16y$ **Ε.** $x^2 = 8y$

24. ** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$ στο σημείο (1, 4) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $y = x$ **Β.** $y = -x$ **Γ.** $y = 2x + 1$ **Δ.** $y = x + 2$ **Ε.** $4y = x$

25. * Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x - y = 0$ είναι

Α. (0, 0) και (1, 1) **Β.** (8, 8) και (2, 1) **Γ.** (0, 0) και (8, 8)

Δ. $(1, \sqrt{8})$ και $(-1, \sqrt{8})$ **Ε.** (2, 4) και (4, 2)

26. ** Το σημείο Α (κ, 4) ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο Α΄ του Α ως προς τον άξονα x΄x είναι

Α. (4, 4) **Β.** (- 4, 4) **Γ.** (2, 4) **Δ.** (2, - 4) **Ε.** (2, - 2)

27. ** Μια παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) έχει διευθετούσα την $x = \frac{3}{2}$.

Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 6x$ **Β.** $y^2 = -6x$ **Γ.** $y^2 = 3x$ **Δ.** $x^2 = -6y$ **Ε.** $x^2 = -3y$

28. ** Η εξίσωση $y = αx^2$, $α \neq 0$ παριστάνει παραβολή

Α. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = \frac{α}{2}$

Β. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = 2α$

Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο

Δ. της μορφής $x^2 = 2py$ με $p = \frac{α}{2}$

Ε. με άξονα συμμετρίας τον $y'y$

29. ** Η εξίσωση $y^2 = 4αx$

Α. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $α > 0$

Β. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $α = \frac{1}{2}p$ $(p > 0)$

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $α \neq 0$

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε α πραγματικό αριθμό

Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν α ρητός

30. ** Οι παραβολές $y^2 = αx$ και $x^2 = αy$ $(α \neq 0)$

Α. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

Β. εφάπτονται στο Ο (0, 0)

Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το α

Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία

Ε. υπάρχει τιμή του α για την οποία δεν τέμνονται

31. * Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α. $λ = \frac{p}{y_1}$ **Β.** $λ = \frac{2p}{y_1}$ **Γ.** $λ = \frac{y_1}{p}$ **Δ.** $λ = \frac{y_1}{2p}$ **Ε.** $λ = 2p$

32. ** Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2px$ στα σημεία (x_1, y_1) και $(x_1, -y_1)$

Α. είναι παράλληλες

Β. είναι πάντα κάθετες

Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y

Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα x΄x

Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία

33. ** Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$

Α. παριστάνει μια παραβολή

Β. παριστάνει δύο παραβολές

Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x > 0$

Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x < 0$

Ε. παριστάνει δύο ευθείες

34. ** Το σημείο Α (2, 4) της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 8 **Δ.** 16 **Ε.** $\sqrt{8}$

35. * Αν Ε΄, Ε οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και Α τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε

Α. (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = α **Β.** (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = α **Γ.** (ΑΕ΄) = (ΑΕ)

Δ. (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = 2α **Ε.** (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = 2α

36. ** Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μια εστία της είναι

Α. $\frac{7}{6}$ **Β.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** $\frac{4}{3}$

37. ** Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες Ε΄ (0, - 2) και Ε (0, 2) και μικρό άξονα 10, είναι

Α. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$ **Ε.** $2x^2 - 2y^2 = 10$

38. ** Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα y΄y και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

Α. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

39. * Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο άξονα 2α. Τότε θα είναι πάντα

Α. $\alpha > \beta > \gamma$ **Β.** $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ **Γ.** $0 < \alpha < \beta$

Δ. $\gamma > \alpha$ **Ε.** $\gamma < \alpha$

40. ** Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την C: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, είναι

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **Γ.** $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ **Ε.** $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

41. * Η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ έχει μια εστία στο σημείο

Α. (2, 3) **Β.** (0, $\sqrt{2}$) **Γ.** ($\sqrt{3}$, 0) **Δ.** (- 1, 0) **Ε.** (0, -1)

42. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν

Α. δύο μόνο κοινά σημεία **Β.** τέσσερα κοινά σημεία

Γ. ένα μόνο κοινό σημείο **Δ.** κανένα κοινό σημείο

Ε. άπειρα κοινά σημεία

43. ** Η εξίσωση $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ $\alpha, \beta \neq 0$

Α. παριστάνει πάντα μία έλλειψη

Β. παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες

Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$

Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha = \beta$

44. ** Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ είναι όμοια με την

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

45. ** Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία Ε΄ (- 2, 0) και Ε (2, 0) είναι και η

Α. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

46. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της Μ $(-\sqrt{5}, 0)$.

Η εφαπτομένη της στο Μ θα είναι

Α. $\sqrt{5}\,y - 5 = 0$ **Β.** $+\sqrt{5}\,x + 5 = 0$ **Γ.** $\sqrt{5}\,x - 15 = 0$

Δ. $-\sqrt{5}\,x + y - 15 = 0$ **Ε.** $3\sqrt{5}\,x - 15 = 0$

47. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$ και το σημείο της Μ $(\sqrt{2}, -1)$.

Η εφαπτομένη της στο Μ θα έχει εξίσωση

Α. $x - \sqrt{2}\,y = 4$ **Β.** $\sqrt{2}\,x - 2y - 4 = 0$ **Γ.** $\sqrt{2}\,x + 2y = 4$

Δ. $x - 2y - 4 = 0$ **Ε.** $-\sqrt{2}\,x - 2y = 4$

48. * Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

Α. $y = \frac{5}{4}x$ **Β.** $y = \frac{4}{5}x$ **Γ.** $y = \frac{16}{25}x$

Δ. $y = \frac{25}{16}x$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες

49. ** Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση $2\gamma = 8$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{3}$ είναι

Α. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

50. ** Μια υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε

Α. η C έχει τις εστίες της στον άξονα y΄y

Β. έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$

Γ. έχει εστίες Ε΄ (- 5, 0), Ε (5, 0)

Δ. είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$

Ε. έχει κορυφές Α΄ (- 3, 0), Α (3, 0)

51. ** Οι υπερβολές C_1: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και C_2: $\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ $(\alpha \neq \beta)$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα

Β. τις ίδιες εστίες

Γ. την ίδια εστιακή απόσταση

Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες

Ε. τις ίδιες κορυφές

52. ** Η υπερβολή C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν

Α. την ίδια εστιακή απόσταση

Β. τις ίδιες εστίες

Γ. την ίδια εκκεντρότητα

Δ. δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1

Ε. τέσσερα κοινά σημεία

53. ** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της M_1 (x_1, y_1).

Η εφαπτομένη της στο M_1 θα έχει εξίσωση

Α. $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$

Β. $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$

Γ. $\beta^2x_1x - \alpha^2y_1y = \alpha^2\beta^2$

Δ. $\alpha^2x_1x - \beta^2y_1y = 1$

Ε. $xx_1 - yy_1 = 1$

54. ** Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με

Α. $\mu = 1$ **Β.** $\kappa.\lambda < 0$ **Γ.** $\mu < 0$ **Δ.** $\kappa \neq \lambda$ **Ε.** $\kappa = \mu$ ή $\lambda = \mu$

55. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ $(\alpha \neq \beta)$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα

Β. τις ίδιες ασύμπτωτες

Γ. τις ίδιες εστίες

Δ. τις ίδιες κορυφές

Ε. μία μόνο κοινή εστία

56. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) = $\frac{1}{3}\sqrt{16x^2 - 144}$ ($x \geq 3$ ή $x \leq -3$) είναι

Α. κύκλος με ακτίνα ρ = 12

Β. έλλειψη με α = 3 και β = 4

Γ. υπερβολή με εστίες (- 5, 0), (5, 0)

Δ. τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες (- 5, 0), (5, 0)

Ε. παραβολή με διευθετούσα x = - $\frac{5}{4}$

57. ** Τα σημεία Μ (x, y) για τα οποία ισχύει: $|(AM) - (BM)| = 6$ με Α (- 5, 0) και Β (5, 0)

Α. ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Β. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Γ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

Ε. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

58. * Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 3$ και το σημείο της Μ (- 2, 1). Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο Μ είναι

Α. x - 2y = 3 **Β.** 2x + y = 3 **Γ.** - 2x + y = 3

Δ. 2x + y + 3 = 0 **Ε.** 2x - y + 3 = 0

59. * Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το Μ (1, 2). Η εφαπτομένη της στο Μ έχει εξίσωση

Α. x + y + 1 = 0 **Β.** 2x - y = 2 **Γ.** x - 2y + 2 = 0

Δ. 2x - y = - 2 **Ε.** x - y + 1 = 0

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β. Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0).

στήλη Α **κύκλος**	**σημείο (x_0, y_0)**	**στήλη Β** **εφαπτόμενη ευθεία**
1) $x^2 + y^2 = 1$	$(0, 1)$	**Α)** $y = 0$
		Β) $x + 4(y + 2) = 5$
2) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$	$(2, 0)$	**Γ)** $y = 1$
		Δ) $y = x$
3) $x^2 + y^2 = 25$	$(3, 4)$	**Ε)** $3x + 4y = 25$
4) $x^2 + (y + 2)^2 = 5$	$(1, 2)$	**ΣΤ)** $x - 2y = 1$

2. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ.

στήλη Α **κύκλος**	**στήλη Β** **κέντρο - ακτίνα**
1) $x^2 + y^2 - \sqrt{\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$	**Α)** Κ $(\alpha, 1)$ $\quad \rho = \frac{\alpha}{2}$
2) $x^2 + y^2 - 2x + 2\alpha y = -\alpha^2$	**Β)** Κ $(-1, \frac{3}{2})$ $\quad \rho = \frac{3}{2}$
3) $(x + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2$, $\alpha \neq 0$	**Γ)** Κ $(0, 0)$ $\quad \rho = \sqrt[4]{\alpha}$
	Δ) Κ (α, α) $\quad \rho = \lvert\alpha\rvert$
4) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	**Ε)** Κ $(1, -\alpha)$ $\quad \rho = 1$
	ΣΤ) Κ $(0, \alpha)$ $\quad \rho = \lvert\alpha\rvert$

3. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α με την εστία της στη στήλη Β.

στήλη Α **παραβολή**	**στήλη Β** **εστία**
1) $y^2 = px$	**Α)** $(-\frac{p}{2}, 0)$
	Β) $(\frac{p}{8}, 0)$
2) $x^2 = py$	
	Γ) $(\frac{p}{4}, 0)$
3) $y^2 = -2px$	
	Δ) $(0, \frac{p}{2})$
	Ε) $(0, \frac{p}{4})$
4) $y^2 = \frac{p}{2}x$	
	ΣΤ) $(0, -\frac{p}{2})$

4. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$. Σε κάθε σημείο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β.

στήλη Α **σημείο**	**στήλη Β** **εφαπτομένη παραβολής**
1) $(0, 0)$	**Α)** $y = x + \frac{1}{2}$
2) $(\frac{1}{2}, 1)$	**Β)** ο άξονας y΄y
	Γ) $-2y = x + 2$
3) $(\frac{1}{2}, -1)$	**Δ)** $y = x - 2$
4) $(2, 2)$	**Ε)** $-y = x + \frac{1}{2}$
	ΣΤ) $2y = x + 2$

5. ** Στη στήλη (Α) δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία Ε και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης.

στήλη Α **εστία - διευθετούσα**	**στήλη Β** **εξίσωση παραβολής**
1) Ε (- 2, 0) και δ: $x - 2 = 0$	**Α)** $x^2 = 16y$
	Β) $y^2 = -8x$
2) Ε (0, 4) και δ: $y + 4 = 0$	**Γ)** $y^2 = 8x$
	Δ) $y^2 = 12x$
3) Ε (3, 0) και δ: $x + 3 = 0$	**Ε)** $x^2 = -16y$

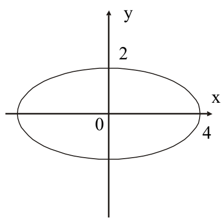
6. ** Στη στήλη (Α) δίνεται σε κάθε γραμμή η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία Ε και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $y^2 = x$	**Α)** Ε $(-1, 0)$ και δ: $x + 1 = 0$
2) $y^2 = -4x$	**Β)** Ε $(\frac{1}{4}, 0)$ και δ: $x + \frac{1}{4} = 0$
3) $x^2 = 20y$	**Γ)** Ε $(-5, 1)$ και δ: $x + 1 = 0$
	Δ) Ε $(-1, 0)$ και δ: $x - 1 = 0$
	Ε) Ε $(0, 5)$ και δ: $y + 5 = 0$

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης (Α) την εξίσωσή της στη στήλη (Β).

<table>
<tr><th>στήλη Α
έλλειψη</th><th>στήλη Β
εξίσωση έλλειψης</th></tr>
<tr><td>

1)

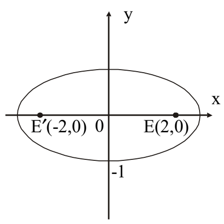


</td><td>

Α) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

</td></tr>
<tr><td>

2)

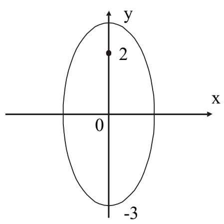


</td><td>

Β) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

</td></tr>
<tr><td>

3)



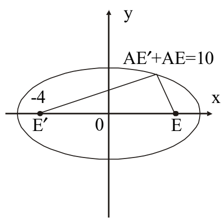
</td><td>

Γ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Δ) $x^2 + 5y^2 = 5$

</td></tr>
<tr><td>

4)

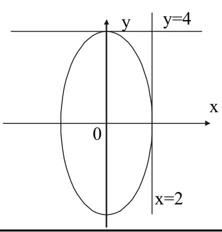


</td><td>

Ε) $x^2 + 2y^2 = 1$

</td></tr>
<tr><td>

5)



</td><td>

ΣΤ) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

</td></tr>
</table>

8. ** Κάθε κωνική της στήλης (Α) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α **είδος κωνικής**	**στήλη Β** **εξίσωση γραμμής**
1) κύκλος	**Α)** $x + y = 1$
	Β) $x^2 + y^2 = 0$
2) παραβολή	**Γ)** $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
3) έλλειψη	**Δ)** $9x^2 = 63 + 7y^2$
4) υπερβολή	**Ε)** $y^2 - 16x = 0$
	ΣΤ) $4x^2 = 100 - 25y^2$

9. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης (Α) με τις ασύμπτωτές της στη στήλη (Β).

στήλη Α **εξίσωση υπερβολής**	**στήλη Β** **εξισώσεις ασυμπτώτων**
1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	**Α)** $y = \pm x$
	Β) $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$
2) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	**Γ)** $y = \pm 2x$
	Δ) $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$
3) $6x^2 - 5y^2 = 30$	**Ε)** $y = \pm \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{5} .x$
4) $x^2 - y^2 = 4$	**ΣΤ)** $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

10. ** Σε κάθε γραμμή της στήλης (Α) γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α **εξίσωση κωνικής**	**στήλη Β** **εκκεντρότητα**
1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	**Α)** $\sqrt{3}$
	Β) $\frac{\sqrt{13}}{3}$
2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	**Γ)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ) $-\sqrt{13}$
3) $4x^2 + 9y^2 = 36$	**Ε)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

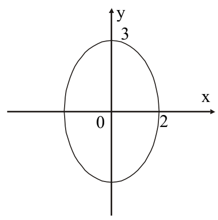
11. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης (Α) με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης (Β).

<table>
<tr><th>στήλη Α</th><th>στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

1) $x^2 = 4y$

</td><td>

Α)

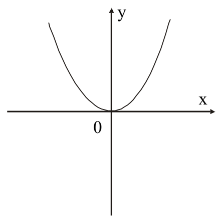


</td></tr>
<tr><td>

2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

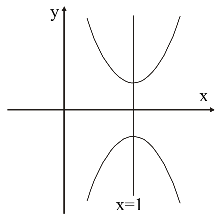
</td><td>

Β)



</td></tr>
<tr><td></td><td>

Γ)

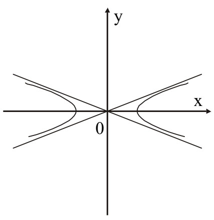


</td></tr>
<tr><td>

3) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

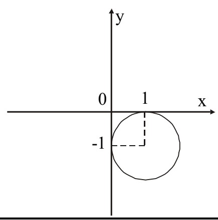
</td><td>

Δ)



</td></tr>
<tr><td></td><td>

Ε)



</td></tr>
</table>

12. ** Σε κάθε υπερβολή της στήλης (Α) να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη (Β).

στήλη Α **υπερβολή**	**στήλη Β** **ασύμπτωτη υπερβολής**
1) $x^2 - y^2 = \alpha^2$	**Α)** $\sqrt{2}\,x - y = 0$
2) $2x^2 - y^2 = 4$	**Β)** $3x - 4y = 0$
3) $(x - 2y)\,(x + 2y) = 4$	**Γ)** $y = x$
4) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$	**Δ)** $4x - 3y = 0$
	Ε) $2x - y = 0$
	ΣΤ) $x + 2y = 0$

Ερωτήσεις διάταξης

1. Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

$\mathbf{C_1}$: $x^2 + y^2 = 4$ $\mathbf{C_2}$: $x^2 + 2x + y^2 = 9$ $\mathbf{C_3}$: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$\mathbf{C_4}$: $4x^2 + 4y^2 = 7$ $\mathbf{C_5}$: $x^2 + (y - 2)^2 = 6$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει από τον προηγουμένη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$\mathbf{C_1}$: $y^2 = 4x$ $\mathbf{C_2}$: $y^2 = \frac{1}{4}x$ $\mathbf{C_3}$: $y^2 = -6x$

$\mathbf{C_4}$: $y^2 = \sqrt{2}\,x$ $\mathbf{C_5}$: $x = 2y^2$

3. Να γράψετε τα σημεία Α (0, 3), Β (2, 0), Γ (2, 2), Δ (0, 0) και Ε (2, - 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία Α (2, 0), Β (- 1, 0), Γ (0, 4), Δ (- 5, 1), Ε (- 2, 2), τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις $d_Α$, $d_Β$, $d_Γ$, $d_Δ$, $d_Ε$ αντιστοίχως.

Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις $d_Α$, $d_Β$, $d_Γ$, $d_Δ$, $d_Ε$, έτσι ώστε καθεμιά να είναι μεγαλύτερη από την προηγουμένη της.

5. Να γραφούν οι παρακάτω κωνικές σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα από την προηγουμένη της.

$\mathbf{C_1}$: $x^2 + 4y^2 = 4$ $\mathbf{C_2}$: $4x^2 + 9y^2 = 36$ $\mathbf{C_3}$: $x^2 - 4y^2 = 4$

$\mathbf{C_4}$: $4x^2 - 9y^2 = 36$ $\mathbf{C_5}$: $x^2 - y^2 = 1$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κύκλου	κέντρο κύκλου	ακτίνα κύκλου	σημεία τομής κύκλου με άξονα x΄x	σημεία τομής κύκλου με άξονα y΄y
$x^2 + (y - 4)^2 = 1$				
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$				
$x^2 + y^2 = 9$				
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κωνικής	γραφή της κωνικής σε μια απ' τις μορφές: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, $y^2 = 2px$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,	χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)
$4x^2 = 36 + 9y^2$		
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$		
$9x^2 = 1 - 25y^2$		
$y^2 - 12x = 0$		

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	συντεταγμένες εστίας	εξίσωση διευθετούσας	άξονας συμμετρίας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = - 6x$			

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	**συντεταγμένες εστιών**	**συντεταγμένες κορυφών**	**εκκεντρότητα**
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	**συντεταγμένες εστιών**	**εκκεντρότητα**	**εξισώσεις ασυμπτώτων**
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$

β) έχει κέντρο το σημείο (3, - 1) και ακτίνα 5

γ) έχει κέντρο το σημείο (- 2, 1) και διέρχεται από το σημείο (- 2, 3)

δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (1, 3) και Β (- 3, 5)

ε) διέρχεται από τα σημεία (2, 1), (1, 2) και $(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$

στ) διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (- 1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$

ζ) έχει κέντρο το σημείο (8, - 6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$

θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4)

ι) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 2), εφάπτεται στον άξονα y΄y και διέρχεται από το σημείο (- 6, 2)

ια) έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y

ιβ) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$

2. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.

3. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y.

4. ** Δίνεται η ευθεία $y = λx$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο

β) να εφάπτεται του κύκλου

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

5. ** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.

6. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

7. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο (0, 6).

8. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

9. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

10. ** Δίνονται τα σημεία Α (1, 2), Β (2, 4) και Γ (3, 1).

α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία ΒΑΓ = 90°

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

11. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α (3α, 0), Β (0, 3α) και Γ (0, - 3α), $α > 0$.

12. ** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων Μ (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $xσυνθ - yημθ = συν2θ$ και $xημθ + yσυνθ = ημ2θ$, $θ \in R$, βρίσκονται σε κύκλο.

13. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε): $2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία Α (- 1, 2) και Β (3, - 1).

14. ** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ και C_2: $x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.

15. ** Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

16. ** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β, Γ με Α (1, - 1), Β (- 1, 2), Γ (0, 2) είναι σταθερό c, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ (για κατάλληλο c).

17. ** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

18. ** Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο Α (- 1, - 1). Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο Α.

19. ** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Οx και έχει παράμετρο $p = 5$

β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οx και διέρχεται από το σημείο (- 1, 4)

γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο (2, 2)

δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία Ε (0, - 4)

ε) έχει εστία Ε (- 2, 0) και διευθετούσα δ: $x - 2 = 0$

στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$

20. ** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

21. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία (0, 0) και (12, 6).

22. ** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.

23. ** Από το σημείο (- 2, 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

24. ** Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος 8p. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB} = 0$.

25. ** Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

26. ** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα y΄y, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

α) (ΑΒ) = 2 (ΕΚ), όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας x΄x τη διευθετούσα

β) οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ

27. ** Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και δύο χορδές ΟΒ, ΟΓ, ώστε γωνία ΒΟΓ = 90°. Να αποδειχθεί ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

28. ** Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.

β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της Α (2, 1) από την εστία Ε και να συγκριθεί με την απόσταση (ΟΕ).

γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της Ο.

δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία Ε απόσταση διπλάσια της ΟΕ.

29. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).

30. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = αx$ και $y' = αy$, $α \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.

31. ** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2pκ^2, 2pκ)$ με $κ \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή

β) Αν Α $(2pκ_1^2, 2pκ_1)$, Β $(2pκ_2^2, 2pκ_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ διέρχεται από την εστία, είναι $4κ_1κ_2 = -1$.

32. ** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{β^2} + \frac{y^2}{α^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ = \frac{β^2}{α^2}\frac{x_1}{y_1}$.

33. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.

α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

34. ** Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

35. ** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

36. ** Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:

α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

β) $4x^2 + 9y^2 = 36$

γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$

37. ** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της Μ να σχηματίζει με τις εστίες Ε΄ και Ε ισόπλευρο τρίγωνο.

38. ** Ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με α > β. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

39. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

40. ** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$.

41. ** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

42. ** Θεωρούμε την υπερβολή C: $x^2 - y^2 = 1$ και την ευθεία (ε): $x + 2y = \alpha$. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.

43. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία Μ (x_0, y_0) ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και (Ε΄Μ) + (ΕΜ) = $2\sqrt{6}$ (Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης).

44. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

α) παράλληλες προς την ευθεία (ε): $x + y = 0$

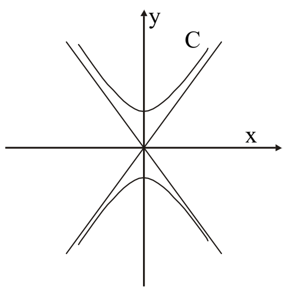
β) κάθετες στην ευθεία (ε).

45. ** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε΄, Ε οι εστίες, Β, Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα)

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:



α) οι εστίες της υπερβολής

β) η εστιακή της απόσταση

γ) η εξίσωσή της

δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

ε) η εκκεντρότητά της.

47. ** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 6 και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 20 και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.

γ) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. ** Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. ** Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = \alpha^2$, (ε) η εφαπτομένη στο Μ και Α, Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

50. ** Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = α^2$. Αν θέσουμε $x = x΄$ και $y = cy΄$, να αποδείξετε ότι το σημείο $(x΄, y΄)$ ανήκει σε έλλειψη.

51. ** Δίνεται η υπερβολή C: $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ και Μ (x_1, y_1) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε΄) της (ε) στο Μ τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτόμενη στο Μ)

α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε΄)

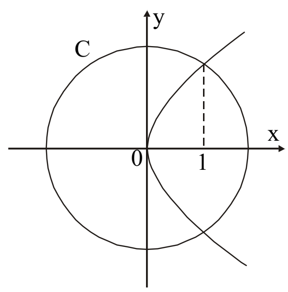
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ

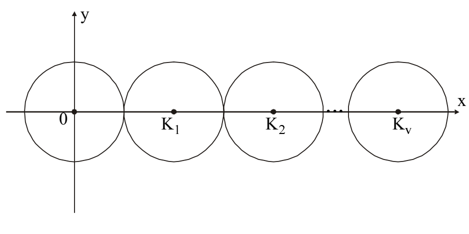
δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι μια υπερβολή C_1

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

2. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



3. ** Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = ρ^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:



α) οι εξισώσεις των κύκλων $C_1, C_2, \dots C_ν$ (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots K_ν$ από το κέντρο Ο

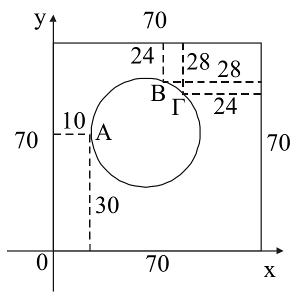
γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

54. ** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία y = 2.

55. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία 3x - y = 0.

56. ** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

7. ** Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της Α, Β, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Στο σύστημα αξόνων Oxy να τοποθετήσετε τα σημεία Α, Β, Γ. Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.

β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο $x^2 + y^2 + κx + λy + μ = 0$ πάνω στον οποίο βρίσκονται τα Α, Β, Γ. Να υπολογίσετε τα κ, λ, μ.

γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

59. Δίνονται τα σημεία Α (- 2, 0), Β (2, 0) και M_1 $(1, \sqrt{3})$.

α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1.

γ) Να δείξετε ότι το σημείο M_2 $(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.

δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο Μ (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

60. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της Μ (x_1, y_1) στον κλάδο C_1 $(y_1 \neq 0)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο Μ΄ (x_2, y_2), να δείξετε ότι $y_1.y_2 < 0$.

Σ Χ Ε Δ Ι Α   Κ Ρ Ι Τ Η Ρ Ι Ω Ν

Α Ξ Ι Ο Λ Ο Γ Η Σ Η Σ

Τ Ο Υ   Μ Α Θ Η Τ Η

Σ Τ Ι Σ   Κ Ω Ν Ι Κ Ε Σ   Τ Ο Μ Ε Σ

1ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: **Κύκλος**

1ο Θέμα

Α. α) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = \rho^2$.

i) Πότε ένα σημείο Μ (x_1, y_1) ανήκει στο κύκλο C;

ii) Πότε ο C λέγεται μοναδιαίος κύκλος;

iii) Ποιες είναι οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου C;

β) i) Ο κύκλος με κέντρο k (x_0, y_0) και ακτίνα $\rho > 0$ ποια εξίσωση έχει;

ii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ πότε παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα αυτού του κύκλου;

γ) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του Α (x_1, y_1) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Β. α) Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση κύκλου της στήλης Α με το αντίστοιχο κέντρο του στη στήλη Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
$x^2 + y^2 = 4$	Κ (- 3, 0)
$(x + 3)^2 + y^2 = 9$	Λ (0, 3)
$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$	Ο (0, 0)
$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$	Μ (1, - 3)
	Ν (- 1, 3)
	Α (- 1, 5)

β) i) Ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$. **Σ** **Λ**

ii) Οι κύκλοι $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ και $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

iii) Ο κύκλος $(x - α)^2 + y^2 = ρ^2$ έχει το κέντρο του στον άξονα $y΄y$. **Σ** **Λ**

iv) Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 5y + 7 = 0$ έχει το κέντρο του στον θετικό ημιάξονα $y΄y$. **Σ** **Λ**

v) Τα σημεία (1, 0) και (3, 0) είναι αντιδιαμετρικά του κύκλου $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. **Σ** **Λ**

vi) Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ είναι $\sqrt{5}$. **Σ** **Λ**

v) Ο κύκλος $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ είναι μοναδιαίος. **Σ** **Λ**

vi) Ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$ εφάπτεται του άξονα $x΄x$. **Σ** **Λ**

vii) Ο κύκλος $(x - α)^2 + (y - β)^2 = 16$ εφάπτεται και στους δύο άξονες αν $α = β = \pm 4$ **Σ** **Λ**

viii) Η εφαπτομένη του κύκλου $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2$ σε σημείο του με τετμημένη 3 είναι παράλληλη στον άξονα $y΄y$. **Σ** **Λ**

ix) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του Μ (2, 1) έχει εξίσωση $y = 5 - 2x$. **Σ** **Λ**

x) Οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 13$ στα σημεία του Α (2, 3) και Β (- 2, - 3) είναι κάθετες μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

2^o Θέμα

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του ε_1 στο σημείο του Μ (4, - 3).

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του ε_2 που είναι παράλληλη στην ε_1.

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται στην ε_1 και στους ημιάξονες Οx και Οy΄.

δ) Αν Κ και Λ τα κέντρα των κύκλων του ερωτήματος (γ), να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την ΚΛ.

2ο ΣΧΕΔΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Κύκλος

1ο Θέμα

Α. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1).
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του Α έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, στα σημεία του, που έχουν τετμημένη 3.

2ο Θέμα

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ και κέντρο Κ.

Α. Κάθε ερώτηση από τις επόμενες πέντε συνοδεύεται από πέντε πιθανές απαντήσεις. Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης.

α) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο

Α. (3, - 2) **Β.** (- 3, - 2) **Γ.** (- 3, 2) **Δ.** (3, 2) **Ε.** (5, 0)

β) Η ακτίνα του κύκλου C είναι:

Α. 9 **Β.** 3 **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 81 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

γ) Ο κύκλος C εφάπτεται:

Α. μόνο του άξονα x΄x
Β. μόνο του άξονα y΄y
Γ. και των δύο αξόνων x΄x, y΄y
Δ. της ευθείας y = x
Ε. σε κανένα από τα προηγούμενα

δ) Από το κέντρο του κύκλου C διέρχεται η ευθεία με εξίσωση

Α. $3x - y = 4$ **Β.** $y = 3x + 5$ **Γ.** $2x + 3y = 0$

Δ. $3x - 2y = 5$ **Ε.** $y = 3x + 2$

ε) Η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την αρχή των αξόνων Ο είναι:

Α. 1 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** $\sqrt{6}$ **Δ.** $\sqrt{13}$ **Ε.** 5

Β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $3x + 4y - 2 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C.

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi - 3\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi + 3 = 0$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	**Σ**
2.	**Σ**
3.	**Σ**
4.	**Λ**
5.	**Σ**
6.	**Σ**
7.	**Λ**
8.	**Λ**
9.	**Σ**
10.	**Σ**
11.	**Λ**
12.	**Σ**
13.	**Λ**
14.	**Λ**
15.	**Σ**
16.	**Λ**
17.	**Σ**
18.	**Λ**
19.	**Σ**

20.	**Σ**
21.	**Λ**
22.	**Σ**
23.	**Λ**
24.	**Λ**
25.	**Λ**
26.	**Σ**
27.	**Λ**
28.	**Λ**
29.	**Σ**
30.	**Σ**
31.	**Σ**
32.	**Σ**
33.	**Λ**
34.	**Σ**
35.	**Σ**
36.	**Σ**
37.	**Σ**
38.	**Σ**

39.	**Λ**
40.	**Σ**
41.	**Σ**
42.	**Σ**
43.	**Σ**
44.	**Λ**
45.	**Λ**
46.	**Λ**
47.	**Σ**
48.	**Λ**
49.	**Σ**
50.	**Σ**
51.	**Λ**
52.	**Λ**
53.	**Λ**
54.	**Λ**
55.	**Σ**
56.	**Λ**
57.	**Λ**

58.	**Σ**
59.	**Σ**
60.	**Λ**
61.	**Λ**
62.	**Σ**
63.	**Σ**
64.	**Σ**
65.	**Σ**
66.	**Λ**
67.	**Λ**
68.	**Σ**
69.	**Λ**
70.	**Λ**
71.	**Σ**
72.	**Λ**
73.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β
2.	Δ
3.	Β
4.	Α
5.	Ε
6.	Δ
7.	Γ
8.	Δ
9.	Β
10.	Δ
11.	Α
12.	Δ
13.	Ε
14.	Β
15.	Γ

16.	Β
17.	Α
18.	Δ
19.	Ε
20.	Γ
21.	Δ
22.	Β
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	Β
28.	Ε
29.	Γ
30.	Δ

31.	Α
32.	Δ
33.	Β
34.	Β
35.	Δ
36.	Β
37.	Α
38.	Ε
39.	Ε
40.	Ε
41.	Ε
42.	Β
43.	Δ
44.	Δ
45.	Α

46.	Β
47.	Β
48.	Β
49.	Β
50.	Γ
51.	Γ
52.	Δ
53.	Γ
54.	Β
55.	Β
56.	Δ
57.	Ε
58.	Δ
59.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Γ
2	Α
3	Ε
4	Β

2.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Β

3.

1	Γ
2	Ε
3	Α
4	Β

4.

1	Β
2	Α
3	Ε
4	ΣΤ

5.

1	Β
2	Α
3	Δ

6.

1	Β
2	Δ
3	Ε

7.

1	Γ
2	Δ
3	Α
4	ΣΤ
5	Β

8.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Δ

9.

1	Δ
2	Β
3	Ε
4	Α

10.

1	Ε
2	Β
3	Γ

11.

1	Β
2	Ε
3	Α

12.

1	Γ
2	Α
3	ΣΤ
4	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. C_4, C_1, C_5, C_3, C_2

2. C_3, C_2, C_5, C_4, C_1

3. Δ, Γ, Β, Α, Ε

4. d_E, d_B, d_Γ, d_Δ, d_A

5. C_2, C_1, C_3, C_4, C_5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

12. Σύστημα ως προς x, y. Βρίσκουμε (x, y) = (συνθ, ημθ).

16. Συντεταγμένες του βαρύκεντρου $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

17. Συντεταγμένες του κέντρου $\left(-\frac{\lambda}{2}, 0\right)$

18. Κ (0, 2) (κέντρο) και $KA \perp (\varepsilon)$

24. Αν ΟΑ : y = λx, τότε ΟΒ : y = - λx

25. $AB \perp x'x$, άρα ΟΑ : y = εφ30x

27. Αν ΟΑ : y = λx, λ > 0, τότε ΟΒ : $y = -\frac{1}{\lambda}x$ και βρίσκουμε την εξίσωση της ΒΓ

31. **α)** Απαλοιφή του κ **β)** $\overrightarrow{AE} \; // \; \overrightarrow{BE}$

34. Η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου από το Α είναι ίση με την απόσταση από την (ε)

38. Είναι β = γ

41. Είναι $\alpha^2 = 2\gamma^2$ και $\beta^2 = \gamma^2$

57. Α (1, 3), Β (4,2, 4,6), Γ (4,6, 4,2) και το σύστημα:

$$\begin{aligned} \kappa + 3\lambda + \mu &= -10 \\ 4{,}6\kappa + 4{,}2\lambda + \mu &= -38{,}8 \\ 4{,}2\kappa + 4{,}6\lambda + \mu &= -38{,}8 \end{aligned}$$

έχει λύσεις κ = - 6, λ = - 6, μ = 14, άρα ρ = 2

58. **α)** αδύνατο σύστημα **β)** η ΟΚ με Ο (0, 0), Κ (3, 2)

γ), δ) Α, Β, Γ, Δ τα σημεία τομής της ΟΚ με τους κύκλους

59. **α)** $\overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = 0$ **β)** $x^2 + y^2 = 4$ **γ)** απλό

δ) να δειχθεί ότι $x_0^2 + y_0^2 = 4$ (δεκτή και η γεωμετρική απόδειξη)

60. **α)** Τα σημεία τομής με τους άξονες Α $\left(\dfrac{\alpha^2}{x_1}, 0\right)$, Β $\left(0, -\dfrac{\beta^2}{y_1}\right)$

β) $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} = 1 + \dfrac{y_1^2}{\beta^2}$ άρα $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \dfrac{\alpha}{x_1} < 1$,

άρα $-\alpha < \dfrac{\alpha^2}{x_1} < \alpha$, άρα το Α βρίσκεται μεταξύ των κορυφών

γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1.	* Αν $\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.	**Σ**	**Λ**
2.	* Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και θ η γωνία τους, τότε $0 \leq \theta \leq \pi$	**Σ**	**Λ**
3.	* Ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$	**Σ**	**Λ**
4.	* Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως διαφορά του διανύσματος θέσης του πέρατός του, από το διάνυσμα θέσης της αρχής του	**Σ**	**Λ**
5.	* Το μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι μη αρνητικός αριθμός.	**Σ**	**Λ**
6.	* Φορέας ενός διανύσματος είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.	**Σ**	**Λ**
7.	* Παράλληλα ή συγγραμμικά είναι τα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση.	**Σ**	**Λ**
8.	* Τα αντίθετα διανύσματα είναι αντίρροπα.	**Σ**	**Λ**
9.	* Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.	**Σ**	**Λ**
0.	* Τα ομόρροπα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.	**Σ**	**Λ**
1.	* Ορθογώνια είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, αν η γωνία που σχηματίζουν είναι 90^o.	**Σ**	**Λ**
2.	* Δυο διανύσματα με ίσα μέτρα είναι ομόρροπα.	**Σ**	**Λ**
3.	* $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$. Από την ισότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.	**Σ**	**Λ**
4.	* Το $\|\lambda\vec{\alpha}\|$ είναι απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.	**Σ**	**Λ**
5.	* Οι συνιστώσες του $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ είναι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα.	**Σ**	**Λ**

6. * Αν δυο διανύσματα έχουν ίσες συντεταγμένες δεν είναι απαραιτήτως ίσα. **Σ** **Λ**

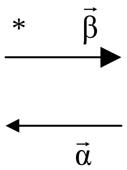
7. * Αν $\vec{\alpha}$=(3,-5) και $\vec{\beta}$=(-6,10) τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

8. * Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}=\vec{i}+3\vec{j}$ είναι το διάνυσμα $\vec{x}=\frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i}+3\vec{j})$. **Σ** **Λ**

9. * Το βαρύκεντρο δυο σημείων Α,Β, στα οποία έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη είναι το μέσον του ΑΒ. **Σ** **Λ**

0. * Το βαρύκεντρο μιας ομοιογενούς τριγωνική πλάκας είναι το σημείο τομής των διαμέσων της. **Σ** **Λ**

1. *



Σύμφωνα με το σχήμα ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ **Σ** **Λ**

2. * Το $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ είναι διάνυσμα. **Σ** **Λ**

3. * $\vec{\alpha}\cdot\vec{p}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{p}$ **Σ** **Λ**

4. * Αν $\vec{\alpha}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{\beta}=4\vec{i}-6\vec{j}$, τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

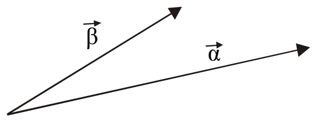
5. * Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και τον λ αρνητικό πραγματικό αριθμό ισχύει: $|\lambda\vec{\alpha}|=-\lambda|\vec{\alpha}|$. **Σ** **Λ**

6. * Έστω $\vec{r}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{u},\lambda\in R$ διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε. Η ευθεία ε είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

7. * Έστω $\vec{r}=3\vec{i}-\vec{j}+\lambda(2\vec{i}+\vec{j})$, λ∈ R διανυσματική εξίσωση ευθείας ε. Τότε το $\frac{1}{2}$ είναι συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. **Σ** **Λ**

8. * Η ευθεία με διανυσματική εξίσωση $\vec{r}=-\vec{i}+2\vec{j}+\mu(\vec{i}-2\vec{j}),\mu\in R$ είναι παράλληλη με την ευθεία που έχει εξίσωση : y = - 2x + 5. **Σ** **Λ**

9. * Τα διανύσματα του σχήματος είναι ομόρροπα. **Σ** **Λ**



0. * Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$. Τότε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = 4\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

1. * Για το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$, το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$ είναι το $\vec{\beta} = \dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

2. * Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα τότε

α) τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ είναι ίσα. **Σ** **Λ**

β) τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν το ίδιο μέσο. **Σ** **Λ**

3. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ είναι ίσα. **Σ** **Λ**

4. * Τα διανύσματα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$, $\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ έχουν ίσα μέτρα. **Σ** **Λ**

5. * Το διάνυσμα $\vec{v} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \left(\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} + \dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \right)$ έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

6. * Αν $\vec{x} = 6\vec{y}$, τότε η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι ίση με μηδέν. **Σ** **Λ**

7. * Αν $\vec{x} = -5\vec{y}$, τότε η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι 180°. **Σ** **Λ**

8. * Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq 0$ και $\vec{\beta} \neq 0$ είναι συγγραμμικά και ισχύει $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu = 0$. **Σ** **Λ**

9. * Το βαρύκεντρο των σημείων Α, Β με βάρη α, β αντίστοιχα δεν αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε τα βάρη με τον ίδιο πραγματικό αριθμό (διάφορο του μηδενός). **Σ** **Λ**

0. * Ισχύει : $\sqrt{\vec{\alpha}^2} = \vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

1. * Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά τότε $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

2. * Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ισχύουν $2\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = 2\vec{\beta} + 5\vec{\delta}$ και $5\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 5\vec{\delta} - \vec{\gamma}$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

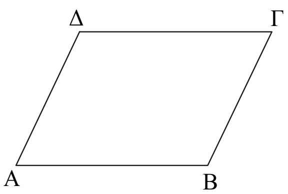
3. * Το εσωτερικό γινόμενο δυο μοναδιαίων διανυσμάτων είναι ίσο με το συνημίτονο της γωνίας τους. **Σ** **Λ**

4. * Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίθετα. **Σ** **Λ**

5. * Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά με το $\vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

6. * Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά με το $\vec{\gamma}$, τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

7. * Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Τότε:



i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **Σ** **Λ**

ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}$ **Σ** **Λ**

iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$ **Σ** **Λ**

8. * Αν $\overrightarrow{A\Gamma} = 5\overrightarrow{AB}$ τότε $\overrightarrow{\Gamma A} = -5\overrightarrow{BA}$. **Σ** **Λ**

9. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$. **Σ** **Λ**

0. * Αν για τα μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ του επιπέδου ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. **Σ** **Λ**

1. * Αν $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$, τότε x = y = 0 **Σ** **Λ**

2. * Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, τότε τα σημεία Α,Β έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

3. * Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α ισχύει:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\alpha^2$ **Σ** **Λ**

4. * Αν $\vec{\alpha}^2 = 9\vec{\beta}^2$, τότε $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -3\vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

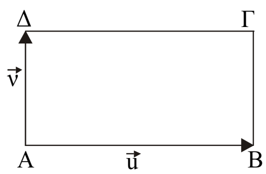
5. * Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α,Β είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$. **Σ** **Λ**

6. * Αν μια ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (5,7)$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{5}{7}$. **Σ** **Λ**

7. * Αν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ διέρχονται από τα σημεία Α,Β αντίστοιχα και είναι παράλληλες στα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ αντίστοιχα, τότε $\vec{u} = \vec{v}$. **Σ** **Λ**

8. * Σε ορθοκανονικό σύστημα σύστημα Οxy με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$, οι διχοτόμοι της πρώτης και της τέταρτης γωνίας είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

9. * Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ αν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{A\Delta}$, τότε ισχύει: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$. **Σ** **Λ**



0. * Αν α = β = 0, το διάνυσμα $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό και ανεξάρτητο του Μ. **Σ** **Λ**

1. * Η ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις x = 9 + t, y = 9 - t, $t \in R$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

2. * Οι ευθείες ε: 2x - 3y + 1 = 0 και δ: $\begin{cases} x = 2\kappa \\ y = -3\kappa \end{cases}$, $\kappa \in R$ είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

3. * Έστω σημεία Α (2, 3), Β (-1, 5), Γ (7, -2), Δ (1, 2), Ε (x, 8), Ζ (5, 8) και Η (8, y). Τότε:

α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

β) Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma E}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι συγγραμμικά τότε η τετμημένη του Ε είναι - 8 **Σ** **Λ**

γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

δ) Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma H}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα η τεταγμένη του Η είναι - $\frac{1}{2}$ **Σ** **Λ**

4. * Για τα αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right|$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $2\vec{\alpha} = -3\vec{\gamma} + 2\vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \neq 0$, $\vec{\beta} \neq 0$, τότε το $\vec{\gamma}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

6. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (-2, 1) και $\vec{\beta}$ = (-10, 5) είναι παράλληλα. **Σ** **Λ**

7. * Αν $x\vec{i} + y\vec{j} \neq \vec{0}$, τότε $|x| + |y| \neq 0$ **Σ** **Λ**

8. * Αν $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = 0$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα. **Σ** **Λ**

9. * Τα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Οxy, είναι της μορφής $\vec{x} = \lambda(\vec{i} + \vec{j}), \lambda \in R$. **Σ** **Λ**

0. * Τα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με τη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Οxy είναι της μορφής $\vec{x} = \lambda(-\vec{i} + \vec{j}), \lambda \in R$. **Σ** **Λ**

1. * Το μοναδιαίο ομόρροπο διάνυσμα του $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$ είναι το $\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x}$. **Σ** **Λ**

2. * Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $\overrightarrow{A\Gamma}=-\overrightarrow{B\Gamma}$ τότε τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

4. * Αν $\vec{i},\vec{j}$ μοναδιαία, τότε $(\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{i}+\vec{j})=0$. **Σ** **Λ**

5. * Οι ευθείες με διανυσματικές εξισώσεις:

$\vec{r}=3\vec{i}+5\vec{j}+\lambda(\vec{i}+6\vec{j}),\lambda\in R$ και

$\vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}+\mu(-\vec{i}+3\vec{j}),\mu\in R$ είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**

6. * Η ευθεία $\vec{r}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\lambda(5\vec{i}+7\vec{j}),\lambda\in R$ διέρχεται από το σημείο Α(-2,3). **Σ** **Λ**

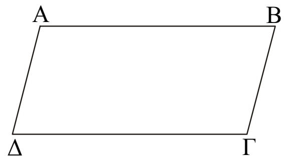
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε από τις παρακάτω ισότητες σωστή είναι η

Α. $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ **Β.** $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$ **Γ.** $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}$

Δ. $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ **Ε.** καμία από αυτές

2. * Το Ε είναι σημείο του επιπέδου του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η



Α. $\overrightarrow{\mathrm{EA}} - \overrightarrow{\mathrm{EB}} = \overrightarrow{\mathrm{E}\Delta} - \overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma}$

Β. $\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} = \overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma} + \overrightarrow{\mathrm{E}\Delta}$

Γ. $\overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma} - \overrightarrow{\mathrm{EA}} = \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{E}\Delta}$

Δ. $\overrightarrow{\mathrm{EB}} - \overrightarrow{\mathrm{E}\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma} + \overrightarrow{\mathrm{EA}}$

Ε. $\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma} + \overrightarrow{\mathrm{E}\Delta} = \vec{0}$

3. * Η σχέση $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ ισχύει

Α. μόνο για ομόρροπα διανύσματα

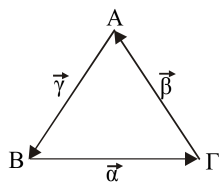
Β. μόνο για αντίρροπα διανύσματα

Γ. μόνο για κάθετα διανύσματα

Δ. μόνο για αντίθετα διανύσματα

Ε. οποιαδήποτε διανύσματα

4. * Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Από τις παρακάτω σχέσεις λανθασμένη είναι η



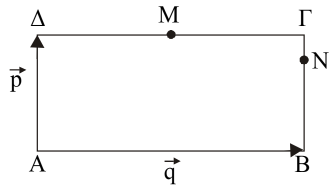
Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 3\vec{\alpha}$ **Β.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

Γ. $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| = 3|\vec{\alpha}|$ **Δ.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

Ε. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq |\vec{\gamma}|$

5. * Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΔΓ και το Ν είναι σημείο της ΓΒ με $\frac{N\Gamma}{NB} = \frac{1}{3}$.

Το $\overrightarrow{MN}$ ισούται με



Α. $-\frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ **Β.** $\frac{5}{3}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ **Γ.** $4\vec{p} + 2\vec{q}$

Δ. $\frac{7}{4}\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

6. * Τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα και κ πραγματικός αριθμός. Ποια από τις παρακάτω ισότητες δεν αληθεύει σε καμιά περίπτωση;

Α. $\overrightarrow{AB} = \kappa\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **Β.** $\overrightarrow{AB} = |\kappa|\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{AB} = -|\kappa|\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Δ. $\overrightarrow{AB} = -\kappa\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **Ε.** $\overrightarrow{AB} = \kappa\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

7. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2 - 3\lambda + \lambda^2, 0)$ είναι μηδενικό όταν

Α. $\lambda = 0$ **Β.** $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ **Γ.** $\lambda = -1$

Δ. $\lambda = -2$ **Ε.** κανένα από αυτά

8. * Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 + \lambda, \nu - 2)$ και $\vec{\beta} = (2,2)$ είναι ίσα, τότε για τα λ,ν ισχύει η

Α. $\lambda = -1$ και $\nu = 3$ **Β.** $\lambda = 1$ και $\nu = 4$ **Γ.** $\lambda = 1$ και $\nu = -4$

Δ. $\lambda = -2$ και $\nu = 0$ **Ε.** $\lambda = 0$ και $\nu = 4$

9. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{r} = 3\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{j}$. Παράλληλο προς αυτό είναι το διάνυσμα

Α. $3\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}$ **Β.** $-9\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$ **Γ.** $\vec{i} + 3\vec{j}$

Δ. $-\vec{i} + 3\vec{j}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

10. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ και με $|\kappa\vec{\alpha}| > 10$, $\kappa \in R$. Για τον $\kappa \in R$ ισχύει

Α. $\kappa > \frac{1}{2}$ **Β.** $\kappa < -\frac{1}{2}$ **Γ.** $-2 < \kappa < 2$

Δ. $|\kappa| > 2$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

11. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3, 2), $\vec{\beta}$ = (- 2, - 3), $\vec{\gamma}$ = (- 6, - 4), $\vec{\delta}$ = ($-\frac{3}{2}$, 1), $\vec{\varepsilon}$ = (4, 6), $\vec{\zeta}$ = (- 3, - 2) και $\vec{\eta}$ = (12, 8). Ποια από τα παρακάτω ζεύγη είναι συγγραμμικά;

Α. $\vec{\alpha}$ και $\vec{\varepsilon}$ **Β.** $\vec{\gamma}$ και $\vec{\eta}$ **Γ.** $\vec{\delta}$ και $\vec{\zeta}$ **Δ.** $\vec{\varepsilon}$ και $\vec{\gamma}$ **Ε.** $\vec{\beta}$ και $\vec{\eta}$

12. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (5, -3) έχει αρχή το σημείο (-2, 4). Πέρας του είναι το σημείο

Α. (- 3, 1) **Β.** (3, 1) **Γ.** (- 3, - 1) **Δ.** (3, - 1) **Ε.** (7, 1)

13. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = [λ (λ - 1) (λ - 2) (λ + 3) (λ + 4) + 5, 3] και $\vec{\beta}$ = (10, 6), $\lambda \in R$. Πόσες τιμές του λ κάνουν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά;

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 5

14. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\theta\vec{i} + \eta\mu\theta\vec{j}$ με $\theta \in R$ είναι παράλληλο στην πρώτη διχοτόμο των αξόνων, όταν ο θ ισούται με

Α. θ = 2κπ **Β.** θ = κπ **Γ.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

Δ. $\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ **Ε.** θ = (2κ + 1) π, $\kappa \in Z$

15. * Το διάνυσμα θέσης του μέσου Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Τα διανύσματα θέσης $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$ των άκρων του ΑΒ μπορεί να είναι

Α. $\vec{\alpha} = -4\vec{i} + 8\vec{j}$ $\quad \vec{\beta} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$

Β. $\vec{\alpha} = -4\vec{i}$ $\quad \vec{\beta} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

Γ. $\vec{\alpha} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$ $\quad \vec{\beta} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

Δ. $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad \vec{\beta} = 3\vec{i} - \vec{j}$

Ε. $\vec{\alpha} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ $\quad \vec{\beta} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

16. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^3 - 1)\vec{i} + (\lambda^2 + 1)\vec{j}, \lambda \in R$. Από τις παρακάτω περιπτώσεις αληθεύει η

Α. υπάρχει λ έτσι ώστε $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Β. υπάρχει λ έτσι ώστε το $\vec{\alpha}$ ομόρροπο του $\vec{i}$

Γ. υπάρχει λ έτσι ώστε το $\vec{\alpha}$ αντίρροπο του $\vec{i}$

Δ. υπάρχει λ έτσι ώστε το $\vec{\alpha}$ αντίρροπο του $\vec{j}$

Ε. για λ = 1 το $|\vec{\alpha}| = 2$.

17. * Αν $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $\vec{v} = (x, \frac{\sqrt{5}}{4})$ και $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ τότε ο x ισούται με

Α. $\frac{1}{4}$ ή $-\frac{1}{4}$ **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 0

Δ. $\frac{5}{16}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. * Αν $\overrightarrow{OP} = (3,2)$ και $\overrightarrow{PQ} = (-1,4)$, τότε το $\overrightarrow{OQ}$ ισούται με

Α. (4, -6) **Β.** (2, 2) **Γ.** (2, 6) **Δ.** (4, 3) **Ε.** (4, 6)

19. * Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη. Αν Κ σημείο του επιπέδου του με $\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=\vec{0}$, τότε το Κ είναι

Α. σημείο τομής των διχοτόμων του ΑΒΓ.

Β. σημείο τομής των υψών του ΑΒΓ

Γ. σημείο τομής των διαμέσων του ΑΒΓ

Δ. σημείο τομής των μεσοκαθέτων του ΑΒΓ

Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

20. * Το βαρύκεντρο των σημείων Α, Β μιας ευθείας x΄x, στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2,5 αντιστοίχως, βρίσκεται

Α. στην ημιευθεία Αx΄

Β. στην ημιευθεία Βx

Γ. στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ

Δ. εκτός της ευθείας x΄x

Ε. στο μέσο του ΑΒ.

21. * Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και οι προτάσεις :

Ι. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ΙΙ. $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ΙΙΙ. $\vec{\beta} = \vec{0}$ ΙV. $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$

Όταν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{0}$, όλες οι δυνατές περιπτώσεις για τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι

Α. Ι ή ΙV

Β. Ι ή ΙΙ

Γ. Ι ή ΙΙΙ

Δ. ΙΙ ή ΙΙΙ

Ε. ΙΙΙ και ΙV

22. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -7\vec{i}$. Η γωνία τους είναι

Α. οξεία **Β.** αμβλεία **Γ.** ορθή **Δ.** 0° **Ε.**180°

23. * Η παράσταση $\vec{j} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j})$ είναι ίση με

Α. - 1 **Β.** - 3 **Γ.** 0 **Δ.** 5 **Ε.** 2

24. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (5, 3). Η τετμημένη ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ κάθετου στο $\vec{\alpha}$ είναι 8. Η τεταγμένη του $\vec{\beta}$ είναι

Α. $-\frac{8}{5}$ **Β.** $\frac{15}{8}$ **Γ.** $-\frac{40}{3}$ **Δ.** $\frac{40}{3}$ **Ε.** $\frac{24}{5}$

25. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (-κ, 1) και $\vec{\beta}$ = (κ, - 2), κ ∈ R είναι κάθετα όταν ο κ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 2

Ε. δεν υπάρχει κ ∈ R

26. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, $x,y \neq 0$ έχουν

Α. Το ίδιο μέτρο και είναι κάθετα.

Β. Το ίδιο μέτρο και είναι ομόρροπα.

Γ. Το ίδιο μέτρο και είναι αντίρροπα.

Δ. Το ίδιο μέτρο και είναι αντίθετα.

Ε. Κανένα από τα παραπάνω.

27. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$. Το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ γίνεται μέγιστο όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή και είναι πλευρές

Α. ισόπλευρου τριγώνου

Β. τετραγώνου

Γ. κανονικού εξαγώνου

Δ. ορθογωνίου τριγώνου

Ε. ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 54°

28. * Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (3, -1) και Β (-1, -1) έχει διανυσματική εξίσωση την

Α. $\vec{r} = 3\vec{i} - \vec{j} + t(-4\vec{i})$ **Β.** $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + 4t\vec{i}$ **Γ.** $\vec{r} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4t\vec{i}$

Δ. $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + 4t$ **Ε.** $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + t(4\vec{i} + \vec{j})$

29. * Η ευθεία με διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = (3\vec{i} - 2\vec{j}) + t(2\vec{i} + 5\vec{j})$, $t \in R$

Α. διέρχεται από το σημείο (2, 5)

Β. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2,5)$

Γ. έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{5}{2}$

Δ. είναι παράλληλη στην ευθεία y = - 5x + 2

Ε. κανένα από τα παραπάνω

30. * Το διάνυσμα $\vec{u}$ = (3, -2) είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση

Α. y = 3x - 2 **Β.** 2x + 3y + 1 = 0 **Γ.** x + y = 1

Δ. 3x - 2y = 2 **Ε.** x - y - 2 = 0

31. * Αν $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \lambda(-\vec{i} + 7\vec{j}), \lambda \in R$ η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας ε, τότε από τα παρακάτω σημεία ανήκει σε αυτήν το:

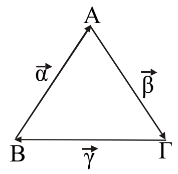
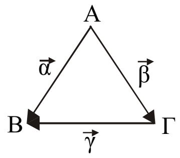
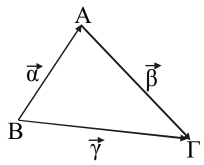
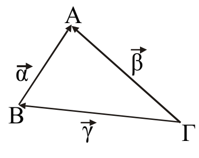
Α. (-1, 2) **Β.** (2, 5) **Γ.** (2, -3) **Δ.** (-1, 1) **Ε.** κανένα από αυτά

32. * Το σημείο Ρ με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = t\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}, t \in R$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

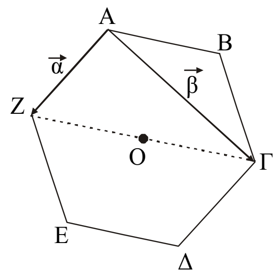
Α. x + y = - 1 **Β.** 2x - y = 1 **Γ.** 2x + y = 1 **Δ.** x - y = 1 **Ε.** y = 2

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχήμα της στήλης Α με το σωστό άθροισμα της στήλης Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=2\vec{\beta}$
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=2\vec{\gamma}$
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$
	$\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}$
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\gamma}$
	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$
	

2. * Στο κανονικό εξάγωνο του σχήματος είναι $\overrightarrow{AZ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{AB}$	$\dfrac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$
$\overrightarrow{\Delta E}$	$\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
$\overrightarrow{A\Delta}$	$\dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
$\overrightarrow{AE}$	$2\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{B\Gamma}$	$\dfrac{-3\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$
	$\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$
	$\dfrac{\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}}{2}$
	$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

3. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάνυσμα της στήλης Α το μέτρο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

στήλη Α **διάνυσμα**	**στήλη Β** **μέτρο**
$\vec{u} = (-3,-4)$	$\sqrt{7}$
	$\sqrt{34}$
$\vec{v} = (2, \sqrt{3})$	5
$\vec{w} = (3,5)$	$\sqrt{17}$
	$\sqrt{13}$
$\vec{r} = (4,-1)$	17
$\vec{z} = (2,-3)$	$\sqrt{23}$
	$\sqrt{11}$

4. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -3\vec{i} + \vec{j}$. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάνυσμα της στήλης Α το ίσο του της στήλης Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$	$16\vec{i} - 3\vec{j}$
$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$	$4\vec{i} - 3\vec{j}$
$-\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$	$-2\vec{i} - \vec{j}$
$2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$	$-16\vec{i} + 7\vec{j}$
	$-4\vec{i} + 7\vec{j}$
	$-2\vec{i} + \vec{j}$
	$11\vec{i} - 7\vec{j}$

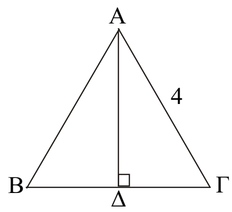
5. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάνυσμα της στήλης Α το μοναδιαίο ομόρροπό του της στήλης Β.

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β ομόρροπο μοναδιαίο
	$5(-3\vec{i}+4\vec{j})$
$3\vec{i}-4\vec{j}$	$-\frac{1}{5}(-3\vec{i}-4\vec{j})$
$-3\vec{i}+4\vec{j}$	$-5(3\vec{i}+4\vec{j})$
	$-\frac{1}{5}(-3\vec{i}+4\vec{j})$
$3\vec{i}+4\vec{j}$	$-\frac{1}{5}(3\vec{i}-4\vec{j})$
$-3\vec{i}-4\vec{j}$	$\sqrt{5}(-3\vec{i}+4\vec{j})$
	$-\frac{1}{5}(3\vec{i}+4\vec{j})$

6. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάνυσμα της στήλης Α το μέτρο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

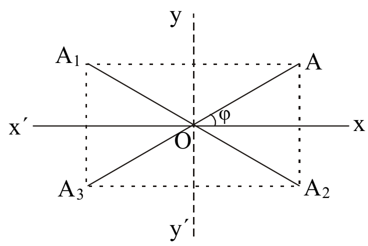
στήλη Α **διάνυσμα**	**στήλη Β** **μέτρο**
$\vec{\alpha} = \frac{2}{3}\vec{i} + 3\kappa\vec{j}$	$\sqrt{4\kappa^2 + 9}$
$\vec{\beta} = 2\kappa\vec{i} + 3\vec{j}$	$\frac{1}{6}\sqrt{9\kappa^2 + 16}$
$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$	$\frac{1}{3}\sqrt{4 + 81\kappa^2}$
$\vec{\delta} = \kappa\vec{i} + 4\kappa\vec{j}$	$\frac{1}{4}\sqrt{4 + 9\kappa^2}$
$\vec{\varepsilon} = \sqrt{8}\vec{i} + \sqrt{5}\kappa\vec{j}$	$\|\kappa\|\sqrt{17}$
	$\kappa\sqrt{17}$
	$\sqrt{5\kappa^2 + 8}$

7. * Το τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο και ΑΔ διάμεσος. Η πλευρά του τριγώνου είναι 4. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β.



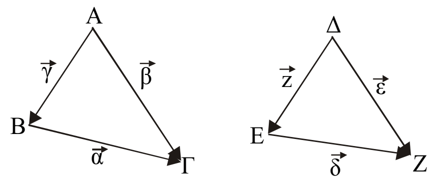
στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$	8
	-12
$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΓ}}$	12
	0
$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$	-8
	$8\sqrt{13}$
$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΔ}}$	16
$\overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2$	20

8. * Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε το σημείο Α και τα συμμετρικά του $Α_1$, $Α_2$ και $Α_3$ ως προς τους άξονες y΄y, x΄x και την αρχή των αξόνων αντίστοιχα. Είναι $|\overrightarrow{ΟΑ}| = α$ και $x\hat{Ο}Α = φ$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β.



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{ΟΑ_1} \cdot \overrightarrow{ΟΑ_3}$	0
	$-α^2$
$\overrightarrow{ΟΑ} \cdot \overrightarrow{ΟΑ_1}$	
	$α^2 ημ2φ$
$\overrightarrow{ΟΑ_1} \cdot \overrightarrow{ΟΑ_2}$	$-α^2 συν2φ$
	$α^2 συν2φ$
$\overrightarrow{ΟΑ}^2$	
	$α^2 συνφ$
	$α^2$

9. * Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα είναι οξυγώνια με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.



στήλη Α	στήλη Β
$\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{\lvert\vec{\beta}\rvert\cdot\lvert\vec{\gamma}\rvert}$	$\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{z}}{\lvert\vec{\gamma}\rvert\cdot\lvert\vec{z}\rvert}$
	$\dfrac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{z}}{\lvert\vec{\varepsilon}\rvert\cdot\lvert\vec{z}\rvert}$
$\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\gamma}\rvert}$	$\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\delta}\rvert}$
	$\dfrac{\vec{\delta}\cdot\vec{z}}{\lvert\vec{\delta}\rvert\cdot\lvert\vec{z}\rvert}$
$\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert}$	$\dfrac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\delta}}{\lvert\vec{\varepsilon}\rvert\cdot\lvert\vec{\delta}\rvert}$
	$\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\varepsilon}}{\lvert\vec{\beta}\rvert\cdot\lvert\vec{\varepsilon}\rvert}$

10. * Σε κάθε ζεύγος σημείων της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας της στήλης Β που περνάει από αυτά.

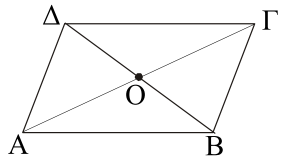
στήλη Α **σημεία**	**στήλη Β** **παραμετρική εξίσωση ευθείας**
Α (1, 2) Β (2, 5)	$x = 2 + t$, $y = -5 - 5t$, $t \in R$
	$x = 3 + t$, $y = 3 - t$, $t \in R$
Α (1, 0) Β (2, - 5)	$x = 2 + t$, $y = 5 + 3t$, $t \in R$
	$x = -1 - t$, $y = 5 + 2t$, $t \in R$
Α (- 2, 3) Β (3, 0)	$x = -2 + 5t$, $y = 3 - 3t$, $t \in R$
Α (0, 3) Β (- 1, 5)	$x = 2 - 6t$, $y = 1 - 2t$, $t \in R$

11. * Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της στήλης Α με τη σωστή πρόταση της στήλης Β.

στήλη Α **η ευθεία που**	**στήλη Β** **έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = …**
	0
είναι παράλληλη στον άξονα x΄x	1
είναι παράλληλη στον άξονα y΄y	- 1
	δεν ορίζεται
τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y	διάφορο του μηδενός

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και Ο το κέντρο του (σημείο τομής των διαγωνίων). Να συμπληρώσετε τις ισότητες.



i) $\overrightarrow{ΑΟ} + ... = \overrightarrow{ΑΒ}$

ii) $....... + \overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΑΓ}$

iii) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} = ...$

iv) $\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΓΒ} = ...$

v) $\overrightarrow{ΑΟ} + \overrightarrow{ΓΟ} = ...$

vi) $\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΟΔ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΒ} + ... = \vec{0}$

2. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας

Σημεία	**Συμμετρικό του Μ ως προς Κ**	**Μέτρο του διανύσματος** $\overrightarrow{ΜΜ'}$
Μ (1, 2), Κ (-1, 6)	Μ΄ (….., ……)	
Μ (3, 5), Κ (2, 7)	Μ΄ (….., ……)	
Μ (-1, 3), Κ(-3, 2)	Μ΄ (….., ……)	

3. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

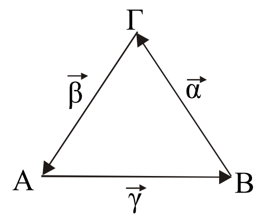
Διανύσματα $\vec{α}$	$\vec{β}$	**Μέτρο** $\lvert\vec{α}\rvert$	**Μέτρο** $\lvert\vec{β}\rvert$	**Εσωτερικό γινόμενο** $\vec{α}\cdot\vec{β}$
(2, 3)	(-1, 2)			
$(1, \sqrt{3})$	(2, 2)			
$(-1, \sqrt{3})$	$(1, \sqrt{2})$			
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$	$(-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$			

4. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις κατάλληλες τιμές του x.

Τα διανύσματα	**είναι συγγραμμικά όταν x =**	**είναι ορθογώνια όταν x =**
$\vec{u} = (x, \sqrt{2})$, $\vec{v} = (3\sqrt{2}, \sqrt{3})$		
$\vec{u} = (-1,\ 4)$, $\vec{v} = (x-2,\ \frac{-3}{2})$		
$\vec{u} = (x-3, 6)$, $\vec{v} = (x+4, 2)$		
$\vec{u} = (x-1, x+1)$, $\vec{v} = (x+1, x-1)$		

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\beta}$. Αν είναι $|\vec{\alpha}| < |\vec{\beta}| < |\vec{\gamma}|$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|}$, $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$, $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|}$



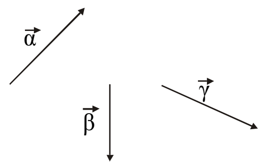
2. * Δίνονται τα σημεία Α $(0, \frac{1}{2})$, Β (1, 2) και Γ (- 1, -1) στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2, 3, 5 αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) Αν G_1 είναι το βαρύκεντρο των Α, Β και G_2 το βαρύκεντρο των Β, Γ, να διατάξετε ως προς τις τετμημένες τους τα σημεία Α, Β, Γ, G_1 και G_2.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να κατασκευάσετε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.



2. ** Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ώστε να ισχύει:

α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| > |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

γ) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

3. * Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ισχύει $|(\lambda-3)\vec{\alpha}| < |5\vec{\alpha}|$ όπου $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

4. ** Στο επίπεδο δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, τα οποία ανά δυο είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το άθροισμά τους αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\gamma}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$.

5. * Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ + $\vec{\beta}$ να διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

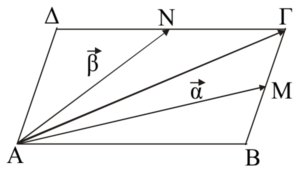
6. * Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{A\Delta} = 3\vec{q}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\vec{p}, \vec{q}$.

7. * Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα και ένα εσωτερικό του σημείο Γ τέτοιο ώστε $\text{ΑΓ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$. Αν τα διανύσματα θέσης των Α, Β είναι $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου Γ.

8. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} = 2\overrightarrow{\text{ΑΡ}}$, όπου Ρ σημείο του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι το σημείο Ρ ταυτίζεται με το μέσο της ΒΓ.

9. * Έστω Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά. Να βρείτε σημείο Μ του επιπέδου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΑΜ}} = \vec{0}$.

0. ** Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{\text{ΑΜ}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΝ}} = \vec{\beta}$.



11. ** Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ) με μια γωνία ίση με 60^o. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ οι οποίες τέμνονται στο Ο. Αν $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$, $\overrightarrow{\text{ΓΔ}}$, $\overrightarrow{\text{ΟΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

12. * Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ του επιπέδου του. Να δείξετε ότι το $\vec{u} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΒ}} - 2\overrightarrow{\text{ΜΓ}}$ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

13. * Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\text{ΓΔ}} = -5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

14. ** Στις πλευρές ΟΑ και ΟΒ ενός ορθογωνίου ΟΑΓΒ παίρνουμε μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως. Αν ΟΑ = 3 και ΟΓ = 5, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$ ως συνάρτηση των $\vec{i}, \vec{j}$. Στη συνέχεια αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντιστοίχως, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ ως συνάρτηση των $\vec{i}, \vec{j}$.

15. * Αν $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ και $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ υπολογίστε το διάνυσμα:

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + 3(5\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{u}).$$

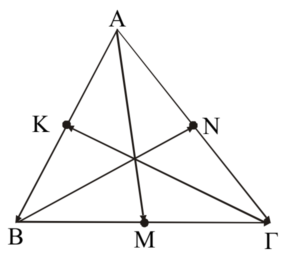
16. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$. Να γράψετε σε απλή μορφή το διάνυσμα

$$\frac{2}{5}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{3}{10}(2\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{v} - 2\vec{u}).$$

7. *** Τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου και τα σημεία Μ, Ν, και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} = \vec{\gamma}$ να βρείτε:

α) Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

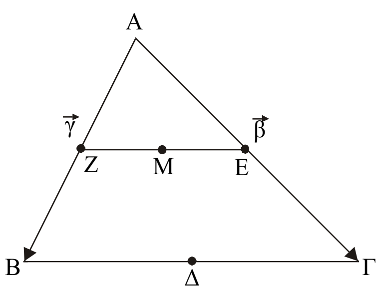
β) Το άθροισμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma K}}$.



8. * Τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τριγώνου και τα Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}$ και Μ το μέσον του ΕΖ, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

β) Τι συμπεραίνετε για τα σημεία Α, Μ και Δ;



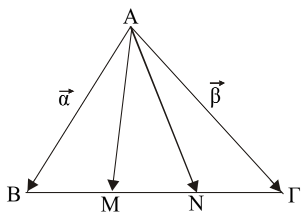
19. * Αν $\vec{u} = (\sqrt{2}+1, m), m > 0$ και $|\vec{u}| = 6$ να βρείτε το m.

20. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και επί των πλευρών του τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Σ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta\Sigma} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}$.

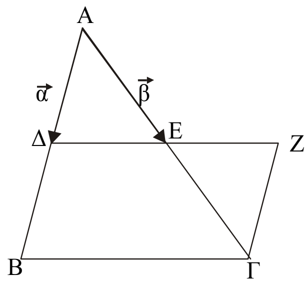
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΡΣ είναι παραλληλόγραμμο.

21. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,-1)$, $\vec{\beta} =$ (1, -2) και $\vec{\gamma} =$ (1, -7). Να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

2. ** Τα σημεία Μ και Ν διαιρούν την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ σε τρία ίσα τμήματα. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

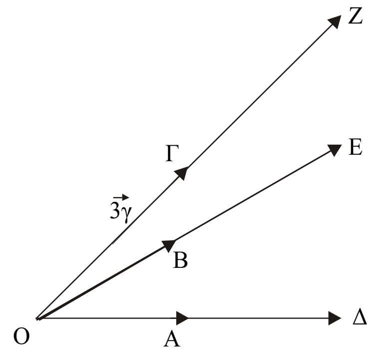


3. ** Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, Δ και Ε είναι τα μεσα των ΑΒ και ΑΓ. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα: α) $\overrightarrow{\Delta E}$ β) $\overrightarrow{\Delta Z}$ γ) $\overrightarrow{Z\Gamma}$



Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το τετράπλευρο ΑΔΓΖ από τη σύγκριση των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$;

4. ** Στο διπλανό σχήμα ισχύει $\overrightarrow{ΟΑ} = 4\vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΓ} = 3\vec{γ}$ και $\overrightarrow{ΟΒ} = 2\vec{α} + \vec{γ}$.



α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΒ}$.

β) Προεκτείνουμε τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ μέχρι τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντιστοίχως έτσι ώστε ΟΓ = ΓΖ, $\frac{ΟΒ}{ΒΕ} = \frac{ΟΑ}{ΑΔ} = \frac{1}{2}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΖΕ}$ και $\overrightarrow{ΕΔ}$ ως συνάρτηση των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ και να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε, Δ είναι συνευθειακά.

25. ** Έστω το διάνυσμα $\vec{v} = (-2{,}5)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα με πέρας το σημείο Α (3, 1) και τα οποία να είναι αντίρροπα του $\vec{v}$.

26. * Δίνονται τα σημεία Α (1, 3), Β (2, 4) και Γ (5, 14). Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\left|\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ}\right|$ και $\left|\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}\right|$.

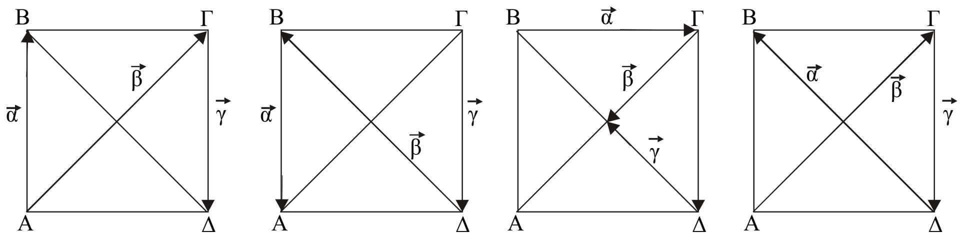
27. * Δίνονται τα σημεία Α (5, 8), Β (-6, 3) , Γ (9, 4).

α) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $\vec{v} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΓ})$.

β) Ποιες είναι οι συνιστώσες του $\vec{v}$;

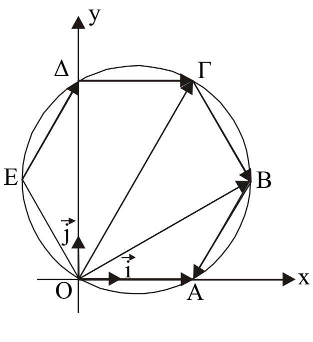
28. * Έστω τα διανύσματα $\vec{α}$ = (1, 2) , $\vec{β}$ = (2, -3) , $\vec{γ}$ = (3, 2). Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $x\vec{α} - y\vec{β} + \vec{γ} = \vec{0}$.

29. * Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

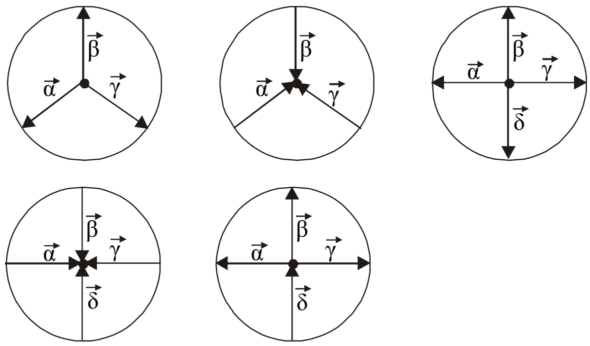


30. ** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{\beta}=4\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{\gamma}=8\vec{i}$, $\vec{\delta}=-8\vec{i}+3\vec{j}$. Να βρείτε διανύσματα $\vec{x},\vec{y},\vec{\omega}$ που είναι συγγραμμικά των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και τα οποία να έχουν άθροισμα το διάνυσμα $\vec{\delta}$.

1. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται κανονικό εξάγωνο ΟΑΒΓΔΕ με $|\overrightarrow{OA}|=4$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{E\Delta},\overrightarrow{\Delta\Gamma},\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{BA}$ ως συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$.



32. ** Οι κύκλοι που φαίνονται στα σχήματα είναι χωρισμένοι σε τρία ή τέσσερα ίσα μέρη.



Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το άθροισμα των τριών ή τεσσάρων διανυσμάτων που έχουν σημειωθεί.

33. * Έστω κύκλος κέντρου K και AB μια διάμετρος αυτού. Αν τα διανύσματα θέσης των K και A είναι $\overrightarrow{OK} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου B.

34. * Δίνονται τα συνευθειακά σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για τυχαίο σημείο Δ και λ πραγματικό αριθμό ισχύει $\overrightarrow{\Delta A} = \lambda(\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta \Gamma}) + \overrightarrow{\Delta \Gamma}$.

35. * Έστω τα σημεία A (1, 2), B (0, 3) και Γ (5, x). Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x έτσι ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

36. ****** Έστω Α, Β, Γ, Δ σημεία ενός επιπέδου και Μ, Ν τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως.

α) Να γράψετε με τη μορφή ενός διανύσματος τα αθροίσματα $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}$ και να αποδείξετε ότι $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ώστε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$;

γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ώστε $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$;

37. ***** Έστω ότι ισχύει η σχέση $\lambda\vec{u}+\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{\beta}$, $\lambda\in R$.

α) Αν $\lambda = 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

β) Αν $\lambda \neq 1$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

38. ****** Έστω Α, Β, Γ, Δ σημεία ενός επιπέδου και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$.

β) Αν Ρ είναι σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{MN}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$.

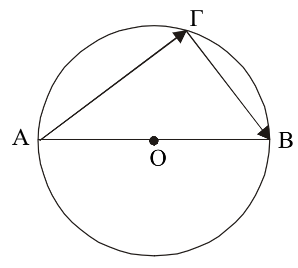
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΡΔ είναι παραλληλόγραμμο.

9. ****** Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$ ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων θέσης από το Ο.

β) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$.

Ποια πρόταση από τη Γεωμετρία σας θυμίζει;



40. ** Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο μη μηδενικά διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = \kappa$ και $|\vec{\beta}| = \lambda$. Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

41. ** Δίνονται τέσσερα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και Ο το σημείο τομής των ΑΓ και ΔΜ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta M}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{\Delta O}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

42. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

43. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου, όταν στις κορυφές Α,Β,Γ έχουν τοποθετηθεί βάρη α,β,γ αντιστοίχως στις περιπτώσεις

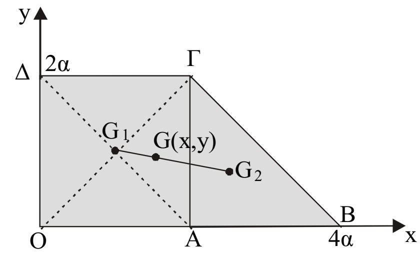
α) $\alpha = \beta = 1, \gamma = 2$

β) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{4}$.

44. * Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντεταγμένες Α (1, 4), Β (2, 6) και Γ (2, 1). Αν στα Α, Β, Γ τοποθετηθούν βάρη 2, 3, 4 αντιστοίχως, να βρείτε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ.

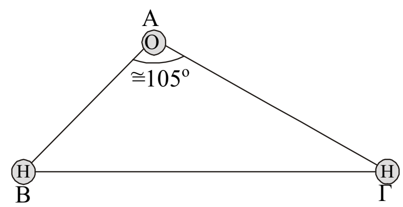
45. * Έστω τα σημεία Α (-4, 5) και Β (1, -5) στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2, 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο των Α, Β.

6. ** Ένα ομοιογενές φύλλο λαμαρίνας ΟΑΒΓΔ αποτελείται από ένα τετράγωνο ΟΑΓΔ και ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΓ) = (ΑΒ) = 2α και (ΟΒ) = 4α. Να βρείτε το κέντρο βάρους του σώματος.



47. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, στις κορυφές Β,Γ,Α του οποίου έχουν τοποθετηθεί βάρη 1, 1, 5 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου αυτού.

8. ** Είναι γνωστό από τη Χημεία ότι ένα μόριο νερού (H_2O) αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου Ο και δυο άτομα υδρογόνου Η. Από πειραματική διαδικασία διαπιστώθηκε ότι τα άτομα αυτά σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma \cong 0{,}096 \cdot 10^{-10}\,m$ και $B\hat{A}\Gamma \cong 105^o$. Θεωρούμε ότι στις κορυφές Α, Β, Γ έχουν τοποθετηθεί βάρη 16, 1, 1 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο του ΑΒΓ.



49. ** α) Έστω τα σημεία Α (-4, 5) και Β (1, -5) στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2, 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο G των Α, Β.

β) Αν γίνει εναλλαγή των βαρών, να βρείτε το νέο βαρύκεντρο G΄.

γ) Να βρείτε το $|\overrightarrow{GG'}|$.

50. ** Στις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη. Έστω G το βαρύκεντρο του τριγώνου αυτού. Αν Α (-7, -1), Β (-2, -9) και G (0, 0), να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

51. ** Έστω Α, Β, Γ σημεία του επιπέδου.

α) Αν στα Α, Β έχουν τοποθετηθεί βάρη 2,1 αντιστοίχως, να βρείτε το βαρύκεντρο των Α, Β.

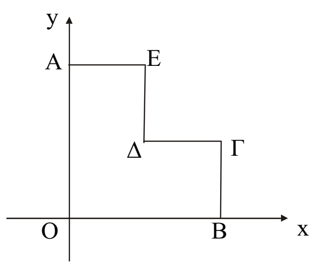
β) Να βρείτε τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$2\overrightarrow{\text{ΜΑ}}+\overrightarrow{\text{ΜΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\vec{0}$.

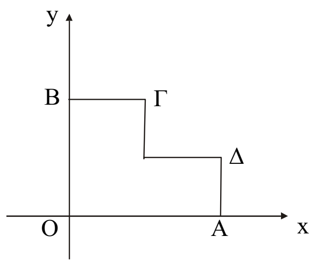
52. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (3, 5) , Β (-3κ, 2), Γ (2κ, κ + 1) , $κ \in R$. Αν στις κορυφές Α,Β,Γ τοποποθετηθούν βάρη 2, 3, 5 αντιστοίχως και το βαρύκεντρο G του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y, να βρείτε τον αριθμό κ.

53. ** Έστω G_1 το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη και G_2 το βαρύκεντρο ενός άλλου τριγώνου Α΄ Β΄ Γ΄ στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί πάλι ίσα βάρη. Αν G είναι το βαρύκεντρο των σημείων Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄, να αποδείξετε ότι τα σημεία G_1, G_2, G είναι συνευθειακά.

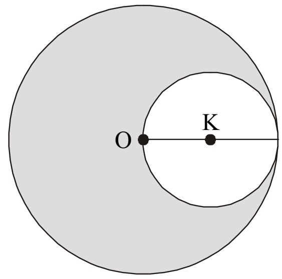
4. ** Να βρείτε το κέντρο βάρους ομοιογενούς φύλλου λαμαρίνας του διπλανού σχήματος με ΟΑ = ΟΒ = 12 cm, ΒΓ = ΔΓ = 6 cm και $\hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{Ε}=90^o$.



5. ** Να βρείτε το κέντρο βάρους ομοιογενούς φύλλου λαμαρίνας y του διπλανού σχήματος με ΟΑ = α, ΟΒ = β, $ΒΓ=\frac{α}{2}$, $ΑΔ=\frac{β}{2}$ και $\hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Δ}=\hat{Γ}=90^o$.



6. ** Έστω ομοιογενής κυκλική πλάκα (O, R) σταθερού πάχους. Αφαιρούμε κυκλική πλάκα (K, R/2), όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το κέντρο βάρους της πλάκας που απέμεινε.



57. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και φέρνουμε ΓΕ ⊥ ΑΒ και ΓΖ ⊥ ΑΔ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Gamma}^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AZ}$.

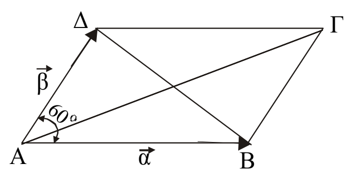
58. * Να βρείτε το έργο που παράγεται όταν ένα αντικείμενο μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, αν η δύναμη που ενεργεί σ' αυτό αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

59. * Για να μετακινηθεί ένα σώμα κατά 20 cm και κατά τη διεύθυνση ΟΑ χρειάζεται να ασκηθεί δύναμη $\vec{F}$= 200N, η οποία σχηματίζει με την ΟΑ γωνία $\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$.

β) Ποια δύναμη πρέπει να ασκηθεί κατά τη διεύθυνση της ΟΑ, ώστε να απαιτείται το ίδιο έργο για τη μετατόπιση του σώματος;

0. ** Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία σχηματίζουν γωνία 60° και επιπλέον ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$.



61. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 1) και $\vec{\beta}$ = (1, -1). Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ αν ισχύουν $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{\alpha}$ και $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{\beta}$.

62. ** Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=13$, $|\vec{\beta}|=14$ και $|\vec{\gamma}|=15$.Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

63. ** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται η υπερβολή $y=\dfrac{6}{x}$ και τα σημεία της Α και Β τέτοια ώστε $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}=-2$ και $\overrightarrow{OB}\cdot\vec{i}=3$, όπου $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x΄x. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$.

64. ** Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|+\left|\vec{\beta}\right|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

65. ** Αν η γωνία των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\phi=\dfrac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$

β) $(3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2$.

66. * Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

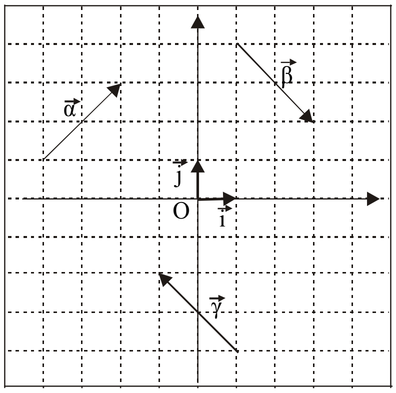
67. * Να βρείτε τον $\lambda \in R$ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda)\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} + 2\vec{j}$ είναι ορθογώνια.

68. * Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = 4\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

9. ** Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.



70. ** Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$

β) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{2}(|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2)$

δ) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ε) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$, τότε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

71. ** Έστω τα συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{ΑΓ} \cdot \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΓΒ} = 0$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ} \cdot (\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΔ}) = 2\overrightarrow{ΑΓ} \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$.

72. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$ = (3, -2), $\vec{β}$ = (1, 2) και $\vec{γ}$ = (-1, 4). Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{δ} = κ\vec{α} + λ\vec{β}, κ, λ \in R$ που είναι κάθετα στο $\vec{γ}$ και έχουν μέτρο 1.

73. ** Έστω $\vec{α}$, $\vec{β}$ δύο διανύσματα με $|\vec{α}| = 4$, $|\vec{β}| = 3$ και η γωνία τους είναι ίση με $\frac{π}{4}$.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{α} + \vec{β}$, $\vec{α} - \vec{β}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γωνία αυτή.

74. ** Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ διανύσματα με $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$. Αν τα διανύσματα $\vec{α} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{β} = -7\vec{u} + 8\vec{v}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

75. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (-2, -1), Β (-2, 3), Γ (x, -1), $x \in R$.

α) Να βρείτε το x έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^{ο}$.

β) Αν ΑΓ = 3, να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου.

76. ** Έστω $\vec{α}$, $\vec{β}$ μη μηδενικά διανύσματα και το διάνυσμα $\vec{γ} = συνω\vec{α} + ημω\vec{β}$, $0 \le ω \le 2π$. Να βρείτε το ω ώστε:

α) Τα διανύσματα $\vec{α}, \vec{γ}$ να είναι ομόρροπα.

β) Τα διανύσματα $\vec{α}, \vec{γ}$ να είναι αντίρροπα.

γ) Το διάνυσμα $\vec{γ}$ να είναι ομόρροπο με το $\vec{α} + \vec{β}$.

δ) Το διάνυσμα $\vec{γ}$ να είναι αντίρροπο με το $\vec{α} + \vec{β}$.

77. ** Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία 60^o. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ να βρείτε τις παραστάσεις

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

γ) $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

δ) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

78. ** Να αποδείξετε ότι για δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

79. ** Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ορθογώνια, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 - (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2$

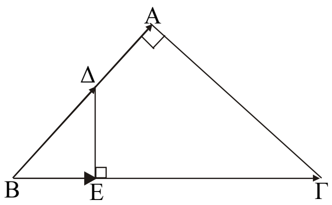
β) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

γ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2$

80. ** Αν θ είναι η γωνία δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{|\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\ |}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$.

81. ** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 4$ και η γωνία των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου με την πλευρά ΑΒ.

2. ** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΕ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΒΔ} \cdot \overrightarrow{ΒΑ}$.



83. ** Να αποδείξετε ότι

α) Το διάνυσμα $(\vec{α} \cdot \vec{γ})\vec{β} - (\vec{α} \cdot \vec{β})\vec{γ}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{α}$.

β) Το διάνυσμα $\vec{β} - \dfrac{(\vec{α} \cdot \vec{β})\vec{α}}{\vec{α}^2}$ είναι κάθετο στο $\vec{α}$.

84. ** Έστω $\vec{α}$, $\vec{β}$ διανύσματα του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι $προβ_{\vec{β}}\vec{α} = \dfrac{(\vec{α} \cdot \vec{β})\vec{β}}{\vec{β}^2}$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα προβολής του διανύσματος $\vec{α}$ = (2, -2) πάνω στο $\vec{β}$ = (3, 2).

85. * Έστω το διάνυσμα $\vec{α} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα του επιπέδου που είναι κάθετα στο $\vec{α}$, έχουν τη διεύθυνση του διανύσματος $3\vec{i} + 2\vec{j}$.

86. ** Έστω τα διανύσματα $\vec{α} = (λ-3)\vec{i} + (λ+3)\vec{j}$, $\vec{β} = (6-3λ)\vec{i} + (λ+4)\vec{j}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το λ ώστε τα $\vec{α}$, $\vec{β}$ να είναι συγγραμμικά.

β) Να βρείτε το λ ώστε τα $\vec{α}$, $\vec{β}$ να είναι ορθογώνια.

87. ** Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = (x, y), x, y \in R$ με μέτρο 1 το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

88. * Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (-2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

β) $(\frac{2}{5}\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 - (\frac{2}{5}\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$.

89. ** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 3\vec{j}$.Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

90. ** Μια ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο Μ του επιπέδου τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στα σημεία Α,Β.

α) Αν ΑΑ΄ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MA}$.

β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ είναι σταθερός αριθμός.

91. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

92. ** Έστω Α,Β δυο σταθερά σημεία με ΑΒ = 3. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

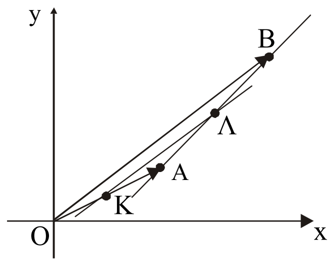
93. ** Έστω Α,Β, σημεία του επιπέδου με ΑΒ = 2α.

α) Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ και Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM}^2 - \alpha^2$.

β) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \kappa$, όπου κ σταθερός αριθμός.

4. ** Τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσης $2\vec{i} + \vec{j}$ και $4\vec{i} + 3\vec{j}$ αντιστοίχως. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των ΟΑ και ΑΒ. Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση

i) της ευθείας ΑΒ, ii) της ευθείας ΚΛ.



95. ** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα xOy δίνονται τα σημεία Α και Β με διανυσματικές ακτίνες $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, τα οποία δεν είναι συγγραμμικά με το Ο. Θεωρούμε και τις διανυσματικές εξισώσεις ε_1: $\vec{r} = (4-\lambda)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και ε_2: $\vec{r} = (1+3\mu)\vec{\alpha} + (\mu - 5)\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις ε_1 και ε_2 είναι εξισώσεις ευθειών.

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

96. * Δίνονται τα σημεία Α(3,-2) και Β(1,-4).

α) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

β) Να βρείτε την Καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

97. ** Σε ένα καρτεσιανό σύστημα ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα ξεκινώντας από το σημείο Α (-1, 1) και παράλληλα στο διάνυσμα $\vec{u} = (12,\ 2)$. Ένα δεύτερο κινητό κινείται επίσης ευθύγραμμα ξεκινώντας από το σημείο Β (2,-1) συγχρόνως με το πρώτο και παράλληλα στο διάνυσμα $\vec{v} = (6, 6)$.

α) Να βρείτε την απόσταση των δυο κινητών πριν την εκκίνηση.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των τροχιών των δυο κινητών.

γ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο θα συναντηθούν.

98. ** Η καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας ε είναι $3x-4y+8=0$. Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε.

99. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α, αν ως σύστημα συντεταγμένων πάρουμε αυτό που ορίζεται από τις διαγωνίους του.

100. ** Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1:\ \vec{r}=2\vec{i}+\lambda(\vec{i}-\vec{j}),\ \lambda\in R, \qquad \varepsilon_2:\ \vec{r}=-2\vec{i}+\mu(3\vec{i}+3\vec{j}), \mu\in R$$

Έστω Α το σημείο τομής τους, Δ το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα xx΄ και Ε το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα x΄x. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των Α, Δ, Ε.

β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους G του τριγώνου ΑΔΕ αν

i) στις κορυφές Α, Δ, Ε τοποθετηθούν ίσα βάρη

ii) στις κορυφές Α, Δ, Ε τοποθετηθούν βάρη 5, 4, 7 αντιστοίχως.

101. * Η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας ε είναι:

$$\vec{r}=3\vec{i}+2\vec{j}+\lambda(-\vec{i}+3\vec{j}), \lambda\in R.$$

Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ε.

102. ** Έστω οι ευθείες $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4-2\lambda \end{cases}$, $\lambda\in R$ και $\begin{cases} x=4-2\mu \\ y=2+5\mu \end{cases}$, $\mu\in R$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που είναι παράλληλα στις ευθείες.

β) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των ευθειών.

103. ** Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(\mu^2, 1)$, $\mu\in R$. Στη συνέχεια να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του $\mu\in R$ τη σχετική θέση των ευθειών ε και δ: $2x - y = 0$.

104. ** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και Α΄ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{M\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{MA}^2$ είναι ευθεία κάθετη στην ΑΑ΄.

105. * Ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, η πλευρά του ΒΓ = α βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x, το δε ύψος τους πάνω στον άξονα y΄y. Να βρείτε:

α) τις διανυσματικές εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

β) το διάνυσμα θέσης της κορυφής Α και την απόσταση του Α από τη ΒΓ.

106. ** Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις $x + \alpha^2 y = \beta$ και $x + y = \alpha\beta^2$, $\alpha, \beta \in R^*$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε διανύσματα που είναι παράλληλα προς τις ευθείες αυτές.

β) Να βρείτε τα α, β, ώστε οι ευθείες ε_1, ε_2 να συμπίπτουν.

107. ** Να βρείτε την απόσταση:

α) του σημείου με διάνυσμα θέσης $4\vec{i} + 6\vec{j}$ από την ευθεία με εξίσωση $\vec{r} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \lambda(-3\vec{i} + 4\vec{j})$.

β) το διάνυσμα που είναι παράλληλο στην παραπάνω ευθεία και έχει μέτρο 3 μονάδες.

108. ** Έστω Α,Β σημεία του επιπέδου με διανύσματα θέσης $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $\vec{r} = \vec{\alpha} + \lambda(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$.

β) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας ΑΒ στις περιπτώσεις

i) $\lambda = -2$, ii) $\lambda = -1$ iii) $\lambda = 1$ και iv) $\lambda = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες τα σημεία Ρ της ΑΒ ικανοποιούν τη σχέση ΑΡ = 2ΡΒ. Στη συνέχεια να βρείτε τα διανύσματα θέσης των σημείων Ρ.

109. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Τα διανύσματα θέσης των κορυφών του Α, Β, Γ είναι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε τις διανυσματικές εξισώσεις των διαμέσων ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ του τριγώνου.

β) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των διαμέσων.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ
ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. α) Πώς ορίζεται η πρόσθεση δυο διανυσμάτων; Να γίνει σχήμα.

β) Γράψτε τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων.

γ) Πώς ορίζεται η διαφορά δυο διανυσμάτων; Να γίνει σχήμα.

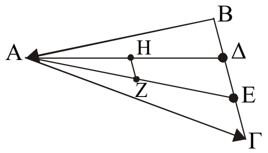
δ) Σχεδιάστε στο σχήμα τις γωνίες των διανυσμάτων

i) $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$,

ii) $-\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$ $\qquad\qquad \vec{\alpha} \qquad \vec{\beta}$

ε) Σχεδιάστε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και βρείτε τα ζεύγη των πλευρών του που ορίζουν ίσα διανύσματα.

Β. Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{y}$ $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta E} = \mathrm{E\Gamma}$ και $\mathrm{AH} = \mathrm{H\Delta}$, $\mathrm{AZ} = \mathrm{ZE}$. α) Υπολογίστε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}, \overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}, \overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}}, \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ συναρτήσει των $\vec{x}$ και $\vec{y}$.



β) Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β

στήλη Α $\qquad$ **στήλη Β**

$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ $\overrightarrow{\mathrm{ZH}}$ $\qquad$ $\dfrac{-\vec{x}+2\vec{y}}{3}$, $\dfrac{-2\vec{x}+\vec{y}}{3}$ $-\vec{y}+2\vec{x}$,

$\dfrac{1}{2}\vec{x}$, $\dfrac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\dfrac{-2\vec{x}+\vec{y}}{6}$ $\dfrac{2\vec{y}-\vec{x}}{6}$, $\dfrac{-\vec{x}-\vec{y}}{6}$

2ο Θέμα

Σε ορθοκανονικό σύστημα Oxy με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δίνονται τα σημεία Α (-2, 1) και Β (1, -3).

α) Να γράψετε τα διανύσματα θέσης των Α και Β με αρχή το Ο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$.

δ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα θέσης του μέσου του $\overrightarrow{AB}$.

ε) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα, το ομόρροπο του $\overrightarrow{AB}$.

2ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. α) Πώς ορίζεται το κέντρο βάρους G δυο σημείων Α και Β του επιπέδου στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη α και β αντιστοίχως.

β) Αν Κ τυχαίο σημείο του επιπέδου και G το κέντρο βάρους δυο σημείων Α και Β με βάρη α και β αντιστοίχως αποδείξτε ότι:

$\alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{KG}$.

Β. Τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσης $2\vec{i} + 3\vec{j}$ και $-3\vec{i} + 5\vec{j}$ αντι-στοί-χως.

α) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του βαρύκεντρου G των Α και Β, αν σε αυτά τοποθετήσουμε βάρη 3 και 4 αντιστοίχως.

β) Βρείτε το διάνυσμα θέσης του βαρύκεντρου G΄ αν κάνουμε εναλλαγή των βαρών.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{BG'}|$.

2ο Θέμα

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ παίρνουμε τα σημεία Α (2, -3), Β (-6, 4) και Γ (-5, 3).

α) Να γράψετε ως συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα διανύσματα θέσης των τριών σημείων αν ως αρχή θεωρήσουμε το Ο.

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα θέσης των σημείων Α και Β δεν είναι συγγραμμικά.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$.

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

ε) Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε $\overrightarrow{O\Gamma} = \kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

3ο ΣΧΕΔΙΟ

Θέμα

Έστω οι ευθείες

ε_1: $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + \lambda(\vec{i} - \vec{j}), \lambda \in R$, ε_2: $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + \mu(3\vec{i} + 3\vec{j}),\ \mu \in R$

και έστω Α το σημείο τομής τους, Δ το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα x΄x και Ε το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα y΄y.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Δ, Ε.

β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) Στις κορυφές Α, Δ, Ε, του τριγώνου τοποθετούται ίσα βάρη. Να βρείτε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΔΕ.

δ) Αν στις κορυφές Α, Δ, Ε τοποθετηθούν βάρη 5, 4, 7 αντιστοίχως, να βρείτε το βαρύκεντρο του ΑΔΕ.

4ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

α) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Β. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Οι κορυφές Α, Β, Γ έχουν διανύσματα θέσης $2\vec{i} + 3\vec{j}$, $-5\vec{i} - \vec{j}$ και $6\vec{i} - 4\vec{j}$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του μέσου Μ της ΒΓ.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.

2ο Θέμα

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \sigma\upsilon\nu\omega\vec{\alpha} + \eta\mu\omega\vec{\beta}$, $0 \le \omega \le 2\pi$. Να βρείτε το ω ώστε:

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ να είναι ομόρροπα.

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ να είναι αντίρροπα.

γ) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

δ) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

5ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. α) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο Α και είναι παράλληλη σ' ένα διάνυσμα $\vec{u}$.

β) Αν Α (x_1, y_1) και $\vec{u}$ = (α, β) να βρείτε τι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το Α (x_1, y_1) και είναι παράλληλη στο $\vec{u}$.

Β. Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}$ = (3,-1). Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της παραπάνω ευθείας καθώς και την αναλυτική της εξίσωση (Καρτεσιανή εξίσωση).

2ο Θέμα

Α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 έχουν εξισώσεις

ε_1: $\vec{r} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \mu(3\vec{i} - \vec{j}),\ \mu \in R$

ε_2: $\begin{matrix} x = -3 - 2t \\ \Updownarrow \\ y = 1 + t \end{matrix}$, $t \in R$ $\qquad$ ε_3: $2x + y - 3 = 0$.

Για τους αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης ισχύει

Α. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ $\qquad$ **Β.** $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_3$ $\qquad$ **Γ.** $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$

Δ. $\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\qquad$ **Ε.** $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$

Β. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

ε_1: $\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \lambda(\vec{i} + 6\vec{j}),\ \lambda \in R$

ε_2: $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + \mu(-\vec{i} + 3\vec{j}),\ \mu \in R$

ε_3: $\vec{r} = -3\vec{i} - \vec{j} + \nu(\vec{i} - 2\vec{j}),\ \nu \in R$

και οι προτάσεις:

Ι. οι ευθείες είναι παράλληλες

ΙΙ. δυο από αυτές τέμνονται κάθετα

ΙΙΙ. τέμνονται ανά δύο

Αληθεύουν οι προτάσεις

Α. Ι **Β.** Ι και ΙΙ **Γ.** ΙΙ και ΙΙΙ **Δ.** ΙΙ ή ΙΙΙ **Ε.** Ι και ΙΙΙ

Γ. Ο φορέας του διανύσματος του σημείου Α (- 2, λ + 1), $\lambda \in R$ τέμνει κάθετα την ευθεία $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} + \mu(i + 2\vec{j}),\ \mu \in R$ όταν ο λ ισούται με:

Α. -2 **Β.** 0 **Γ.** - 5 **Δ.** $\frac{1}{2}$ **Ε.** - $\frac{1}{2}$

Δ. Δίνεται η εξίσωση $\vec{r} = -\vec{i} + 3\vec{j} + t(\lambda\vec{i} + \mu\vec{j}), \lambda,\ \mu \in R$. Δώστε δυο ζεύγη τιμών για τα λ, μ ώστε οι προκύπτουσες ευθείες να είναι κάθετες.

α) λ = …… μ =………

β) λ = …… μ =…….

Ε. Η ευθεία $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + t(\lambda\vec{i} + \mu\vec{j})\lambda,\ \mu \in R$ είναι παράλληλη στην ευθεία y = - x όταν:

Α. λ = μ **Β.** λ = 0 **Γ.** μ = 0 **Δ.** λ = - μ **Ε.** λ = μ = -1

6ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. α) Να εκφράσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ = (x, y) με τη βοήθεια των συντεταγμένων του.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι συντεταγμένες δύο διανυσμάτων των $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, ώστε $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

Β. α) Δίνονται τα σημεία Α (1, 3), Β (2, 4) και Γ (5, 14). Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, \lambda)$ να είναι συγγραμμικά.

γ) Αν $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ποιο είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$;

2ο Θέμα

Α. α) Πώς ορίζεται το βαρύκεντρο G δυο σημείων Α και Β στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη α και β αντιστοίχως;

β) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες x, y του βαρυκέντρου G των σημείων Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) στα οποία έχουν τοποθετηθεί αντιστοίχως βάρη α και β, δίνονται από τους τύπους $x = \dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta}$, $y = \dfrac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\alpha + \beta}$.

Β. α) Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι τα σημεία Α (1, -2) , Β (5, 6) και Γ (-3, -1). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου;

β) Αν στις κορυφές Α,Β,Γ του τριγώνου του ερωτήματος (α) τοποθετήσουμε βάρη 4kp, 5kp και 3kp αντιστοίχως, να δείξετε ότι το κέντρο βάρους του συστήματος βρίσκεται στον άξονα yy΄.

γ) Ποιο θα είναι το κέντρο βάρους του συστήματος αν διπλασιάσουμε τα αντίστοιχα βάρη στις κορυφές Α, Β και Γ;

7ο ΣΧΕΔΙΟ

1ο Θέμα

Α. α) Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

β) Για δυο διανύσματα $\vec{\alpha} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ και $\vec{\beta} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

γ) Για τη γωνία θ δυο μη μηδενικών διανυσμάτων, να αποδείξετε ότι
$$\text{συν}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Β. α) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

β) Αν η γωνία των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 30^o, ποιο είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

2ο Θέμα

Α. α) Να αποδείξετε ότι η διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε, η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}$ και διέρχεται από το σημείο Α με διάνυσμα θέσης $\vec{\alpha}$ είναι $\vec{r} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{u}, \lambda \in R$.

β) Να βρείτε (i) τις παραμετρικές εξισώσεις και (ii) την Καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας ε η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ και διέρχεται από το σημείο Α με διάνυσμα θέσης το $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$.

Β. Δίνεται η ευθεία ε: $y = \frac{3}{4}x + 2$

α) Να γράψετε ένα σημείο που ανήκει στην ευθεία ε.

β) Να γράψετε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ε.

γ) Να βρείτε μια διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Λ	**2. Σ**	**3. Σ**	**4. Σ**
5. Σ	**6. Σ**	**7. Σ**	**8. Σ**
9. Σ	**10. Λ**	**11. Σ**	**12. Λ**
13. Σ	**14. Λ**	**15. Λ**	**16. Λ**
17. Σ	**18. Σ**	**19. Σ**	**20. Σ**
21. Σ	**22. Λ**	**23. Σ**	**24. Σ**
25. Σ	**26. Λ**	**27. Σ**	**28. Σ**
29. Λ	**30. Λ**	**31. Σ**	**32. α) Σ β) Σ**
33. Λ	**34. Σ**	**35. Σ**	**36. Σ**
37. Σ	**38. Λ**	**39. Σ**	**40. Λ**
41. Σ	**42. Λ**	**43. Σ**	**44. Σ**
45. Λ	**46. Σ**	**47. i) Λ ii) Σ iii) Σ**	**48. Λ**
49. Λ	**50. Σ**	**51. Σ**	**52. Σ**
53. Σ	**54. Λ**	**55. Σ**	**56. Λ**
57. Λ	**58. Σ**	**59. Σ**	**60. Σ**
61. Λ	**62. Σ**	**63. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ**	**64. Σ**
65. Σ	**66. Σ**	**67. Σ**	**68. Σ**
69. Σ	**70. Σ**	**71. Σ**	**72. Σ**
73. Σ	**74. Σ**	**75. Λ**	**76. Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Α	**2. Α**	**3. Ε**	**4. Α**
5. Α	**6. Γ**	**7. Β**	**8. Β**
9. Β	**10. Δ**	**11. Β**	**12. Β**
13. Ε	**14. Γ**	**15. Γ**	**16. Ε**
17. Ε	**18. Γ**	**19. Γ**	**20. Γ**
21. Α	**22. Β**	**23. Β**	**24. Γ**
25. Ε	**26. Α**	**27. Ε**	**28. Α**
29. Β	**30. Β**	**31. Β**	**32. Β**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. Είναι Α < Β < Γ και επομένως συνΑ > συνΒ > συνΓ.

2. Γ, G_2, Α, G_1, Β

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

2. i) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ορθογώνια

ii) η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι από 0 έως π/2.

iii) η γωνία των είναι από π/2 έως π.

3. $\lambda \in (-2, 8)$

5. $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

6. $\overrightarrow{B\Delta} = 3\vec{q} - \vec{p}, \overrightarrow{AM} = \vec{p} + \frac{3\vec{q}}{2}$

7. $\overrightarrow{O\Gamma} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{3}{4}\vec{\beta}$

9. Αν Ν μέσο της ΔΓ, τότε $\overrightarrow{BM} = \ \ldots$

10. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

11. $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{O\Delta} = 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 2(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

12. Είναι ίσο με $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$

13. $\overrightarrow{A\Delta} = -8\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 2(-4\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\overrightarrow{B\Gamma}$

14. $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$,

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(3\vec{i} + 8\vec{j})$, $\overrightarrow{ON} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

15. $\frac{4}{3}\vec{v} + 16\vec{u}$

16. $\frac{17}{10}\vec{v} - \frac{22}{10}\vec{u}$

17. i) 0, ii)0

18. i) $\overrightarrow{A\Delta} = \dfrac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{4}$

19. $m = \sqrt{33-2\sqrt{2}}$

20. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = ... = \overrightarrow{\Sigma P}$

21. $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$

22. $\overrightarrow{AM} = +\dfrac{2}{3}\vec{\alpha} + \dfrac{1}{3}\vec{\beta}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\vec{\alpha} + \dfrac{2}{3}\vec{\beta}$

23. i) $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, ii) $2(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, iii) $\vec{\alpha}$

24. i) $\overrightarrow{\Gamma B} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{AB} = -2\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$

ii) $\overrightarrow{ZE} = 6\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma} = \overrightarrow{E\Delta}$

25. Αν $\overrightarrow{MA}$ το ζητούμενο διάνυσμα με Μ (x, y) τότε ισχύει $5x + 2y = 17$ και $x < 3$, $y > 1$.

26. 13, $\sqrt{109}$

27. α) $\left(\dfrac{19}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

28. $x = -\dfrac{13}{7}$, $y = \dfrac{4}{7}$

29. $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\vec{0}$, $-\vec{\gamma}$

30. $\vec{x} = (3-5\mu)\vec{\alpha}$, $\vec{y} = \mu\vec{\beta}$, $\vec{\omega} = \left(-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\mu\right)\vec{\gamma}, \mu \in R$

31. $\overrightarrow{OE} = -2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 4\vec{i} + 4\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$,

$\overrightarrow{E\Delta} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 4\vec{i}$, $\overrightarrow{\Gamma B} = 2\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}$ και

$\overrightarrow{BA} - 2\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}$.

32. Μηδενικό διάνυσμα στις 4 περιπτώσεις και $2\vec{\beta}$ στην τελευταία.

33. $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA}$

34. $\overrightarrow{\Gamma A} = \lambda\overrightarrow{\Gamma B}, \lambda \in R$ που ισχύει πάντοτε

35. x = -2

36. β) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

37. β) $\vec{u} = \frac{1}{\lambda-1}(\vec{\beta}-\vec{\alpha}), \lambda \neq 1$

38. α) $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}}{2}$, γ) $\overrightarrow{\Gamma P} = \overrightarrow{B\Delta}$

39. $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} = 0$, $A\Gamma \perp B\Gamma$.

40. Είναι $\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right)$ και $|\lambda\vec{\alpha}|=|\kappa\vec{\beta}|$.

41. $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Delta M}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{6}{10}(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})$,

$\overrightarrow{\Delta O}=\frac{8}{20}(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

42. $\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{3}$

43. α) Μέσο της διαμέσου ΓΗ.

β) $6\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$, οπότε $4(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{G\Gamma}=0$. κ.τ.λ.

44. $\left(\frac{16}{9},\frac{30}{9}\right)$.

45. (-1, -1)

46. $G\left(\frac{14}{9}\alpha,\frac{8}{9}\alpha\right)$.

47. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}$ (όταν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ).

48. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AM}$ (όταν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ).

50. (9, 10)

51. α) $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, β) $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA}$, Η μέσο της ΒΓ.

52. κ = - 6

53. Ισχύουν $\alpha\overrightarrow{G_1A} + \alpha\overrightarrow{G_1B} + \alpha\overrightarrow{G_1\Gamma} = \vec{0}$

$$\beta\overrightarrow{G_2A'} + \beta\overrightarrow{G_2B'} + \beta\overrightarrow{G_2\Gamma'} = \vec{0}$$

και $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \alpha\overrightarrow{G\Gamma} + \beta\overrightarrow{GA'} + \beta\overrightarrow{GB'} + \beta\overrightarrow{G\Gamma'} = \vec{0}$

οπότε $3\alpha\overrightarrow{GG_1} + 3\beta\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ κ.τ.λ.

54. Αποτελείται από 2 ορθογώνια ΑΕΔΚ, ΟΒΓΚ με εμβαδά 36, 72 και βαρύκεντρα $G_1(3, 9)$ και $G_2(6, 3)$ αντιστοίχως.

55. $\left(\frac{5\alpha}{12}, \frac{5\beta}{12}\right)$

56. $\left(-\frac{R}{6}, 0\right)$

57. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

58. $\vec{F}\cdot\vec{V} = 4$

59. α) 2000 β) $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{OA}}\vec{F} = 100N$

60. $\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

61. Να βρείτε τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

62. Να πολλαπλασιάσετε την $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ με $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

63. Αν $(x_1,\ y_1)$ και $(x_2,\ y_2)$ τα Α και Β τότε $(x_1,\ y_1)\cdot(1,0)=-2$ και $(x_2,\ y_2)\cdot(1,0)=3$, οπότε $x_1 = -2$, $y_1 = -3$ και $x_2 = 3$, $y_2 = 2$ και $\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=5$

65. Να υψώσετε στο τετράγωνο, οπότε συνφ = 1 .

66. $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=0$

67. $\lambda=2$, $\lambda=1$

68. $\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$

70. Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$.

71. Στη δοθείσα ισότητα εκφράζουμε τα $\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$ με τις διανυσματικές ακτίνες ως προς το Α.

72. $(\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=0$ και $|\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$ κτλ.

73. α) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}$

β) Η γωνία των διαγωνίων του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

74. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

75. α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ β) $B\Gamma = |\overrightarrow{B\Gamma}|$

76. α) 0 ή 2π,   β) π,   γ) $\dfrac{\pi}{4}$,   δ) $\dfrac{5\pi}{4}$

78. α) Να λάβετε υπόψιν ότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu\phi \le 1$. Ομόρροπα, αντίρροπα.

79. Να λάβετε υπόψιν ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

80. $\eta\mu^2\theta = 1-\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1-\left(\dfrac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}}\cdot\sqrt{\beta_1^{\,2}+\beta_2^{\,2}}}\right)^2$ κτλ.

81. $\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})}{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}|\right|}$ κτλ.

82. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}$

83. Να πάρετε κάθε φορά το εσωτερικό γινόμενο.

84. Έστω $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = x \cdot \vec{\beta} = x \cdot \overrightarrow{\text{ΟΒ}}$

Όμως $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΓ}} = 0$, $\vec{\beta} \cdot (\overrightarrow{\text{ΟΓ}} - \overrightarrow{\text{ΟΑ}}) = 0$,

$\vec{\beta} \cdot (x\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = 0$, $x \cdot \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $x = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}$,

$x \cdot \vec{\beta} = \dfrac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$ άρα $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \dfrac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$.

85. $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 0$

86. α) $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 6 - 3\lambda \\ \lambda + 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$ β) $(\lambda - 3)(6 - 3\lambda) + (\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$

87. Πρέπει $x^2 + y^2 = 1$ και $x + 2y = 0$.

89. Έστω $\vec{\alpha} = \vec{\nu} + \vec{p}$ με $\vec{\nu} \,//\, \vec{\beta}$ και $\vec{p} \perp \vec{\beta}$. Τότε $\vec{\nu} = \kappa\vec{\beta}$ και έχουμε

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (\vec{\nu} + \vec{p}) \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\nu} \cdot \vec{\beta}$, $2 - 21 = \kappa + 9\kappa$, $\kappa = -\dfrac{19}{10}$ κτλ.

90. α) $\overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΜΒ}} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\text{ΜΑ}}}\overrightarrow{\text{ΜΑ}'} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΜΑ}'}$

β) $\overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΜΒ}} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΜΑ}'} = (\overrightarrow{\text{ΟΑ}} - \overrightarrow{\text{ΟΜ}}) \cdot (\overrightarrow{\text{ΟΑ}'} - \overrightarrow{\text{ΟΜ}}) =$

$= (\overrightarrow{\text{ΟΜ}} - \overrightarrow{\text{ΟΑ}}) \cdot (\overrightarrow{\text{ΟΜ}} + \overrightarrow{\text{ΟΑ}}) = \overrightarrow{\text{ΟΜ}}^2 - R^2$

91. Αν Δ το μέσον της ΒΓ, τότε η ισότητα γράφεται $2\overrightarrow{\text{ΑΔ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΜ}} = 0$ κτλ.

92. Αν $\text{ΜΝ} \perp \text{ΑΒ}$, τότε $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΝ}} = -2$, $\left(\overrightarrow{\text{ΑΝ}}\right) = \dfrac{2}{3}$ κτλ.

93. α) Να χρησιμοποιήσετε διανυσματικές ακτίνες ως προς Ο.

β) $\overrightarrow{OM}^2 = \alpha^2 + \kappa$ κτλ.

94. α) $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$ κτλ. β) $\vec{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

95. α) ε_1: $\vec{r} = 4\vec{\alpha} + \lambda(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, ε_2: $\vec{r} = (\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) + \mu(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

96. i) $\vec{r} = (3\vec{i} - 2\vec{j}) + \lambda(2\vec{i} + 2\vec{j})$

ii) $y + 2 = \frac{-4+2}{1-3}(x-3)$ κτλ.

97. α) $|\overrightarrow{AB}|$ β) $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OB} + \mu\vec{v}$ κτλ. γ) (5, 2).

98. $y = \frac{3}{4}x + 2$, ένα σημείο της ε είναι το (4, 5) και το $\lambda = \frac{3}{4}$, άρα παράλληλη στο $\vec{u}$ (4, 3) . Άρα $\vec{r} = (4\vec{i} + 5\vec{j}) + \mu(4\vec{i} + 3\vec{j})$.

99. $x + y = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, $x + y = -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, $-x + y = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, $x - y = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

100. α) Α (0, 2) , Δ (- 2, 0) , Ε (2, 0) , β) 4 , γ) i) G (0, 2/3) ii) G $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$

101. $x = 3 - \lambda$, $y = 2 + 3\lambda$, $\lambda \in R$

102. α) $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (2, -5)$ β) $\alpha = 4$ και $\beta = 2$.

107. α) $\dfrac{43}{10}$ β) $\pm 3\,(-\dfrac{3}{5}\vec{i} + \dfrac{4}{5}\vec{j})$.

108. α) Η ευθεία διέρχεται από το Α με διάνυσμα θέσης $\vec{\alpha}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

β) Να γίνει αντικατάσταση του λ με τις τιμές του στη διανυσματική εξίσωση.

γ) $\lambda = 2$ ή $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

109. α) $\vec{r} = \vec{\alpha} + \lambda\left(\dfrac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2} - \vec{\alpha}\right)$, $\vec{r} = \vec{\beta} + \lambda\left(\dfrac{\vec{\gamma}+\vec{\alpha}}{2} - \vec{\beta}\right)$, $\vec{r} = \vec{\gamma}4\lambda\left(\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2} - \vec{\gamma}\right)$

β) $\vec{\alpha} + \lambda\left(\dfrac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2} - \vec{\alpha}\right) = \vec{\beta} + \lambda\left(\dfrac{\vec{\gamma}+\vec{\alpha}}{2} - \vec{\beta}\right)$, οπότε $\lambda = \dfrac{2}{3}$ κτλ.