

Κεφάλαιο 2°

Όρια - Συνέχεια

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να μπορεί να βρίσκει απο τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης
 - ✓ το πεδίο ορισμού της
 - ✓ το σύνολο τιμών της
 - ✓ την τιμή της σε ένα σημείο x_0 .
2. Να γνωρίζει τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων.
3. Να μπορεί να βρίσκει το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων.
4. Να γνωρίζει την έννοια της συνάρτησης "1-1", τις βασικές ιδιότητες της και να κατανοήσουν την διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης μιας απλής συνάρτησης. Να γνωρίζει, επιπλέον, οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.
5. Να μπορεί να εκφράζει, με τη βοήθεια συνάρτησης, τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι τιμές δύο μεγεθών σε διάφορα προβλήματα.
6. Να μπορεί να βρίσκει το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
7. Να γνωρίζει τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζει τα όρια απλών συναρτήσεων.
8. Να μπορεί να διαπιστώνει την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση.
9. Να μπορεί να υπολογίζει τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
10. Να γνωρίζει τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμι-

κής συνάρτησης και τα όρια τα σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές.

11. Να γνωρίζει την έννοια της ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.
12. Να γνωρίζει την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
13. Να αναγνωρίζει την συνέχεια μιας συνάρτησης f σε σημείο ή διάστημα, από τη γραφική της παράσταση.
14. Να γνωρίζει τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο καθώς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
15. Να γνωρίζει τα βασικά θεωρήματα: Bolzano, ενδιάμεσης τιμής και μέγιστης - ελάχιστης τιμής, όταν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό διάστημα και να μπορεί να τα εφαρμόζει, στην εύρεση του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης, στην εύρεση του συνόλου τιμών και του πλήθους των ριζών συναρτήσεων των οποίων είναι γνωστά τα διαστήματα μονοτονίας και το είδος της μονοτονίας.

ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων): Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v, v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \text{ με } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0, v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 2.$$

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $v \in \mathbb{N}^*$	Αν v άρτιος: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = +\infty$ Αν v περιττός: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x, όπου $v \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-v} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} = 0$
Εκθετικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$
Λογαριθμικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = -\infty$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν και μόνον αν, ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της), αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\eta x$ είναι συνεχείς στο \mathbb{R} .
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , $\ln x$, $\log x$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, τότε και οι συναρτήσεις: $f + g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$), $|f|$, $\sqrt[k]{f}$ ($f(x) \geq 0$), $\kappa \in \mathbb{N}$ με $\kappa \geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

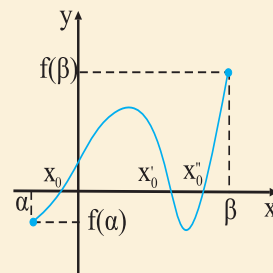
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν: • η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

$$\bullet f(a) \cdot f(\beta) < 0$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a, β) .

**Γεωμετρική ερμηνεία**

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των a και β (σχ.1).

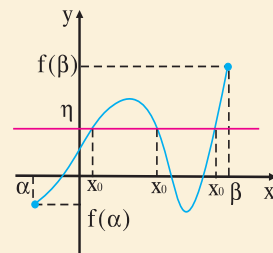
Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν ισχύουν ότι:

• η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

$$\bullet f(a) \neq f(\beta)$$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$, $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.



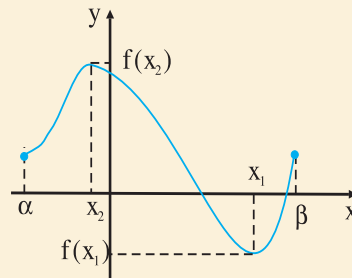
Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία $y = n$ όπου n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β .

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m , δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ οπότε:

$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

**Ευρεση συνόλου τιμών**

- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha, \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α, β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$
- Αν τέλος, η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι: $f(A) = \left[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$ ή $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta) \right]$.
Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha) \right]$ ή $\left[f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$.



ΘΕΩΡΙΑ 1 Δικαιολογήστε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

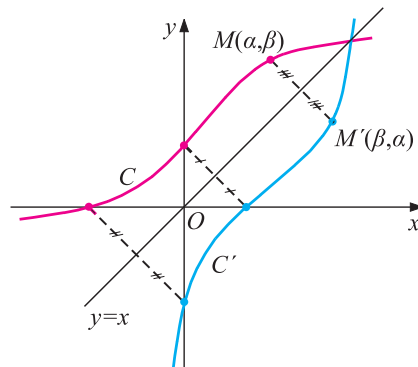
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε μια 1-1 συνάρτηση f και ας υποθέσουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.

Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,

αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επομένως:



Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (βλ. σχήμα).

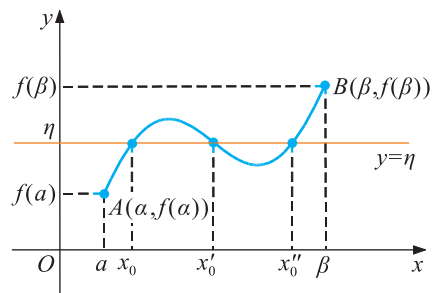
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

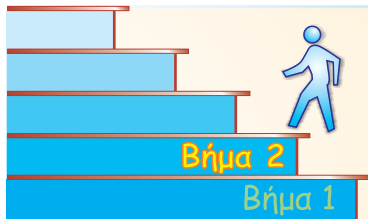
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \quad \text{και} \quad g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.





Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

A. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 1.2 Συναρτήσεις

§ 1.3 Μονότονες-Αντίστροφη Συνάρτηση

-Πεδίο ορισμού	σελ. 134, εφαρμογή σελ. 145, άσκηση 1,5 σελ. 147, άσκηση 2,3,4 (B' ομάδα)
-Γραφική παράσταση	σελ. 140, εφαρμογή σελ. 145, άσκηση 2,3,6
-Ισότητα συναρτήσεων	σελ. 146, άσκηση 7
-Πράξεις με συναρτήσεις	σελ. 146, άσκηση 8
-Σύνθεση συναρτήσεων	σελ. 143-144, εφαρμογή-σχόλια σελ. 146, άσκηση 11,12 σελ. 148, άσκηση 6,7,8,9
-Μονοτονία συνάρτησης	σελ. 156, άσκηση 1 σελ. 157, άσκηση 4

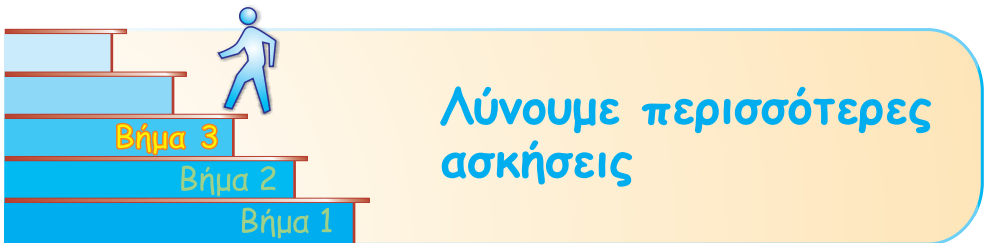
-1-1

-Αντίστροφη συνάρτηση	σελ. 155, εφαρμογή σελ. 156, άσκηση 2
-----------------------	--

§ 1.4-1.7 Όρια

-Ιδιότητες ορίου	σελ. 174, άσκηση 2 σελ. 176, άσκηση 4 σελ. 182, άσκηση 4 σελ. 186, άσκηση 1
------------------	--

-Μορφή $\frac{0}{0}$	σελ. 175, άσκηση 4 σελ. 175-176, άσκηση 1 (B' ομάδα)
-Άσκήσεις με απόλυτα	σελ. 176, άσκηση 2 σελ. 187, άσκηση 1 (B' ομάδα)
-Κριτήριο παρεμβολής	
-Τριγωνομετρικά όρια	σελ. 175, άσκηση 6,7
-Μορφή $\frac{\alpha}{0}$	σελ. 181, άσκηση 1,2 σελ. 182, άσκηση 2
-Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$	σελ. 187, άσκηση 3i, iii (A' ομάδα)
-Μορφή $(+\infty) - (+\infty)$	σελ. 187, άσκηση 3ii (A' ομάδα)
-Όρια εκθετικής-λογάριθμοι	
-Παραμετρικές ασκήσεις	σελ. 175, άσκηση 9 σελ. 185, άσκηση 3 σελ. 187, άσκηση 1,2,3 (B' ομάδα)
-Γενικές ασκήσεις	
§ 1.8 Συνέχεια συνάρτησης	
-Συνέχεια	σελ. 198, άσκηση 4,5 σελ. 199, άσκηση 2,3 (B' ομάδα)
-Θεώρημα Bolzano	σελ. 198-199, άσκηση 6,7,8,9 (A' ομάδα) σελ. 199, άσκηση 4 (B' ομάδα) σελ. 200, άσκηση 5,6,7,8
-Ενδιάμεσων τιμών	
-Σύνολο τιμών	σελ. 199, άσκηση 10
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 201-203



1. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

Λύση:

Για κάθε $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} &= \frac{(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})} = \\ &= \frac{\sqrt{x^4+1} - (x^2+1)}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})} = \frac{\sqrt{x^4+1} - (x^2+1)}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})} \cdot \frac{\sqrt{x^4+1} + x^2+1}{\sqrt{x^4+1} + x^2+1} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^4+1})^2 - (x^2+1)^2}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^4+1} + x^2+1)} = \\ &= \frac{x^4+1 - x^4 - 2x^2 - 1}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^4+1} + x^2+1)} = \\ &= \frac{-2}{(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^4+1} + x^2+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^4+1} + x^2+1)} = \\ &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1+2\alpha x)}{x^2}$.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \beta$.

Λύση:

Η $f(x)$ ορίζεται για $x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Επίσης: } f(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - (1+2\alpha x)}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + (1+2\alpha x)}{\sqrt{1+x} + (1+2\alpha x)} = \\ &= \frac{1+x - (1+2\alpha x)^2}{x^2(\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x)} = \frac{1+x - 1 - 4\alpha x - 4\alpha^2 x^2}{x^2(\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x)} = \\ &= \frac{x(1-4\alpha-4\alpha^2 x)}{x^2(\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x)}. \quad \text{Δηλαδή: } f(x) = \frac{1-4\alpha-4\alpha^2 x}{x(\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } xf(x) \cdot (\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x) = -4\alpha^2 x + 1 - 4\alpha$$

$$\text{Τότε: } \lim_{x \rightarrow 0} [xf(x) \cdot (\sqrt{1+x} + 1+2\alpha x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [-4\alpha^2 x + 1 - 4\alpha]$$

$$\text{ή } 0 \cdot \beta \cdot 2 = 0 + 1 - 4\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{Από τη σχέση (1), για } \alpha = \frac{1}{4} \text{ έχουμε: } f(x) = \frac{-\frac{1}{4}x}{x\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x\right)}$$

$$\text{Άρα: } \beta = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

3. Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν τα επόμενα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|zf(x) - 4| - 4}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|zf(x) + 2| - 2}{x-2}, \text{ υπάρχουν και είναι πραγματικοί}$$

αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Λύση:

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{|zf(x) - 4| - 4}{x} \quad (1)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση $|zf(x) - 4|$ είναι επίσης συνεχής, αφού $|zf(x) - 4| = \sqrt{(xf(x) - 4)^2 + y^2 f^2(x)}$ όπου $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Από την (1) παίρνουμε: $|zf(x) - 4| = xg(x) + 4$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} |zf(x) - 4| = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 4) = 4$$

Άρα $|zf(0) - 4| = 4$ (2), αφού η $|zf(x) - 4|$ είναι συνεχής στο 0.

Αν $z = \alpha + \beta i$ η σχέση (2) γράφεται:

$$\sqrt{(\alpha f(0) - 4)^2 + f(0)^2 \beta^2} = 4 \Leftrightarrow f(0)[\alpha^2 f(0) - 8\alpha + f(0)\beta^2] = 0$$

Τότε $(f(0) = 0, \text{ άρα } \xi = 0)$ ή $\alpha^2 f(0) - 8\alpha + f(0)\beta^2 = 0$ οπότε: $f(0) = \frac{8\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ (3)

4. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \frac{x^2}{f^2(x) + 1}$, για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \frac{|x^2|}{f^2(x) + 1} \leq x^2$ (αφού $f^2(x) + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

Όμως: $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (1)

Επίσης από την σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $f(0) = \frac{0^2}{f^2(0) + 1} = 0$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

5. Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ με $|\alpha| < 1$ συνεχής και τέτοια ώστε:

$$f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 2 = 2(f(\alpha) - f(\beta))$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = x_0^2$

Λύση:

Η σχέση της υπόθεσης γίνεται:

$$f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 2 = 2f(\alpha) - 2f(\beta) \Leftrightarrow f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 1 + 1 - 2f(\alpha) + 2f(\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(\alpha) - 1)^2 + (f(\beta) + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ \text{και} \\ f(\beta) = -1 \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2, x \in [\alpha, \beta]$

Για την g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha^2 = 1 - \alpha^2 > 0$, αφού $|\alpha| < 1$
- $g(\beta) = f(\beta) - \beta^2 = -1 - \beta^2 = -(\beta^2 + 1) < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta) : g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2$$

6. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(0) > 1$ ώστε:

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Λύση:

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbf{R} : f^2(x) - 2f(x) = x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = x^2 + 1 \neq 0 \quad (1)$$

Επομένως και $f(x) - 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1, x \in \mathbf{R}$:

- Για τη g παρατηρούμε ότι:
- g συνεχής στο \mathbf{R}
 - $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} και επειδή $g(0) = f(0) - 1 \stackrel{\text{υποθ.}}{>} 0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλ. $f(x) - 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε λόγω και της (1) έπεται ότι: $f(x) - 1 = \sqrt{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0) > 0$ και $f(x) \neq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: **i.** $f(x) > x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **ii.** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

Λύση:

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Για τη g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο \mathbb{R} ,
- $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} και επειδή $g(0) = f(0) \stackrel{\text{υποθ.}}{>} 0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) - x^2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) > x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Είναι φανερό ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x^2 \geq 0$ και άρα $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x^2}$, για

κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Όμως: $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty \text{ (αφού } \frac{1}{f(x)} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $x < f(x) < x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Λύση:

Αρκεί προφανώς να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός κ είναι τιμή της f .

Δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = \kappa$

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\kappa - 1, \kappa] \subset \mathbb{R}$

$$\bullet g(\kappa - 1) = f(\kappa - 1) - \kappa \stackrel{\text{υποθ.}}{<} \kappa - 1 + 1 - \kappa = 0$$

$$\bullet g(\kappa) = f(\kappa) - \kappa \stackrel{\text{υποθ.}}{>} 0$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

υπάρχει $x_0 \in (\kappa - 1, \kappa) \subset \mathbb{R} : g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \kappa = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \kappa$ ο.ε.δ.

9. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(0) = 0$ και $\frac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}^*$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση:

Από τη σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $(f(x) - x)(f(x) + x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ή $f^2(x) - x^2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, δηλ. $f^2(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Οπότε $\sqrt{f^2(x)} < \sqrt{x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Άρα $|f(x)| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ή ισοδύναμα $-|x| < f(x) < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{Όμως: } -\lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (1)

Όμως εξ' υποθέσεως είναι $f(0) = 0$ (2)

Εκ των (1) και (2) έπεται ότι η f είναι συνεχής στο 0.

10. Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in [a, \beta] \text{ τέτοιο ώστε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 + 1} \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

Λύση:

Η f ως συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ θα παίρνει μέγιστη τιμή σ' αυτό (θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής). Δηλαδή θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [a, \beta] \text{ ή ισοδύναμα } f(x) - f(x_0) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

$$\text{Οπότε } \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 + 1} \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση “1-1” και τέτοια ώστε $f(2) < f(1) < f(3)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Λύση:

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Από τις υποθέσεις του προβλήματος έπεται ότι:

- f συνεχής στο $[2, 3] \subset \mathbb{R}$
- $f(2) \neq f(3)$
- $f(1) \in (f(2), f(3))$

Αρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει

$$x_0 \in (2, 3): f(x_0) = f(1) \Leftrightarrow x_0 = 1, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

12. Έστω f συνεχής στο \mathbb{R} και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x+2) + f(x) = 0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) \neq f(1)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+1)$.

Λύση:

θεωρούμε $g(x) = f(x) - f(x+1)$, που είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύουν:

$$g(0) = f(0) - f(1) \text{ και } g(2) = f(2) - f(3). \text{ Όμως για } x=0 \text{ από την (1) έχουμε:}$$

$$f(2) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(2) = -f(0). \text{ Για } x=1 \text{ έχουμε από την (1):}$$

$$f(3) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(3) = -f(1)$$

$$\text{Άρα } g(2) = -f(0) + f(1) = -(f(0) - f(1)) \text{ και } g(0) \cdot g(2) = -(f(0) - f(1))^2 < 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ξ στο $(0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) - f(\xi+1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = f(\xi+1)$$

13. Αν f συνεχής στο $[0,4]$, τότε υπάρχει:

$$\xi \in (0,4) : 9f(\xi) = 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

Λύση:

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο δηλ.

υπάρχουν $x_\epsilon, x_\mu \in [0,4]$ τέτοια ώστε: $f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq f(x_\mu)$, $x \in [0,4]$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} f(x_\epsilon) \leq f(1) \leq f(x_\mu) \\ f(x_\epsilon) \leq f(2) \leq f(x_\mu) \\ f(x_\epsilon) \leq f(3) \leq f(x_\mu) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x_\epsilon) \leq 2f(1) \leq 2f(x_\mu) \\ 3f(x_\epsilon) \leq 3f(2) \leq 3f(x_\mu) \\ 4f(x_\epsilon) \leq 4f(3) \leq 4f(x_\mu) \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$9f(x_\epsilon) \leq 2f(1) + 3f(2) + 4f(3) \leq 9f(x_\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_\epsilon) \leq \frac{2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{9} \leq f(x_\mu)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi) = 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

14. Αν $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ είναι $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$ να

δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3}$.

Λύση:

Με $x_1 = x$, $x_2 = x_0$ έχουμε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow -|x - x_0|^2 \leq f(x) - f(x_0) \leq |x - x_0|^2 \quad \text{και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [-|x - x_0|^2] = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^2 = 0, \text{ συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \text{ Επειδή το } x_0 \text{ είναι τυχαίο στοιχείο του}$$

\mathbf{R} η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{R}$. Ομοίως με $x_1 = x$, $x_2 = -3$ έχουμε:

$$|f(x) - f(-3)| \leq |x+3|^2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} \right| \leq |x+3|$$

$$\Leftrightarrow -|x+3| \leq \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} \leq |x+3| \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow -3} [-|x+3|] = \lim_{x \rightarrow -3} |x+3| = 0 \text{ συμπε-}$$

$$\text{ραίνουμε ότι: } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = 0.$$

15. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $2f^3(x) + f(x) = kx$, $k > 0$

α. Να δειχθεί ότι η f είναι “1-1”.

β. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Λύση:

α. Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$

$$\text{Επομένως: } \begin{cases} 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2) \\ f(x_1) = f(x_2) \end{cases} \text{ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:}$$

$$2f^3(x_1) + f(x_1) = 2f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow kx_1 = kx_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

που σημαίνει ότι η f είναι 1 - 1.

β. Απο τις σχέσεις: $2f^3(x) + f(x) = kx$ και $2f^3(x_0) + f(x_0) = kx_0$ με αφαίρεση

$$\text{κατά μέλη, παίρνουμε: } 2[f^3(x) - f^3(x_0)] + [f(x) - f(x_0)] = k(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + [f(x) - f(x_0)] = k(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - f(x_0)][2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1] = k(x - x_0) \quad (1)$$

αλλά $2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) > 0$ (τριώνυμο ως προς το $f(x)$ με αρνητική διακρίνουσα). Οπότε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{k(x - x_0)}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1}$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{k(x - x_0)}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1} \right| \leq \frac{k|x - x_0|}{1} = k|x - x_0| \Leftrightarrow$$

$$-k|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq k|x - x_0|$$

$$\text{και επειδή } \lim_{x \rightarrow x_0} [-k|x - x_0|] = \lim_{x \rightarrow x_0} [k|x - x_0|] = 0$$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 θα είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Απο τη σχέση (1) έχουμε:

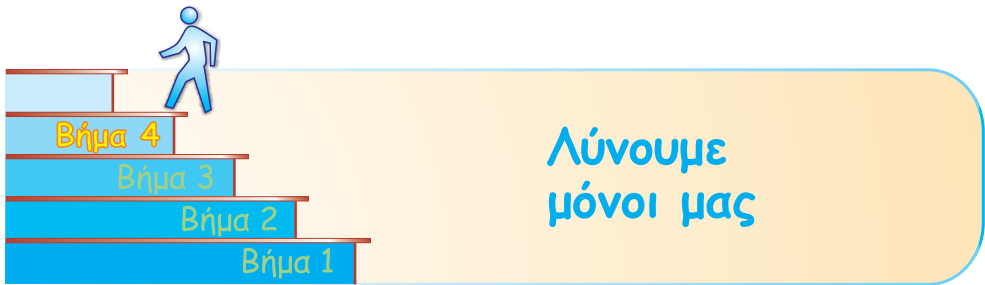
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1} \quad (2)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο x_0 το 2^ο μέλος της (2) μας δίνει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1} &= \\ &= \frac{k}{2f^2(x_0) + 2f(x_0)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 1} = \frac{k}{6f^2(x_0) + 1} \end{aligned}$$

Άρα από (2) έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k}{6f^2(x_0) + 1}$ (για $x_0 = 2$ έχουμε:)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{k}{6f^2(2) + 1}$$



1. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$, $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(2x^2 + x - 10)] = 3$, να βρεθεί το :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + 2\beta, & x \leq 1 \\ x^2 + \beta x + 2\alpha, & x > 1 \end{cases}$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

και η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $A(2,2)$ να βρεθούν οι τιμές των α και β .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Να προσδιοριστούν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{9x^2 + 3x + 4} + \alpha x + \beta] = \frac{1}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Να προσδιοριστεί ο a ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 5} + ax$ να έχει όριο καθώς $x \rightarrow -\infty$ και να βρεθεί η τιμή του ορίου.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Έστω $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$\alpha.$ $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ και $\beta.$ $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R} : f^3(x) + 3f(x) = 2x + 2003$

Δείξτε ότι:

α. η f είναι “1-1”,

β. υπάρχει η f^{-1} την οποία να βρείτε.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Δείξτε ότι:

α. Αν f, g είναι “1-1” τότε η $g \circ f$ είναι “1-1”

β. Αν f, g είναι αντιστρέψιμες τότε η $g \circ f$ είναι αντιστρέψιμη και

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι:

α. $f(1)=1$

β. η συνάρτηση $g(x) = 1 + x(1 - f(x))$ δεν είναι “1-1”

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

13. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} , τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = x$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

14. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 1$ να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xf(x) + x}{2x + xf(x)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3}{|x - 1|} = \gamma$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ και το $a \in \mathbb{R}$ αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \quad \text{και} \quad f(0) = 1$$

$$\text{όπου} \quad f(x) = \frac{x^2 + ax - 1}{P(x)}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x + \beta$ βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

έτσι ώστε: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)f(x) \geq \eta\mu(x-1)$$

α. Βρείτε το $f(1)$.

β. Αν $g(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha x} \sqrt{1-\beta+\beta x} - f(1)}{x-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

19. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 2$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 2003$

α. Βρείτε το $f(2)$. β. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

20. Δίνονται $f, g : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, με $f([a, \beta]) = g([a, \beta])$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε $(g \circ f)(\xi_1) - (f \circ g)(\xi_2) = \xi_1 - \xi_2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x + (a^2 - a)x - a^2$ με $0 < a \neq 1$, $A_f = \mathbb{R}$

- α. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.
- β. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια μονότονη.
- γ. Λύστε την εξίσωση $a^x + (a^2 - a)x = a^2$.
- δ. Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

22. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = a^x$, $g(x) = -\frac{1}{x}$ με $0 < a < 1$.

α. Μελετήστε τις f , g ως προς τη μονοτονία.

β. Δείξτε ότι οι C_f , C_g έχουν μοναδικό σημείο τομής.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

23. Δίνεται συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$ τα οποία είναι σημεία τομής της C_f με την διχοτόμο της 1^{ης} γωνίας των αξόνων. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f(\xi) - \beta}{\xi - a} = \frac{f(\xi) - a}{\xi - \beta}$$



Βήμα 5

Βήμα 4

Βήμα 3

Βήμα 2

Βήμα 1

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1^ο

A.α. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $[α,β]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$ αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = \eta$

(Μονάδες 4)

β. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{1}{x}$ όταν $x \in (0,1)$

(Μονάδες 2)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....


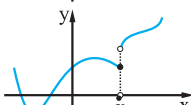
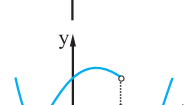
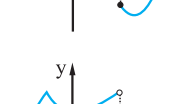
.....

.....

.....

.....

B1. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό ώστε καθένα από τα σχήματα της πρώτης στήλης να ταιριάζει με τις κατάλληλες σχέσεις της δεύτερης στήλης.

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>A. </p>	<p>1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$</p>
<p>B. </p>	<p>2. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$</p>
<p>Γ. </p>	<p>3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$</p>
<p>Δ. </p>	<p>4. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$</p>

A	B	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

B2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν για μια συνεχή συνάρτηση στο (α, β) ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty,$$

τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) .

(Μονάδες 3)

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και $f(-1)=2$, $f(2)=5$, τότε υπάρχει πραγματικός $x_0 \in (-1, 2)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \pi$.

(Μονάδες 3)

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$, τότε το πεδίο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty)$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2^ο

A. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, \beta]$ και τέτοιες ώστε $f(a) < g(a)$, $f(\beta) > g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες με εξισώσεις $y = f(x)$, $y = g(x)$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$

(Μονάδες 15)

B. Σε ποιά από τα παρακάτω διαστήματα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει σίγουρα λύση της εξίσωσης $x^3 = x + 1$

- A. $(-2, -1)$ B. $(1, 2)$ Γ. $(-1, 0)$
 Δ. $(0, 1)$ E. $(2, 3)$

(Μονάδες 10)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

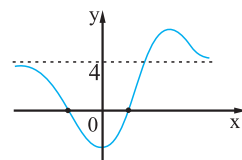
Θέμα 3^ο

A. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + \alpha x} - \beta x) = 1$

(Μονάδες 15)

B. Με βάση το διπλανό σχήμα το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x)}$ είναι ίσο με:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ Γ. 0 Δ. 2 E. $\frac{1}{2}$

*(Μονάδες 10)*

