

Προαγωγικές εξετάσεις Β Λυκείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 5

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$,

Μονάδες 10

B. Έστω \vec{a}, \vec{v} δυο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OM} = \vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του \vec{OA} και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.

Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ $(\vec{OM}_1 = \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v})$ *Μονάδες 10*

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι αν ο a είναι ακέραιος, τότε και ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο a είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2 : y = \frac{4}{3}x - 8$

A) να δείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Μονάδες 8

B) να δείξετε ότι το σημείο $A(0, -3)$ ανήκει στην ε_1

Μονάδες 7

Γ) να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται κύκλος $C : x^2 + y^2 = 10$ και σημείο $A(4, 2)$

A) να δείξετε ότι το σημείο $A(4, 2)$ δεν ανήκει στον κύκλο C

Μονάδες 5

B) Να βρεθούν οι εφαπτομένες που άγονται από το σημείο A στον κύκλο C

Μονάδες 10

Γ) Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων

Μονάδες 10