ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΑΘΗΝΑ 2000

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία:	Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Συντονιστές:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed. Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος Μακρής Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος
Συγγραφική ομάδα:	Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε. Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Για το τεύχος αυτό:	
	Α Ν Α Λ Υ Σ Η
Συντονιστής:	Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος
Συγγραφική ομάδα:	Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ   Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

Κεφάλαιο 3ο: ***Ολοκληρωτικός Λογισμός***

Φωτογραφία εξωφύλλου: Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Επιμέλεια εξωφύλλου: Σ. Βογιατζόγλου, Π. Βουργάνας, Η. Γεωργακάκος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τα τελευταία βιβλία αξιολόγησης των μαθητών, που πρόκειται να δημοσιευθούν στις αρχές του 2000, ολοκληρώνεται μια σημαντική προσπάθεια του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας, στόχος της οποίας ήταν η εκπόνηση και διάδοση νέων μεθόδων αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου. Στο πλαίσιό της εκπονήθηκαν τα τρία τελευταία χρόνια δεκάδες βιβλίων που καλύπτουν το σύνολο σχεδόν των μαθημάτων, τα οποία διδάσκονται στο Λύκειο. Τα βιβλία αυτά περιέχουν οδηγίες μεθοδολογίας σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών, παραδείγματα ερωτήσεων διαφόρων τύπων, υποδείγματα εξεταστικών δοκιμασιών, θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών και άλλα χρήσιμα στοιχεία για τους εκπαιδευτικούς.

Το έντυπο αυτό υλικό συνοδεύτηκε από την παραγωγή ανάλογου ηλεκτρονικού υλικού, από τη δημιουργία Τράπεζας Θεμάτων και από πολυάριθμες επιμορφωτικές δραστηριότητες σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών.

Η παραπάνω προσπάθεια δεν είχε σκοπό να επιβάλει ένα συγκεκριμένο τρόπο αξιολόγησης ούτε να αυξήσει το φόρτο εργασίας διδασκόντων και διδασκομένων, όπως ισχυρίστηκαν ορισμένοι. Επιδίωξε να ενημερώσει τους καθηγητές για τις σύγχρονες εξεταστικές μεθόδους, να τους δώσει πρακτικά παραδείγματα εφαρμογής τους, να τους προβληματίσει γύρω από τα θέματα αυτά και να τους παράσχει ερεθίσματα για αυτομόρφωση. Πιστεύουμε ότι με το έργο μας συμβάλαμε στη διεύρυνση της δυνατότητας των διδασκόντων να επιλέγουν οι ίδιοι τη μέθοδο που θεωρούν πιο κατάλληλη για την αξιολόγηση των μαθητών τους και βοηθήσαμε στην αύξηση της παιδαγωγικής τους αυτονομίας.

Πεποίθησή μας είναι πως όλα αυτά άλλαξαν το τοπίο στον τομέα της αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου, έφεραν νέο πνεύμα και άρχισαν να τροποποιούν σταδιακά ξεπερασμένες αντιλήψεις και τακτικές που κυριάρχησαν επί πολλά χρόνια στο Ελληνικό σχολείο. Τα θετικά σχόλια που εκφράστηκαν από το σύνολο σχεδόν των επιστημονικών και εκπαιδευτικών φορέων για τα θέματα των εξετάσεων του περασμένου Ιουνίου, τα οποία διαμορφώθηκαν με βάση το πνεύμα και τη μεθοδολογία της αντίστοιχης εργασίας του Κ.Ε.Ε., επιβεβαιώνουν όσα προαναφέρθηκαν.

Η κριτική που είχε αρχικά ασκηθεί για το έργο μας περιορίζεται συνεχώς, ενώ αυξάνει καθημερινά η αποδοχή του από την εκπαιδευτική κοινότητα και η αναγνώρισή του. Σ' αυτό συνέβαλε ασφαλώς και η βελτίωση του υποστηρικτικού υλικού που παράγεται από το Κ.Ε.Ε., η οποία οφείλεται, μεταξύ άλλων, και στις παρατηρήσεις και υποδείξεις των διδασκόντων στα Ενιαία Λύκεια. Η συνειδητοποίηση, τέλος, του τρόπου με τον οποίο πρέπει να χρησιμοποιείται το υλικό αυτό στη διδακτική πράξη και ο περιορισμός των σφαλμάτων που διαπράχθηκαν στην αρχή (μηχανική αναπαραγωγή πλήθους ερωτήσεων, υπέρμετρη αύξηση της εργασίας των μαθητών, απουσία εναλλακτικών τρόπων αξιολόγησης κτλ.) οδήγησαν σε πολύ θετικά αποτελέσματα, τα οποία όσο περνά ο καιρός θα γίνονται εμφανέστερα.

Η διαπίστωση αυτή μας ενισχύει να συνεχίσουμε την προσπάθειά μας και να την επεκτείνουμε, εκπονώντας ανάλογο υλικό και για άλλες εκπαιδευτικές βαθμίδες, εφόσον εξασφαλιστούν οι απαραίτητες οικονομικές και λοιπές προϋποθέσεις.

Τελειώνοντας, επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους τους συνεργάτες μου στο Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, οι οποίοι εργάστηκαν αφιλοκερδώς, με αφοσίωση και σπάνιο ζήλο και επιτέλεσαν κάτω από δύσκολες συνθήκες σημαντικό έργο. Ευχαριστώ ακόμη όλους τους εκπαιδευτικούς που με ποικίλους τρόπους στήριξαν την προσπάθειά μας και βοήθησαν στην επιτυχία της. Ξέχωρες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στις δακτυλογράφους του Κ.Ε.Ε, στο τεχνικό προσωπικό του, στον Προϊστάμενο της Γραμματείας του κ. Γεώργιο Κορκόντζηλα και στους εκδότες που συνεργάστηκαν μαζί μας από το 1997 μέχρι σήμερα.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1999

Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Κ.Ε.Ε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα, τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για τη λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, ***έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα*** για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Ιανουάριος 2000

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ   Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΡΟΣ Α΄

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός. **Σ** **Λ**

2. * Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

3. ** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$, τότε ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$. **Σ** **Λ**

4. * Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

5. * Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h}$. **Σ** **Λ**

6. ** Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. **Σ** **Λ**

7. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. **Σ** **Λ**

8. * Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f. **Σ** **Λ**

9. * Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της. **Σ** **Λ**

0. * Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [α, β] μπορεί να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη μόνο σε άκρο του πεδίου ορισμού της. **Σ** **Λ**

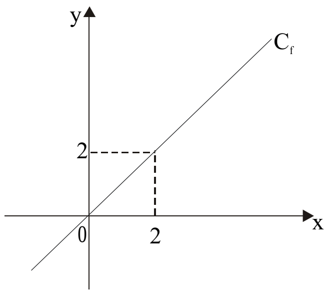
1. * Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη εφαπτομένη της C_f. **Σ** **Λ**

2. * Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να δέχεται μόνο κατακόρυφη εφαπτομένη. **Σ** **Λ**

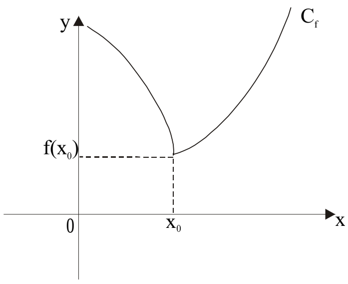
3. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. **Σ** **Λ**

4. * Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = (x - 2)^2 e^x$. Τότε η C_f στο σημείο (2, f (2)) δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. **Σ** **Λ**

5. * Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Η παράγωγος της f στο $x_0 = 2$ είναι ίση με 1. **Σ** **Λ**

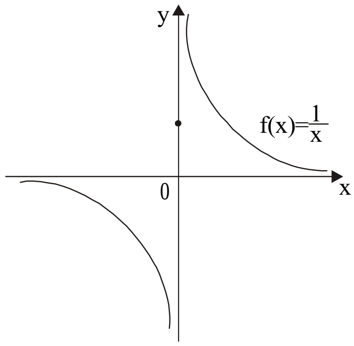


6. ** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα, έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$. **Σ** **Λ**



7. ** Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x = x_0$, είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**

8. ***** Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$. **Σ** **Λ**

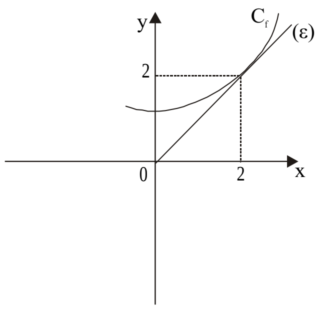


9. ***** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ** **Λ**

20. ****** Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = αx + β$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ** **Λ**

21. ***** Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη. **Σ** **Λ**

22. ****** Η ευθεία στο σχήμα (ε) είναι εφαπτομένη της C_f. Ισχύει $f'(2) = 1$. **Σ** **Λ**



23. ***** α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

24. * Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f ′ είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

25. ** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$. **Σ** **Λ**

26. * Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$. **Σ** **Λ**

27. ** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))^2$. **Σ** **Λ**

28. * Αν το άθροισμα f + g δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0. **Σ** **Λ**

29. * Αν η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες. **Σ** **Λ**

30. * Ισχύει $\left.\frac{dc}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$, όπου c σταθερά και $x_0 \in$ R. **Σ** **Λ**

31. ** Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ισχύει

α) αν η f είναι άρτια, τότε η f ′ είναι περιττή **Σ** **Λ**

β) αν η f είναι περιττή, τότε η f ′ είναι άρτια **Σ** **Λ**

γ) αν η f είναι περιοδική, τότε η f ′ είναι περιοδική με την ίδια περίοδο. **Σ** **Λ**

32. * Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική ν-οστού βαθμού, τότε η συνάρτηση f ′ είναι επίσης πολυωνυμική ν-1 βαθμού. **Σ** **Λ**

33. * Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R. **Σ** **Λ**

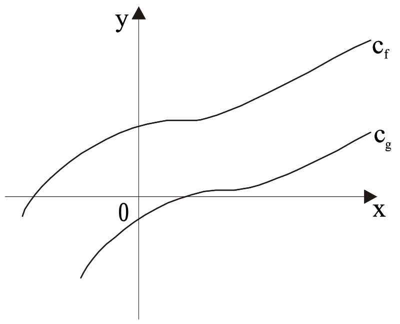
34. * Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού. **Σ** **Λ**

35. * Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες. **Σ** **Λ**

36. * Αν $y = \alpha x + \beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x. **Σ** **Λ**

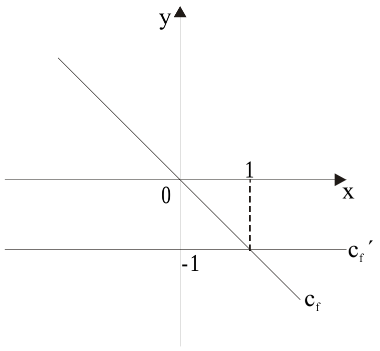
37. * Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^3$. **Σ** **Λ**

38. ****** Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f. Ισχύει $f\,'(x) = g\,'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους.



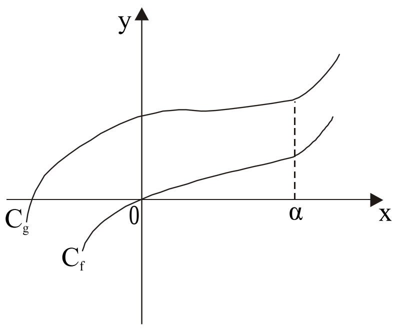
Σ **Λ**

39. ***** Έστω $f(x) = -x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και $f\,'$ είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.



Σ **Λ**

40. ***** Αν η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση και ισχύει $f\,'(\alpha) = 2$, τότε θα είναι και $g\,'(\alpha) = 2$.



Σ **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο x_0 την ευθεία $y = αx + β$, με $α \neq 0$, όταν

Α. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = α \in R$

Β. η f είναι συνεχής στο x_0

Γ. η f δεν είναι συνεχής στο x_0

Δ. το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $+\infty$

Ε. το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $-\infty$

2. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Α $(x_0, f(x_0))$, όταν

Α. η f είναι συνεχής στο x_0

Β. το x_0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f

Γ. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$

Δ. είναι $f'(x_0) = 0$

Ε. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$

3. ***** Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, τότε

Α. η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$ **Β.** $f'(0) = 2$ **Γ.** $f'(2) = 0$

Δ. η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ **Ε.** δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω

4. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 5$ στο σημείο Α (1, 4) είναι

Α. 5 **Β.** - 5 **Γ.** - 3 **Δ.** 3 **Ε.** 2

5. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

Α. το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Β. το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν υπάρχει

Γ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Δ. τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι άνισα

Ε. το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

6. * Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη

Α. στο πεδίο ορισμού της

Β. στο $x_0 = 0$

Γ. στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Δ. στο $(0, +\infty)$

Ε. σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της

7. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$, τότε η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δέχεται

Α. κατακόρυφη εφαπτομένη

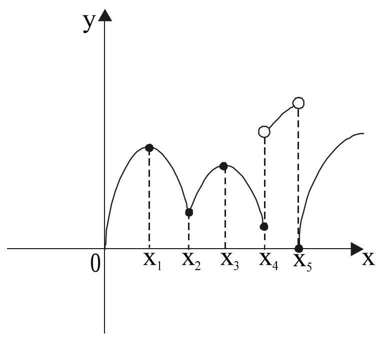
Β. καμία εφαπτομένη

Γ. οριζόντια εφαπτομένη

Δ. εφαπτομένη της μορφής $y = αx + β$, $α \neq 0$

Ε. εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $λ = 1$

8. * Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **λάθος** είναι ότι



Α. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1

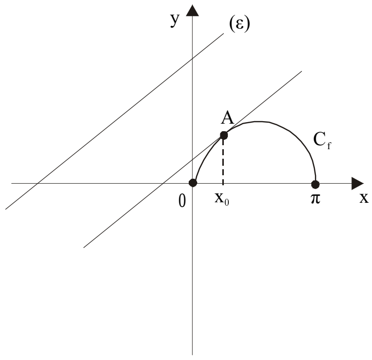
Β. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2

Γ. η C_f δέχεται εφαπτομένη στο x_3

Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4

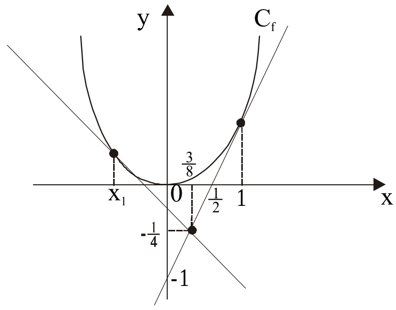
Ε. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5

9. ****** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ημx$, $x \in [0, π]$ και της ευθείας (ε) με συντελεστή διεύθυνσης $λ = \frac{1}{2}$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α $(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) έχει τετμημένη



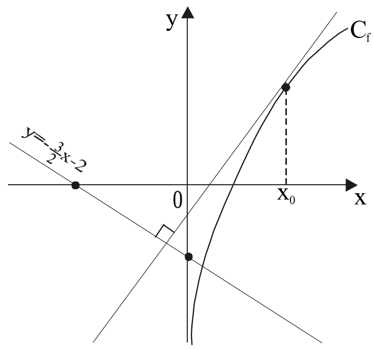
Α. $\frac{π}{6}$ **Β.** $\frac{π}{4}$ **Γ.** $\frac{π}{3}$ **Δ.** $\frac{π}{2}$ **Ε.** $\frac{3π}{4}$

0. ****** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και οι εφαπτομένες στα σημεία της με τετμημένες 1 και x_1. Αν οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες, τότε το x_1 είναι



Α. $-\frac{1}{2}$ **Β.** $-\frac{1}{4}$ **Γ.** $-\frac{1}{3}$ **Δ.** $-\frac{3}{2}$ **Ε.** -1

1. ****** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{3}{2}x - 2$. Το x_0 είναι



Α. $\frac{5}{4}$ **Β.** $\frac{3}{2}$ **Γ.** 2

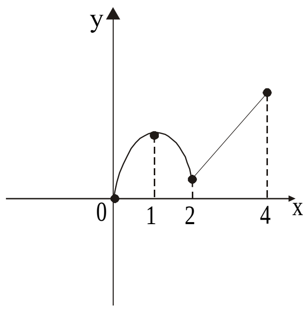
Δ. $\frac{5}{2}$ **Ε.** 3

2. ***** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση $f\,'(x) = 0$ έχει λύση την

Α. $x = 0$ **Β.** $x = 1$

Γ. $x = 2$ **Δ.** $x = 4$

Ε. καμία από τις παραπάνω



13. ***** Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R και ισχύει $f\,'(x_0) = g\,'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in$ R. Τότε

Α. $f(x_0) = g(x_0)$

Β. $x_0 \neq 0$

Γ. οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες

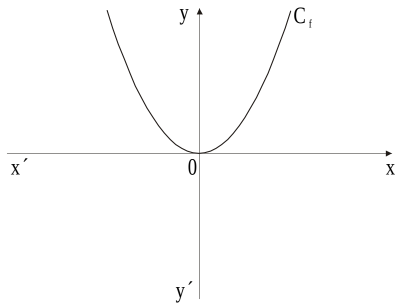
Δ. $f\,''(x_0) = g\,''(x_0)$

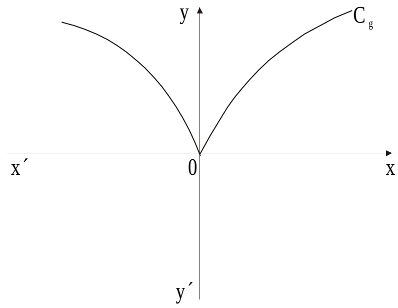
Ε. $f\,'(x) = g\,'(x)$, για κάθε $x \in$ R.

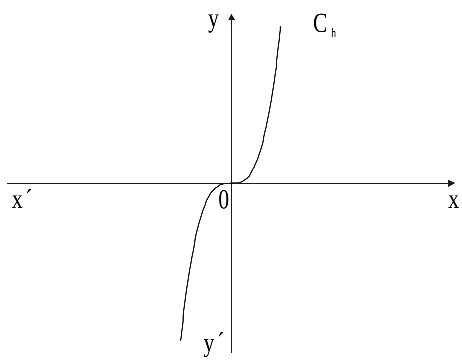
14. ***** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f\,'(x_0) = 2$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα x΄x είναι περίπου

Α. - 64° **Β.** 27,3° **Γ.** 63,4° **Δ.** 89° **Ε.** 106,4°

15. ***** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.







Στο σημείο $x_0 = 0$ **δεν** είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση

Α. f **Β.** g **Γ.** h **Δ.** όλες **Ε.** καμία

16. ****** Για τη συνεχή συνάρτηση f στο R, ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$. Από τις παρακάτω προτάσεις **δεν είναι σωστή** η

Α. Η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$ την ευθεία $x = x_0$

Β. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$

Γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Δ. Δεν ορίζεται η $f΄(x_0)$

Ε. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

17. ** Ο τύπος $(fog)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$ ισχύει, όταν

Α. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0

Β. η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$

Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$

Δ. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$

Ε. οι f και g είναι συνεχείς στο $g(x_0)$

18. * Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = -3ημ3x$ η

Α. $g(x) = συν^3x$ **Β.** $h(x) = συνx^3$

Γ. $φ(x) = 3συνx$ **Δ.** $s(x) = συν3x$ **Ε.** $σ(x) = συν\,\frac{x}{3}$

19. * Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = α^x lnα$, $α > 0$, $x \in R$, η

Α. $x^α$ **Β.** $\log_α x$ **Γ.** $e^{αlnx}$ **Δ.** $\log x^α$ **Ε.** $α^x$

20. * Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[0, π]$ ισχύει $g(x) = f(ημx)$. Η τιμή $g'(\frac{π}{2})$ είναι ίση με

Α. 1 **Β.** $f'(1)$ **Γ.** 0 **Δ.** $f'(\frac{π}{2})$ **Ε.** $\frac{π}{2}\, f'(\frac{π}{2})$

21. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$. Η 5η παράγωγος της f είναι

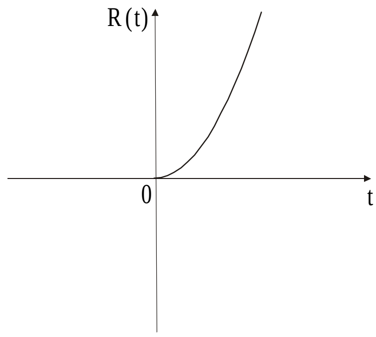
Α. - 1 **Β.** 4 **Γ.** x **Δ.** 0 **Ε.** 24

22. * Αν $f(x) = e^{2x}$, τότε η $f^{(ν)}(x)$ θα ισούται με

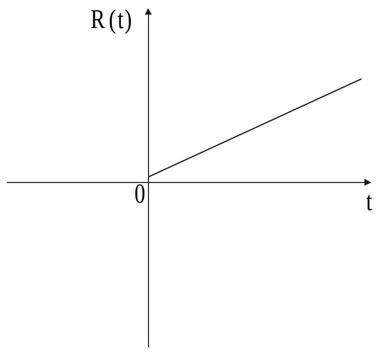
Α. e^{2x} **Β.** $e^{νx}$ **Γ.** $(e^{2x})^ν$ **Δ.** $2^ν e^{2x}$ **Ε.** $νe^{2x}$

23. ****** Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει με σταθερή παροχή αέρα. Τότε η ακτίνα του R συναρτήσει του χρόνου μπορεί να δίνεται από τη γραφική παράσταση

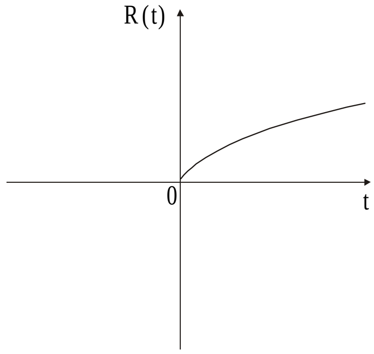
Α.



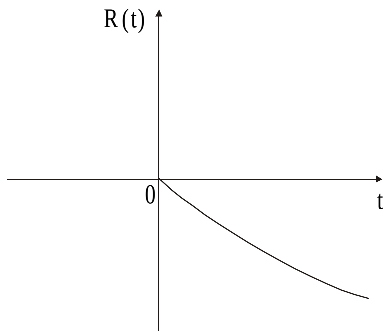
Β.



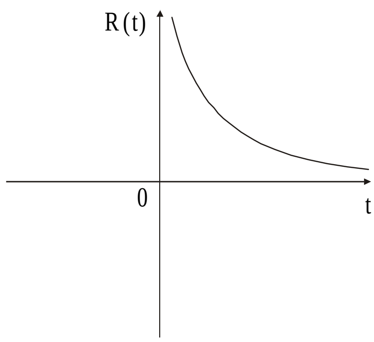
Γ.



Δ.

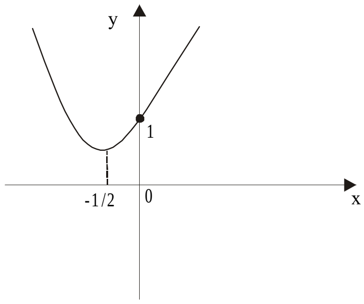


Ε.



24. ***** Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$



Η εφαπτομένη της στο σημείο (0, 1) είναι η ευθεία

Α. y = - x + 1 **Β.** y = x + 1 **Γ.** y = 1

Δ. x = 0 **Ε.** καμία από τις παραπάνω

25. ***** Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους R. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α (1, 2), από τις παρακάτω συνθήκες:

I. $f'(1) = g'(1)$ **II.** $f(1) = g(1)$

III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$ **IV.** $f''(1) = g''(1)$

απαραίτητες είναι

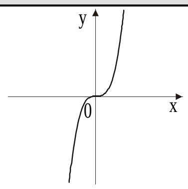
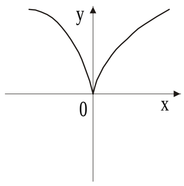
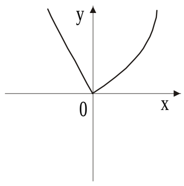
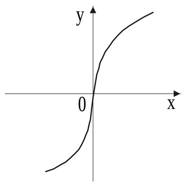
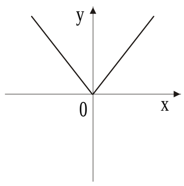
Α. μόνο η Ι **Β.** μόνο η ΙΙ **Γ.** οι Ι και ΙΙ

Δ. οι ΙΙ και ΙV **Ε.** όλες

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ****** Να αντιστοιχίσετε μία ή περισσότερες από τις γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στη στήλη Α του πίνακα Ι με την εφαπτομένη τους (αν υπάρχει) στο σημείο (0, 0) που η εξίσωσή της γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

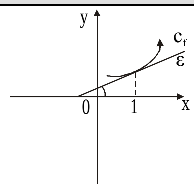
Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** $y = 0$
2. 	**β.** δεν υπάρχει
3. 	**γ.** $x = 0$
4. 	
5. 	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

2. ***** Η στήλη Α περιέχει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και τις εφαπτομένες τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Σε κάθε σχήμα της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε τη σχέση της στήλης Β, η οποία ερμηνεύει αλγεβρικά στο συγκεκριμένο σχήμα, τη θέση της εφαπτομένης, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

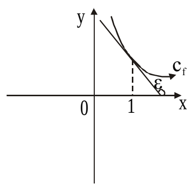
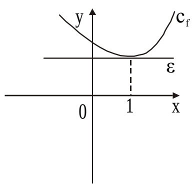
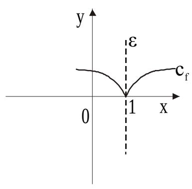
<table>
<tr><th colspan="2">Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td rowspan="4">α. $f'(1) = 0$

β. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

γ. $f'(1) > 0$

δ. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$

ε. $f'(1) < 0$

ζ. $f'(1) > f'(0)$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>
</td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

3. * Όλες οι συναρτήσεις της στήλης Α του πίνακα Ι διέρχονται από το (1, 0). Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης αυτής με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο σημείο αυτό που υπάρχουν στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = x^2 - 1$	**α.** $-\dfrac{-e^4}{2}$
2. $g(x) = -\dfrac{e^{5x}}{10e} + \dfrac{e^5}{10e}$	**β.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $h(x) = \ln 2x - \ln 2$	**γ.** 1
	δ. $\sqrt{3}$
4. $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - 1$	**ε.** $-2e$
	ζ. 2
5. $s(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3}$	**η.** -1

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**

4. * Σε κάθε σύμβολο της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε το σύμβολο από τη στήλη Β που έχει την ίδια σημασία, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$	**α.** $2\, f\,(x) \cdot f\,'\,(x)$
2. $\frac{d^2 f}{dx^2}$	**β.** $f\,'\,(x)$
	γ. $f^{\,2}\,(x) \cdot f\,'\,(x)$
3. $\frac{df^2}{dx}$	**δ.** $f\,''\,(x)$
4. $\left(\frac{df}{dx}\right)^2$	**ε.** $(f\,'\,(x))^2$

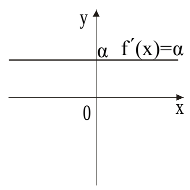
Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

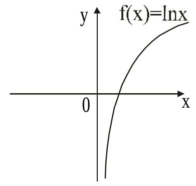
5. * Στη στήλη Α δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων f ΄. Στη στήλη Β δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση f ΄ της στήλης Α τη γραφική παράσταση από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

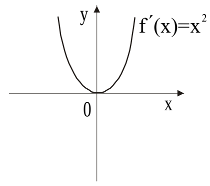
<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><th>γραφικές παραστάσεις f ΄</th><th>γραφικές παραστάσεις f</th></tr>
<tr><td>

1. 

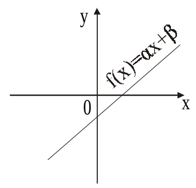
</td><td>

α. 

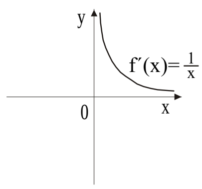
</td></tr>
<tr><td>

2. 

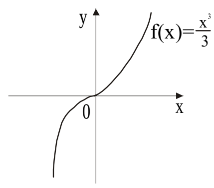
</td><td>

β. 

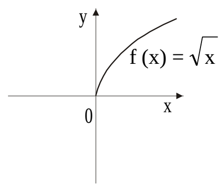
</td></tr>
<tr><td>

3. 

</td><td>

γ. 

</td></tr>
<tr><td></td><td>

δ. 

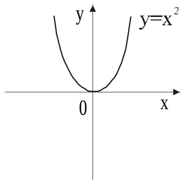
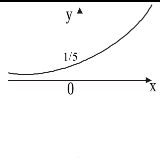
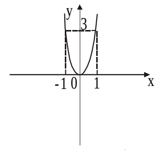
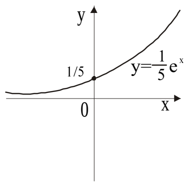
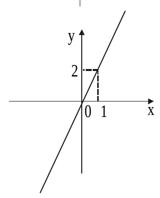
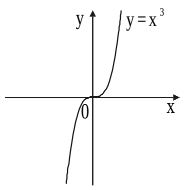
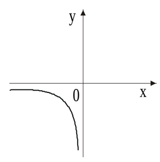
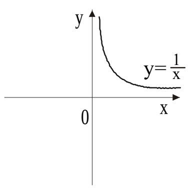
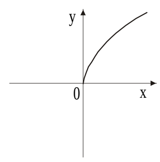
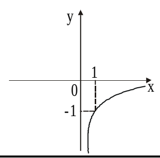
</td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

6. ****** Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη Α του πίνακα Ι με τη γραφική παράσταση της παραγώγου της που φαίνεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

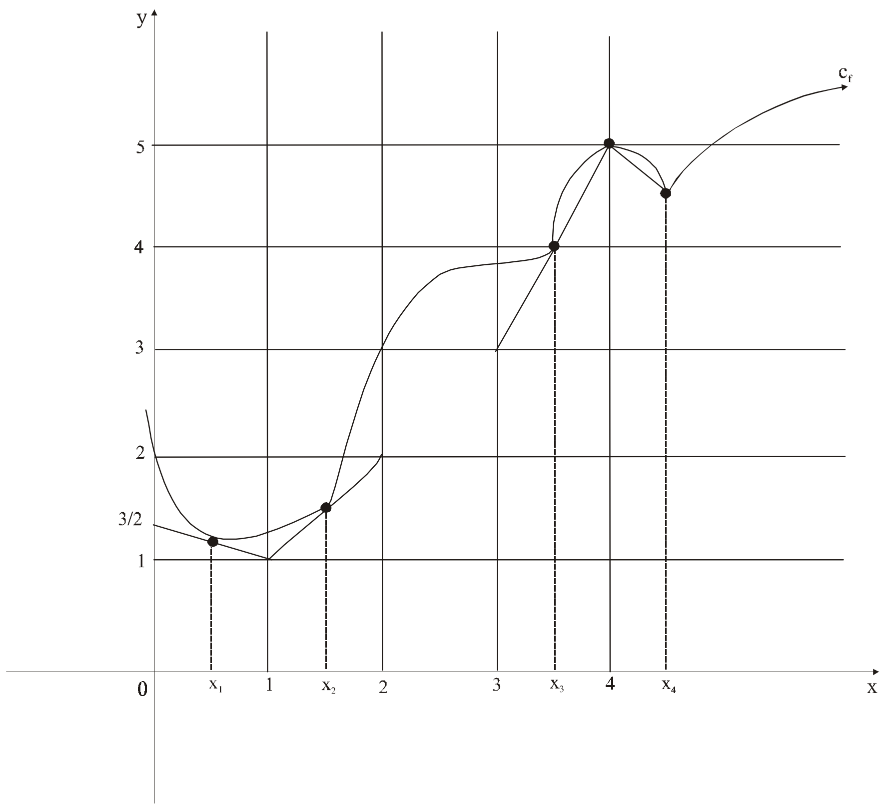
Στήλη Α	**Στήλη Β**
γραφικές παραστάσεις f	***γραφικές παραστάσεις f ΄***
1. 	**α.** 
	β. 
2. 	**γ.** 
3. 	**δ.** 
4. 	**ε.** 
	στ. 

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

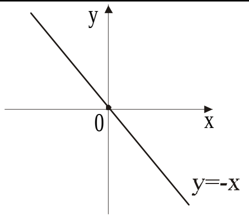
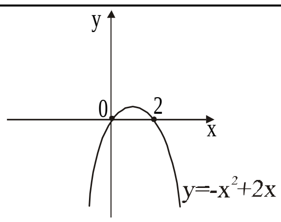
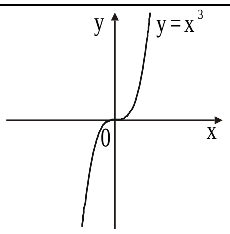
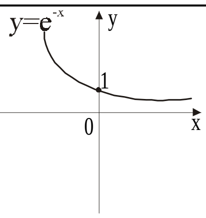
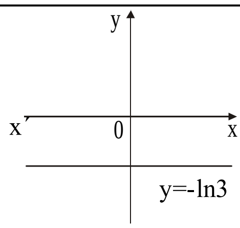
Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Με βάση το σχήμα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



τετμημένη σημείου	x_1	x_2	x_3	4	x_4
παράγωγος της f					

2. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

γραφική παράσταση f		*γραφική παράσταση f ΄*	
1.		**1.**	
2.		**2.**	
3.		**3.**	
4.		**4.**	
5.		**5.**	

3. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Συνάρτηση f (x)	***Πηλίκο*** $\mathbf{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$	***Όριο πηλίκου στο h*** $\mathbf{\to 0}$
$f(x) = x$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$		
$f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$		
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$		

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να διατάξετε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

α) $f(x) = x^3$ β) $g(x) = x^2$

γ) $h(x) = \frac{1}{2}x$ δ) $\varphi(x) = 5$ ε) $\sigma(x) = \ln x$

2. * Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων, στα αντίστοιχα σημεία τους.

α) $f(x) = -5x + 4$ στο σημείο $(1, -1)$

β) $g(x) = 2^x$ στο σημείο $(0, 1)$

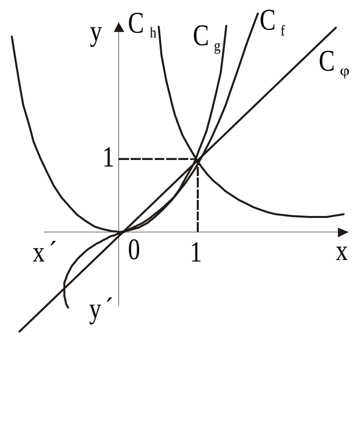
γ) $h(x) = \sqrt{-x}$ στο σημείο $(-4, 2)$

δ) $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu^2 2x$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$

ε) $\sigma(x) = \log_2 x$ στο σημείο $(1, 0)$

3. * Τέσσερα κινητά κινούνται στον ίδιο άξονα και οι θέσεις τους σε κάθε χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους $s_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $s_2(t) = 3\eta\mu\frac{\pi t}{2}$, $s_3(t) = 2t^3 - t^2$, $s_4(t) = t\ln t$. Να διατάξετε τις ταχύτητες των κινητών από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τη χρονική στιγμή $t = 2$.

4. * Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων f, g, h και φ. Να διατάξετε τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$, κατά αύξουσα σειρά.



Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** α) Να αποδείξετε ότι αν τα όρια $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

β) Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x<1 \\ (x-1)^2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

στο σημείο $x_0 = 1$ εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα.

2. ** Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.

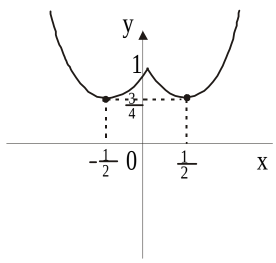
3. ** Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x-1| \cdot g(x)$, $x \in R$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

4. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + x + 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη

α) στο σημείο $x_0 = 3$ και

β) στο σημείο $x_0 = 4$.

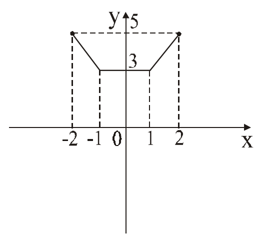
5. ** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.

6. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες - 1, 1, $\frac{3}{2}$.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f ΄.

7. ** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 3.

β) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία y = x + 4.

δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

στ) είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

ζ) άγεται από το σημείο (- 1, 0).

8. ** Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α) $f(x) = \ln x$ στο (1, 0)

β) $f(x) = |2 - x|$ στο (2, 0)

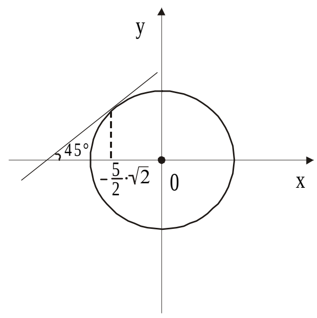
γ) $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο (0, 0)

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο (0, 0)

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$ στο (0, 0)

στ) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο $(-2, \frac{3}{4})$

9. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$, $α \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα α, β, $γ \in R$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

11. ** α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 8$, να φέρετε τις εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ της C_f στα σημεία τομής της C_f με τον x΄x και να δικαιολογήσετε από το σχήμα γιατί οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ με $Δ > 0$, στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x τέμνονται στον άξονα συμμετρίας της παραβολής ($x = -\frac{β}{2α}$).

Σημείωση: *Με βάση την κεντρική ιδέα αυτής της άσκησης (συμμετρία) έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε όμοιες ασκήσεις που αναφέρονται, για παράδειγμα, σε άρτιες παραγωγίσιμες συναρτήσεις.*

12. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(αx)}{x}$ με $α > 0$ και $x > 0$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

13. ****** Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

Σημείωση: *Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να γενικευθεί για οποιοδήποτε τριώνυμο.*

14. ****** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

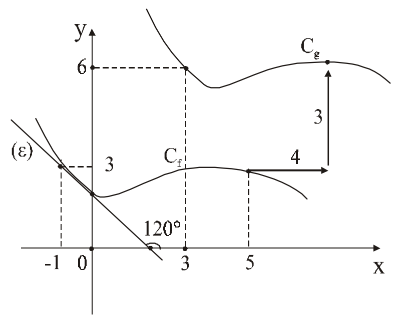
$f(2 + x) - f(2 - x) = -2x$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

15. ****** α) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x = x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

6. ****** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g.



α) Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις συναρτήσεις f και g.

β) Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in R$.

γ) Να βρείτε την $g'(4)$.

17. ****** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_{f}' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες x΄x και y΄y.

18. ****** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α (0, 1).

19. ****** Να δείξετε ότι:

α) αν $f(x) = 3\text{συν}x - 2\text{συν}^2 x$, τότε $f'(x) + f(x)\,\text{εφ}x - \text{ημ}2x = 0$.

β) αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$, τότε $x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

20. ****** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in R$,

α) να βρεθεί ο τύπος της f.

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

21. ****** Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή Ο τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t+1)$, $t > 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α) Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

22. ** Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f(x + y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = -\alpha$.

β) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)\, e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in R$.

23. ** Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το (0, 0).

β) $f''(0) = 0$.

24. ** Γνωρίζουμε ότι για $x \neq 1$ ισχύει: $\dfrac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + \nu \cdot x^{\nu-1}$, $x \neq 1$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $2 + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \ldots + \dfrac{20}{2^{19}}$.

25. ** Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{\text{x προσθετέοι}}$, άρα $(x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{\text{x φορές}}\right)'$, δηλαδή

$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \ldots + 3x^2}_{\text{x φορές}}$, άρα $4x^3 = 3x^3$, επομένως $4 = 3$!!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ	16.	Λ	28.	Λ
2.	Σ	17.	Σ	29.	Λ
3.	Λ	18.	Λ	30.	Σ
4.	Σ	19.	Σ	31. α)	Σ
5.	Σ	20.	Σ	β)	Σ
6.	Λ	21.	Λ	γ)	Σ
7.	Λ	22.	Σ	32.	Σ
8.	Λ	23. α)	Σ	33.	Σ
9.	Λ	β)	Λ	34.	Σ
10.	Λ	γ)	Σ	35.	Λ
11.	Λ	δ)	Λ	36.	Λ
12.	Σ	24.	Λ	37.	Λ
13.	Σ	25.	Λ	38.	Σ
14.	Σ	26.	Λ	39.	Σ
15.	Σ	27.	Λ	40.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Α	9.	Γ	17.	Β
2.	Δ	10.	Β	18.	Δ
3.	Β	11.	Β	19.	Ε
4.	Γ	12.	Β	20.	Γ
5.	Α	13.	Γ	21.	Δ
6.	Δ	14.	Γ	22.	Δ
7.	Γ	15.	Β	23.	Γ
8.	Δ	16.	Γ	24.	Β
				25	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	α
2	γ
3	β
4	γ
5	β

2.

1	γ
2	ε
3	α
4	δ

3.

1	ζ
2	α
3	γ
4	η
5	β

4.

1	β
2	δ
3	α
4	ε

5.

1	β
2	γ
3	α

6.

1	γ
2	α
3	β
4	στ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\varphi'(1) < h'(1) < \sigma'(1) < g'(1) < f'(1)$

2. $f'(1) < h'(4) < \varphi'(\frac{\pi}{2}) < \sigma'(1) < g'(0)$

3. $\upsilon_2 < \upsilon_1 < \upsilon_4 < \upsilon_3$

4. $\lambda_h < \lambda_\varphi < \lambda_f < \lambda_g$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Αν τα όρια είναι άνισα θέτουμε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x)$ οπότε

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

2. Κριτήριο παρεμβολής

3. Χρήση του ορισμού για το f (1) με πλευρικά όρια, οπότε προκύπτει $g(1) = -g(1)$ ή $g(1) = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 3 \\ 5 & x \leq 3 \end{cases}$

α) όχι **β)** ναι

8. **α)** $y = x - 1$ **β)** δεν υπάρχει **γ)** x΄x **δ)** y΄y

ε) x΄x **στ)** $y - \frac{1}{4} = -\frac{5}{16}(x + 2)$

9. Για την $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ ισχύει $f'(-\frac{5}{2}\sqrt{2}) = 1$ άρα $\rho = 5$

10. $f'(x) \neq 0$ άρα $\beta^2 < 3\alpha\gamma$

11. Λόγω συμμετρίας

12. Οι εφαπτομένες διέρχονται από το σημείο $(2x_0, \frac{1}{x_0})$

14. Προκύπτει $f'(2 + x) + f'(2 - x) = -2$ για $x = 0$ $f'(2) = -1$

15. **α)** $P(x_0) = Q(x_0)$ (1) $\Leftrightarrow$ τέμνονται στο x_0, $P'(x_0) = Q'(x_0)$ $\Leftrightarrow$ κοινή εφαπτομένη

β) (3, 1)

16. **α)** $g(x) = f(x - 4) + 3$ **β)** $g'(x) = f'(x - 4)$

γ) $g'(4) = \text{εφ}120°$

17. **α)** για $x = 1$ $f'(0) = 0$ **β)** $y = -1$ **γ)** $y = ex - e$, $E = \frac{1}{2}e$

18. $y = \frac{1}{4}x + 1$ και ο άξονας $y'y$

20. $2(\nu - 1) = \nu$ άρα $\nu = 2$, δηλαδή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

21. **α)** $s'(t) = \frac{1}{t+1}$ άρα $\upsilon(0) = 1$

β) η $\upsilon(t)$ είναι $\downarrow$

γ) $\upsilon(3) = \frac{1}{4}$, $\gamma(t) = \upsilon'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$

22. **α)** $x = y = 0$ άρα $f(0) = -\alpha$ **β)** $x = 1, y = 0$ άρα $\alpha = 0$

γ) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

23. **α)** $f(-x) = -f(x)$ άρα $f(0) = -f(0)$

β) Παραγώγισε δύο φορές την (α)

24. **α)** Παραγώγισε και τα δύο μέλη της δοσμένης

β) Εφαρμογή του (α) για $x = \frac{1}{2}$ και $\nu = 20$

25. Το x^4 δεν μπορεί να γραφεί $x^3 + x^3 + \ldots + x^3$ για κάθε $x \in R$

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων, ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου τμήματος στο οποίο απευθύνεται.

ΣΧΕΔΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

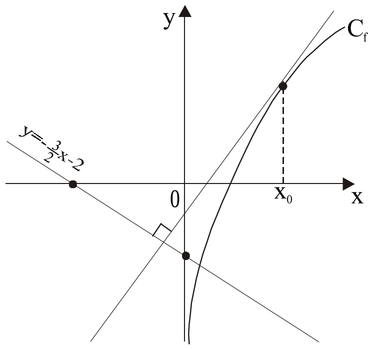
Κεφάλαιο 2ο: **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ** **ΜΕΡΟΣ Α΄**

1. Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, τότε

Α. η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$ **Β.** $f'(0) = 2$ **Γ.** $f'(2) = 0$

Δ. η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ **Ε.** δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω

2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\dfrac{3}{2}x - 2$. Το x_0 είναι



Α. $\dfrac{5}{4}$ **Β.** $\dfrac{3}{2}$ **Γ.** 2

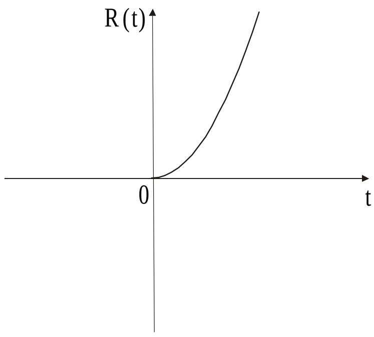
Δ. $\dfrac{5}{2}$ **Ε.** 3

3. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[0, \pi]$ ισχύει $g(x) = f(\eta\mu x)$. Η τιμή $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι ίση με

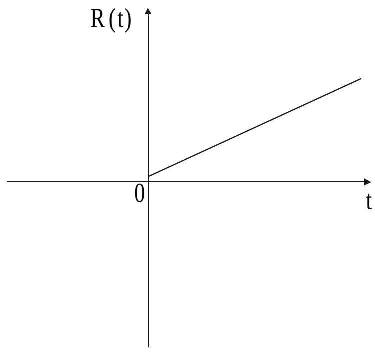
Α. 1 **Β.** $f'(1)$ **Γ.** 0 **Δ.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **Ε.** $\dfrac{\pi}{2} f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει με σταθερή παροχή αέρα. Τότε η ακτίνα του R συναρτήσει του χρόνου μπορεί να δίνεται από τη γραφική παράσταση

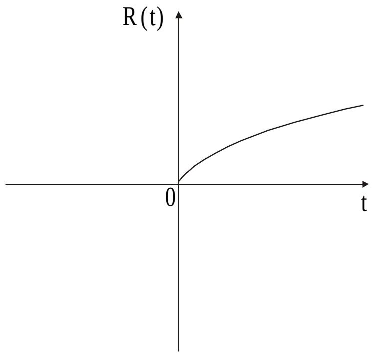
Α.



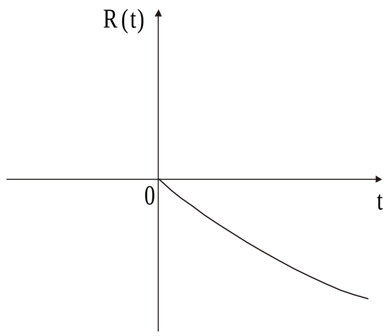
Β.



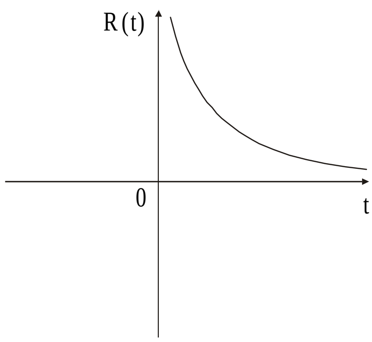
Γ.



Δ.



Ε.



5. Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους R. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α (1, 2), από τις παρακάτω συνθήκες:

I. $f'(1) = g'(1)$ **II.** $f(1) = g(1)$

III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$ **IV.** $f''(1) = g''(1)$

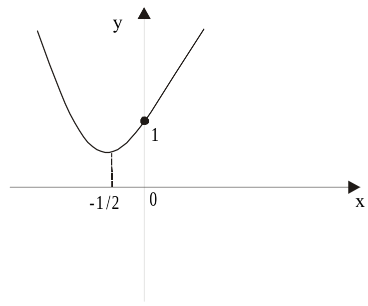
απαραίτητες είναι

Α. μόνο η Ι **Β.** μόνο η ΙΙ **Γ.** οι Ι και ΙΙ

Δ. οι ΙΙ και ΙV **Ε.** όλες

6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$



Η εφαπτομένη της στο σημείο (0, 1) είναι η ευθεία

Α. $y = -x + 1$ **Β.** $y = x + 1$ **Γ.** $y = 1$

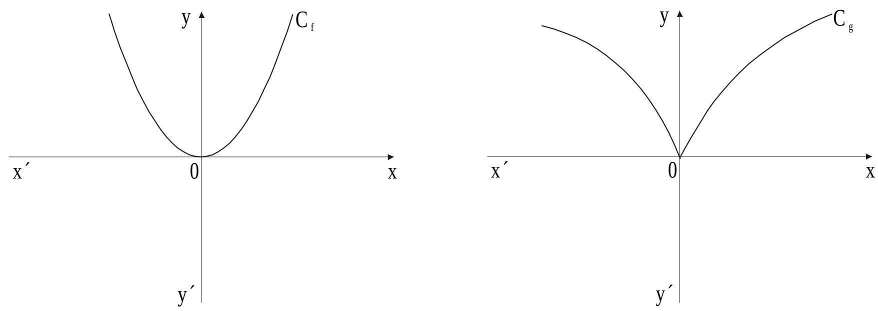
Δ. $x = 0$ **Ε.** καμία από τις παραπάνω

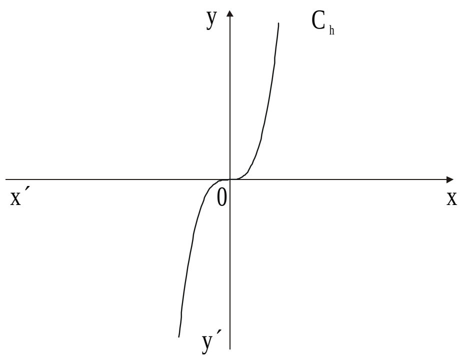
7. Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = -3ημ3x$ η

Α. $g(x) = συν^3x$ **Β.** $h(x) = συνx^3$

Γ. $φ(x) = 3συνx$ **Δ.** $s(x) = συν3x$ **Ε.** $σ(x) = συν\dfrac{x}{3}$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



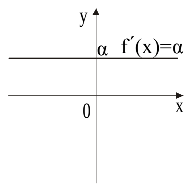
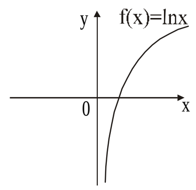
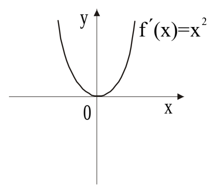
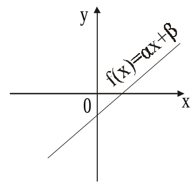
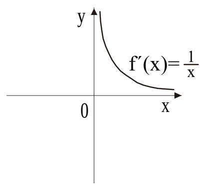
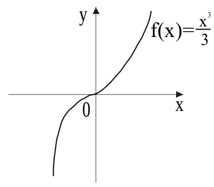
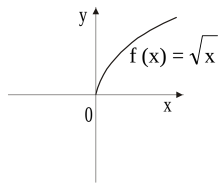


Στο σημείο $x_0 = 0$ **δεν** είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση

Α. f **Β.** g **Γ.** h **Δ.** όλες **Ε.** καμία

9. Στη στήλη Α δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων f ΄. Στη στήλη Β δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση f ΄ της στήλης Α τη γραφική παράσταση από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** 
2. 	**β.** 
3. 	**γ.** 
	δ. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

10. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^2 \ln x$ β) $g(x) = ημ\sqrt{x - 2}$ γ) $h(t) = \dfrac{e^{-2t}}{3t}$

11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $t(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ στο Α (- 1, 0).

12. Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το (0, 0).

β) $f''(0) = 0$.

Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΡΟΣ Β΄

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. **Σ** **Λ**

2. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. **Σ** **Λ**

3. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$. **Σ** **Λ**

4. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **Σ** **Λ**

5. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$. **Σ** **Λ**

6. * Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f'. **Σ** **Λ**

7. ** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f', υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f. **Σ** **Λ**

8. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. **Σ** **Λ**

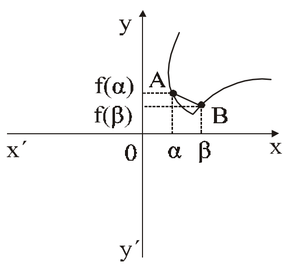
9. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f. **Σ** **Λ**

0. * Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος. **Σ** **Λ**

1. * Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει x_0 ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

2. * Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα. **Σ** **Λ**

3. * Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ (ξ, f (ξ)) της C_f με ξ ∈ (α, β), όπου η εφαπτομένη της f, να είναι παράλληλη με την ΑΒ. **Σ** **Λ**



4. * Αν $f'(x) = (x + 3)x^2$, τότε το $x_0 = -3$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου. **Σ** **Λ**

5. * Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**

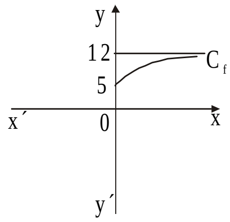
6. * Για τη συνάρτηση f (x) = ημx, x ∈ R, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο. **Σ** **Λ**

7. * Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με $f'(x) > 0$ για $2 < x < 7$. Αν f (3) = 5, τότε μπορεί να ισχύει f (5) = 4. **Σ** **Λ**

8. * Η συνάρτηση $f(x) = ημx + 2e^x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{3}$. **Σ** **Λ**

9. * Αν $f'(x) = e^{-x^2+16}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα. **Σ** **Λ**

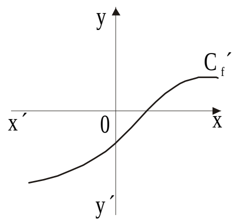
20. * Η συνάρτηση του σχήματος έχει θετική παράγωγο για κάθε x ∈ (0, + ∞). **Σ** **Λ**



21. * Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ’ ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. **Σ** **Λ**

22. * Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο - x_0 θα έχει τοπικό μέγιστο. **Σ** **Λ**

23. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, και η γραφική παράσταση της f ΄ είναι αυτή του σχήματος, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. **Σ** **Λ**



24. * Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f ΄ (x) < 0, x ∈ R, τότε f (x) < 0, x ∈ R. **Σ** **Λ**

25. * Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει f ΄ (5) = 0, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 = 5. **Σ** **Λ**

26. * Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**

27. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*. **Σ** **Λ**

28. * Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει f ΄ (x) ≤ 0. **Σ** **Λ**

29. * Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(x) = e^x ημ4$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

30. * Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f. **Σ** **Λ**

31. * Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0, στο οποίο δεν είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

32. * Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$. **Σ** **Λ**

33. * Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ. **Σ** **Λ**

34. * Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

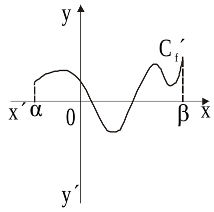
35. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι

α) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f' μηδενίζεται **Σ** **Λ**

β) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται **Σ** **Λ**

γ) τα άκρα του [α, β]. **Σ** **Λ**

36. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' μιας συνάρτησης f. Τότε η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις τοπικών ακροτάτων. **Σ** **Λ**



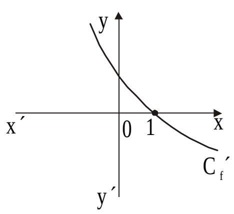
37. * Αν $f'(x) = (x - 1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f. **Σ** **Λ**

38. * Αν $f'(x) = |x - 1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

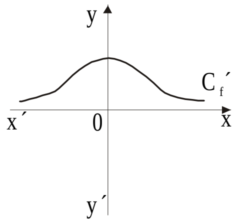
39. * Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. **Σ** **Λ**

40. * Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, 3]. **Σ** **Λ**

41. * Αν το διάγραμμα C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$. **Σ** **Λ**

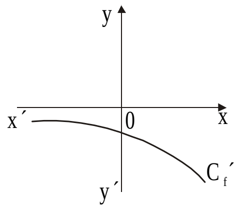


42. ***** Αν το διάγραμμα $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



Σ **Λ**

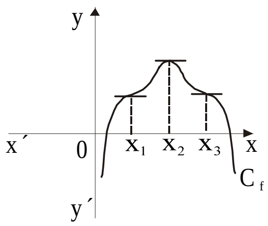
43. ***** Αν το διάγραμμα $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



Σ **Λ**

44. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f (α) = f (β) και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [α, β]$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β). **Σ** **Λ**

45. ***** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:



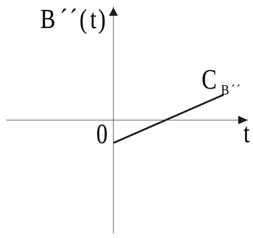
α) το x_1 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**

β) το x_2 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**

γ) το x_3 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**

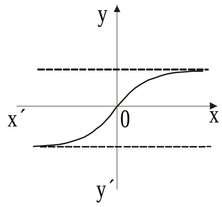
46. ***** Αν $f''(x) = (x - 2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$. **Σ** **Λ**

47. ***** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $B''(t)$, όπου B (t) είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t. Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει.



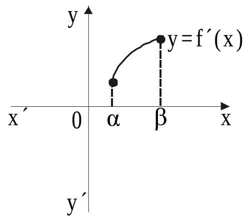
Σ **Λ**

48. * Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει f ΄΄ (x) < 0 για κάθε x ∈ (0, + ∞).



Σ **Λ**

49. * Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f ΄ φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

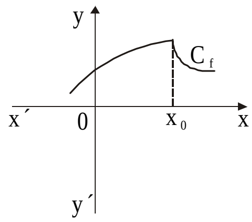


Σ **Λ**

50. * Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. **Σ** **Λ**

51. * Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής. **Σ** **Λ**

52. * Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.



Σ **Λ**

53. * Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε f ΄΄ (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ Δ. **Σ** **Λ**

54. * Το σημείο Α (x_0, f (x_0)) είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0. **Σ** **Λ**

55. * Η συνάρτηση f (x) = e^{-x} είναι κυρτή στο R. **Σ** **Λ**

56. * Η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$. **Σ** **Λ**

57. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + x + 2004}$

έχει μια πλάγια ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**

58. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ έχει

δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες. **Σ** **Λ**

59. ***** Ισχύει $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$. **Σ** **Λ**

60. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. **Σ** **Λ**

61. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**

62. ***** Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$. **Σ** **Λ**

63. ***** Η συνάρτηση $f(x) = e^{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β]. Τότε θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο (ξ, f (ξ))
   Α. να είναι παράλληλη με τον άξονα y΄y
   Β. να έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν
   Γ. να έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα
   Δ. να είναι παράλληλη με την ευθεία y = x
   Ε. να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

2. ***** Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την f, όταν
   Α. η f είναι συνεχής στο [α, β]
   Β. η f έχει ίσες τιμές στα σημεία α και β
   Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
   Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στα α και β
   Ε. η f είναι συνεχής στο (α, β)

3. ***** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = c, με πεδίο ορισμού το [α, β]. Το πλήθος των σημείων $\xi \in (\alpha, \beta)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι
   Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** το πολύ 2 **Δ.** κανένα **Ε.** άπειρο

4. ***** Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 2]$, το πλήθος των αριθμών $\xi \in (-1, 2)$ που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι
   Α. τουλάχιστον τρεις **Β.** ακριβώς ένας
   Γ. τουλάχιστον δύο **Δ.** ακριβώς δύο **Ε.** κανένας

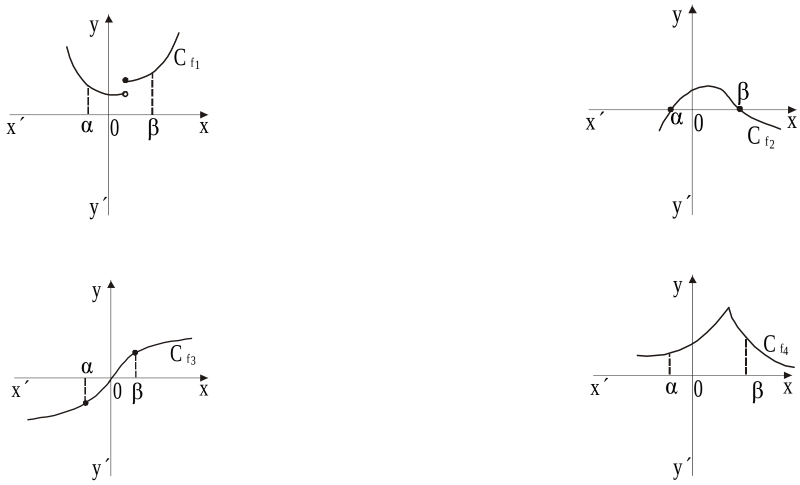
5. ***** Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, για κάθε x_1, $x_2 > 0$, εξασφαλίζει ένα ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

Α. $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\xi}{x_1 - x_2}$ **Β.** $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{\xi}$

Γ. $\ln (x_1 - x_2) = \dfrac{1}{\xi}(x_1 - x_2)$ **Δ.** $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \xi (x_1 - x_2)$

Ε. $\ln (x_1 - x_2) = \xi (x_1 - x_2)$

6. ***** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4.



Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$ είναι οι

Α. f_2 και f_4 **Β.** μόνο η f_4 **Γ.** μόνο η f_2 **Δ.** f_2 και f_3 **Ε.** f_1 και f_4

7. ***** Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο R και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in R$, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε $f(x) = g(x)$, για όλα τα $x \in R$;

Α. f και g συνεχείς στο R **Β.** $f(0) = g(0)$

Γ. $f''(x) = g''(x) + c$ **Δ.** $f''(0) = g''(0)$

Ε. δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

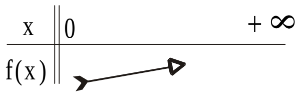
8. ***** Αν για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(x) = g'(x)$, $x \in R$, τότε

Α. $f(x) = g(-x) + c$ **Β.** $f(x) = -g(x) + c$ **Γ.** $f(x) = g(x) - c$

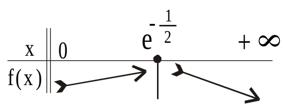
Δ. $f(x) + g(-x) = c$ **Ε.** $f(-x) = g(x) + c$

9. ***** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ έχει παράγωγο την $f'(x) = 2\ln x + 1$, τότε για τη μονοτονία της f ισχύει

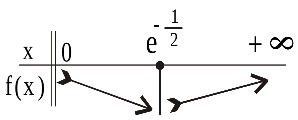
Α.



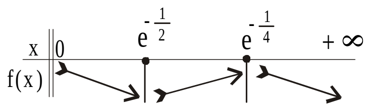
Β.



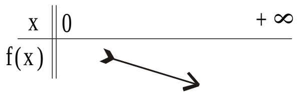
Γ.



Δ.



Ε.



10. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε

Α. $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$

Β. $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$

Γ. $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in R$

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in R$

Ε. η $f'(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

11. ***** Η παράγωγος f' της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η f έχει

Α. τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα

Β. ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο

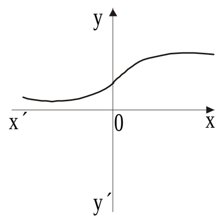
Γ. τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα

Δ. ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

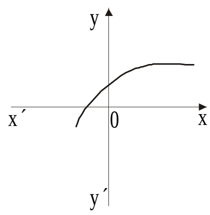
Ε. τρία το πολύ τοπικά ακρότατα

12. ****** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να έχει τη μορφή

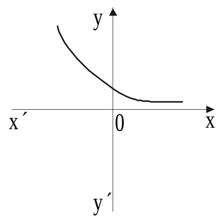
Α.



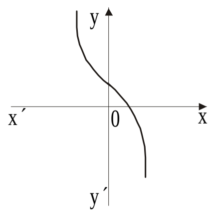
Β.



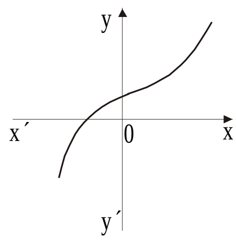
Γ.



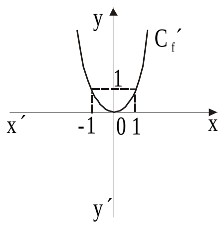
Δ.



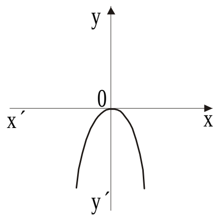
Ε.



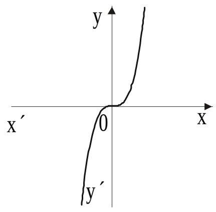
3. * Η γραφική παράσταση $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



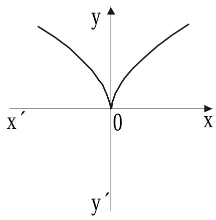
Α.



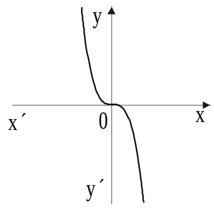
Β.



Γ.

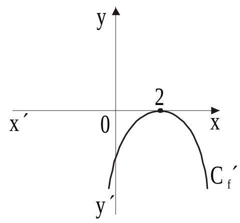


Δ.



Ε. καμία από τις προηγούμενες

4. * Η γραφική παράσταση $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο (- ∞, 2]

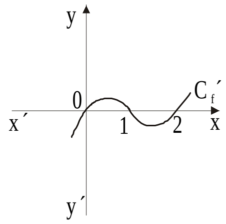
Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο [2, + ∞)

Γ. η f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $x_0 = 2$

Δ. η f έχει τοπικό ελάχιστο το σημείο $x_0 = 2$

Ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

5. ***** Το διάγραμμα C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1]

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2]

Γ. η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με x = 0

Δ. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 1

Ε. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 2

16. ***** Έστω μια συνεχής συνάρτηση f, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ. Τότε καθώς το x αυξάνει, η κλίση της C_f

Α. αυξάνει **Β.** ελαττώνεται **Γ.** μένει σταθερή

Δ. είναι μηδέν **Ε.** δεν μπορούμε να απαντήσουμε

17. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ, τότε

Α. $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

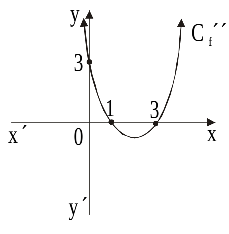
Β. $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Γ. $f''(x) \le 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Δ. $f''(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Ε. δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f''(x)$ στο Δ

18. ***** Το διάγραμμα C_f'' της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο



Α. $(-\infty, 1]$ **Β.** [1, 3] **Γ.** $[3, +\infty)$

Δ. R **Ε.** $(-\infty, -3]$

19. ***** Η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in$ Δ. Θεωρούμε τις προτάσεις:

Ι. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο Α (x_0, f (x_0))

ΙΙ. Η f ΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

ΙΙΙ. Η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

Τότε το Α (x_0, f (x_0)) είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις

Α. Ι και ΙΙ　　**Β.** Ι και ΙΙΙ　　**Γ.** ΙΙ και ΙΙΙ

Δ. μόνο η ΙΙΙ　　**Ε.** μόνο η Ι

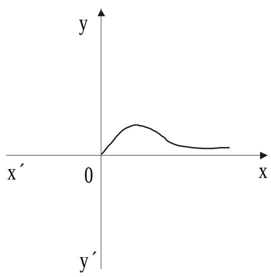
20. ***** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, μπορεί να έχει πλήθος πλάγιων ασυμπτώτων

Α. το πολύ τρεις　　**Β.** το πολύ δύο　　**Γ.** το πολύ μία

Δ. εξαρτάται από το πλήθος των οριζοντίων ασυμπτώτων

Ε. δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος

21. ***** Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) = $xe^{-\alpha x}$ με α > 0 και $x \in [0, +\infty)$. Για όλες τις συναρτήσεις f ισχύει ότι



Α. έχουν μόνο 1 τοπικό ακρότατο

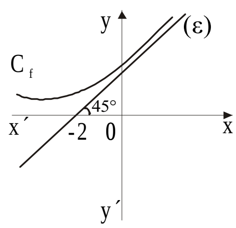
Β. το 0 είναι σημείο καμπής

Γ. η ευθεία x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Δ. η ευθεία y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη

Ε. όλα τα παραπάνω

22. ****** Η ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Τότε ισχύει ότι



Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$　　**Β.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

Γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$　　**Δ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$

Ε. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

23. ****** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να έχει

Α. δύο πλάγιες ασύμπτωτες στο + ∞

Β. οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο + ∞

Γ. κατακόρυφες ασύμπτωτες

Δ. πλάγια ασύμπτωτη στο + ∞ και οριζόντια ασύμπτωτη στο - ∞

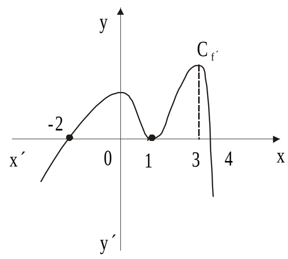
Ε. οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο - ∞

24. ***** Η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της

Α. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5}{2x^2 + 3}$ **Β.** $g(x) = x^4 + 5x$ **Γ.** $h(x) = \dfrac{1 + x^2 + x}{x}$

Δ. $\varphi(x) = e^x - 1$ **Ε.** $\kappa(x) = x + \eta\mu x$

25. ***** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f στο R. Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει



Α. στο διάστημα [- 2, 0] η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Β. στο διάστημα [1, 3] ισχύει $f''(x) = 0$

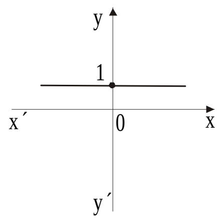
Γ. στο διάστημα [0, 1] η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Δ. στο διάστημα [- 2, 1] η f είναι γνησίως φθίνουσα

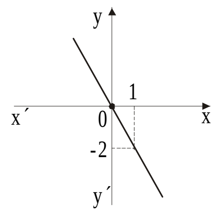
Ε. όλα τα παραπάνω

26. ***** Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, τότε η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι η

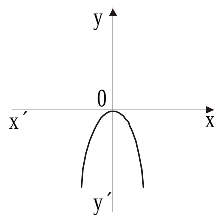
Α.



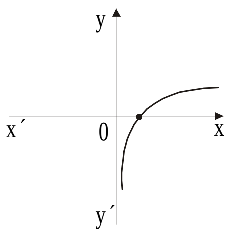
Β.



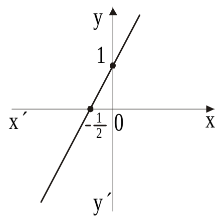
Γ.



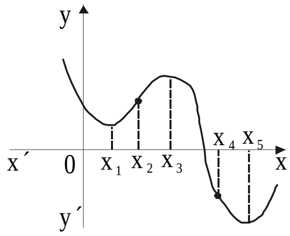
Δ.



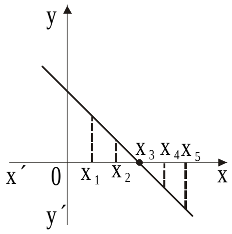
Ε.



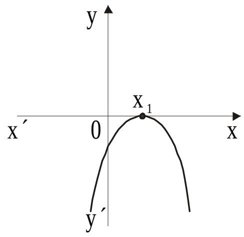
27. ***** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι



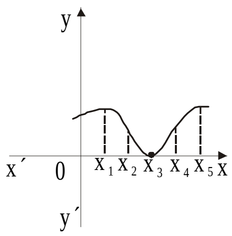
Α.



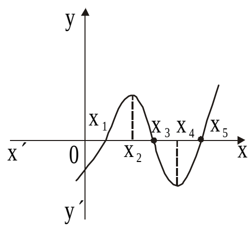
Β.



Γ.

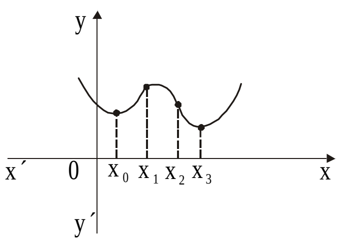


Δ.



Ε. καμία από αυτές

28. ***** Αν η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε



Α. η f έχει μόνο δύο τοπικά ακρότατα

Β. η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[x_0, x_3]$

Γ. $f''(x) > 0$ για όλα τα $x \in (x_2, x_3)$

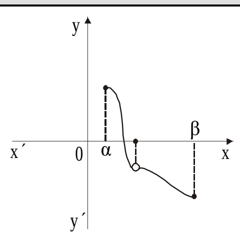
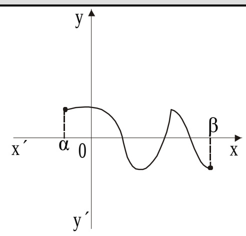
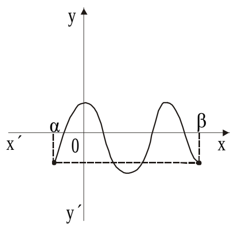
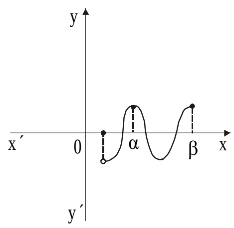
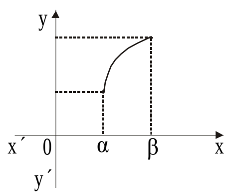
Δ. $f''(x) < 0$ για όλα τα $x \in (x_0, x_1)$

Ε. η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_3]$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α του πίνακα Ι σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο [α, β], συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

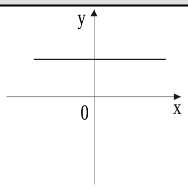
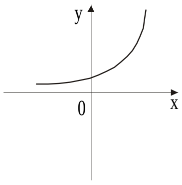
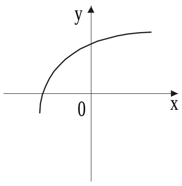
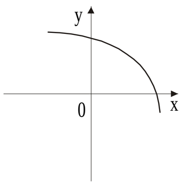
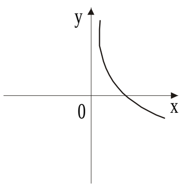
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Θεώρημα Bolzano	 **α.**  **β.**
2. Θεώρημα Rolle	 **γ.**  **δ.**
3. Θεώρημα μέσης τιμής	 **ε.**

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**

2. ***** Κάθε συνάρτηση τη στήλης Α του πίνακα Ι να την αντιστοιχίσετε στις σχέσεις που ισχύουν γι’ αυτήν από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$
2. 	**β.** $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$
	γ. $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$
3. 	**δ.** $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$
	ε. $f'(x) = 0$
4. 	**ζ.** $f'(x) = 0$ και $f''(x) > 0$
5. 	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

3. * Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται συναρτήσεις. Στη στήλη Β γράφονται τα σημεία που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για κάθε συνάρτηση. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

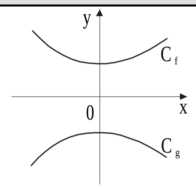
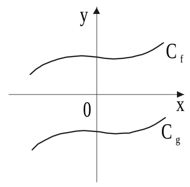
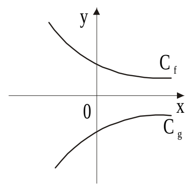
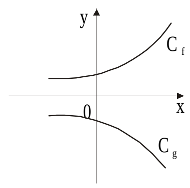
Στήλη Α	**Στήλη Β**
συνάρτηση και διάστημα	***σημείο που προκύπτει***
1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1,\ x \in [0, 1]$	**α.** $\frac{1}{2}\, e - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [-2, -1]$	**β.** $-\frac{1}{2}$
3. $f(x) = \ln x,\ x \in [1, e]$	**γ.** $e - 1$
4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in [-1, 0]$	**δ.** $-\sqrt{2}$
	ε. $\frac{1}{2}$
	ζ. $e - 2$
	η. $\frac{1}{4}$
	θ. $1 - \sqrt{2}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

4. * Σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα Ι. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ (οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R).

Πίνακας Ι

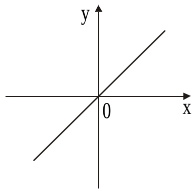
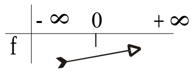
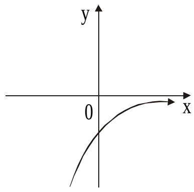
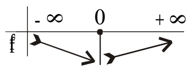
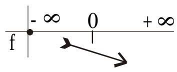
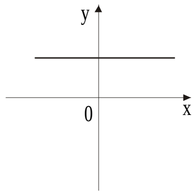
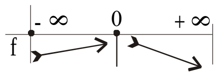
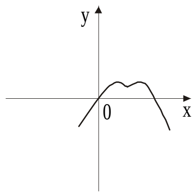
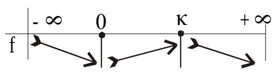
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $(f(x) - g(x))' > 0$	**α.** 
2. $(f(x) - g(x))' = 0$	**β.** 
3. $(f(x) - g(x))' < 0$	**γ.** 
4. $(f(x) - g(x))' > 0$, για $x > 0$ και $(f(x) - g(x))' < 0$, για $x < 0$	**δ.** 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

5. * Κάθε γραφική παράσταση C_f' της στήλης Α του πίνακα Ι να την αντιστοιχίσετε στη μονοτονία από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
C_f'	***μονοτονία της f***
1. 	**α.** σταθερή συνάρτηση
	β. 
2. 	**γ.** 
	δ. 
3. 	**ε.** 
4. 	**στ.** 

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

6. ***** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι, το πλήθος των σημείων καμπής που αναφέρεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

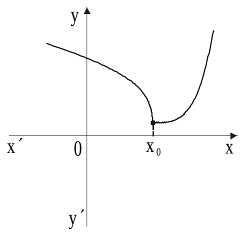
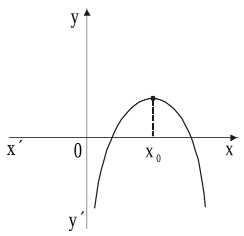
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = \ln x,\ x > 0$	**α.** 2
	β. 0
2. $g(x) = ημx,\ x \in R$	
	γ. 4
3. $h(x) = 5x^3 + x + 1,\ x \in R$	**δ.** άπειρα
	ε. 1
4. $t(x) = x^4 - 2x^3,\ x \in R$	
	στ. 3

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

7. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης της στήλης Α του πίνακα Ι, και η οποία δεν παρουσιάζει καμπή στο σημείο x_0, να αντιστοιχεί η σχέση που ισχύει από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
	β. η f δεν αλλάζει είδος κυρτότητας στο x_0
2. 	**γ.** η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο R

Πίνακας ΙΙ

1	2

8. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι στις ασύμπτωτές της (αν υπάρχουν), που γράφονται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

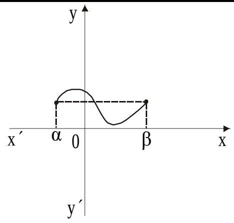
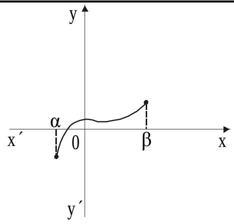
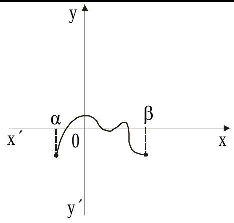
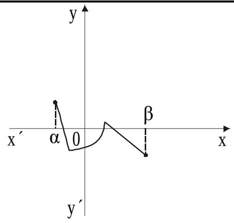
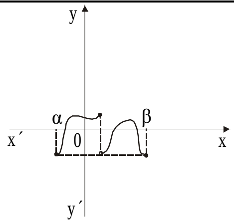
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$	**α.** κατακόρυφη $x = 1$ οριζόντια $y = -2$
	β. δεν υπάρχουν
2. $f(x) = \dfrac{3x^3+5x^2+7}{x^2+1}$	**γ.** κατακόρυφη $x = 2$ οριζόντια $y = 1$
3. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6$	**δ.** πλάγια $y = 5x + 3$
	ε. πλάγια $y = 3x + 5$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	**στ.** κατακόρυφη $x = 0$ οριζόντια $y = 0$

Πίνακας ΙΙ

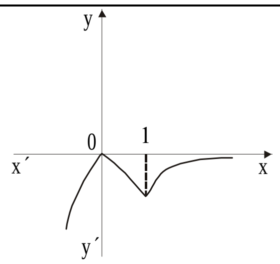
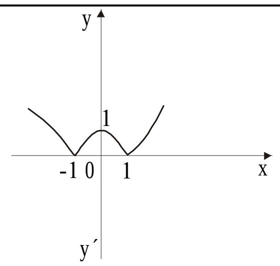
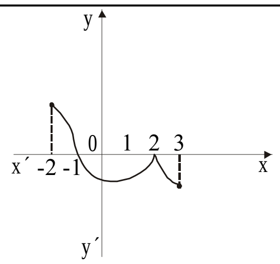
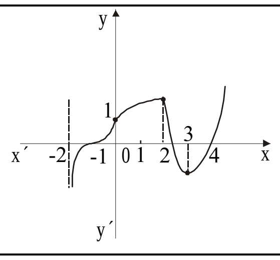
1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

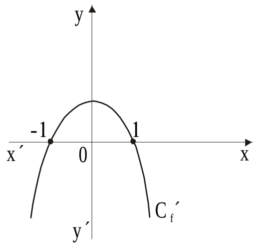
1. ***** Να συμπληρώσετε κάθε στήλη του παρακάτω πίνακα με ΝΑΙ αν ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα ή με ΟΧΙ αν δεν ισχύει:

Γραφική παράσταση	***Θεώρημα Bolzano***	***Θεώρημα Rolle***	***Θεώρημα μέσης τιμής***
			
			
			
			
			

2. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Γραφική παράσταση συνάρτησης f	***Πίνακας Μεταβολών συνάρτησης f***
	
	
	
	

3. ***** Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης f.

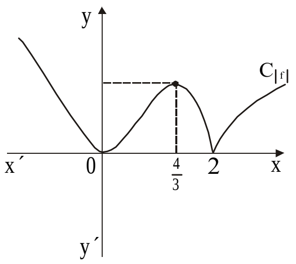


α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα για τη μονοτονία της f:

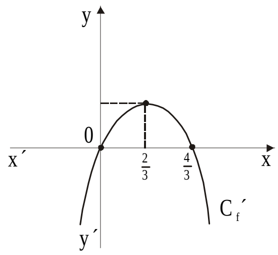
x	- ∞	+ ∞
f ΄ (x)		
f (x)		

β) Να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική παράσταση της f.

4. ***** Στα σχήματα Ι και ΙΙ έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των |f| και f ΄ αντίστοιχα. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

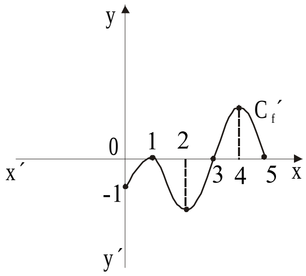


Ι



ΙΙ

5. ***** Η γραφική παράσταση C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f ΄					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f ΄					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμπής της f					

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Να διατάξετε με αύξουσα σειρά τις τετμημένες των ακροτάτων και των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^3 (x + 1)^3$.

2. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$ και τα διαστήματα [-2, -1], [- 1, 0], [0, 1], [1, 2]. Να βρείτε τους αριθμούς ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα παραπάνω διαστήματα. Να διατάξετε τους παραπάνω αριθμούς με φθίνουσα σειρά.

3. ***** Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στο R και $x_1 < x_2$, να διατάξετε τους αριθμούς $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της $f\,'$.

β) Αν η $f\,'$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $f\,'$ περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

2. ****** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο [1, 20] για τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 20)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

3. ****** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει
$f\,'(x) = g(x) \qquad (1).$

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο (- 2, - 2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

4. ****** α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu}$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει $\dfrac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

5. ****** Να αποδειχθεί ότι ημ (α + h) < ημα + hσυνα, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

6. ****** Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και μια ευθεία (ε) με εξίσωση y = αx + β, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν x_1, x_2, x_3 οι τετμημένες των σημείων αυτών (με $x_1 < x_2 < x_3$):

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και δέχεται σε δυο σημεία της γραφικής της παράστασης παράλληλες εφαπτομένες, τότε η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

7. ****** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και οι αριθμοί f (α), $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, f (β) είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$ και $\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.

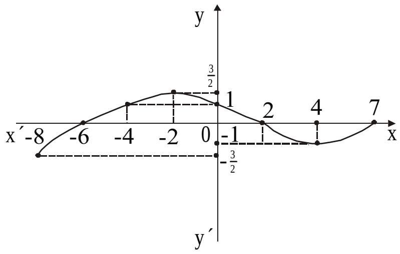
β) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

8. ****** Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:
$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, για κάθε $x \in R$.

9. ****** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η f ΄ μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο R; Αν τα σημεία, για τα οποία δεν γνωρίζουμε ότι έχουν παράγωγο μηδέν, είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα;

Σημείωση: *Η παραπάνω άσκηση μπορεί να αποτελέσει θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη.*

0. ****** Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το [- 8, 7], της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



α) Να μελετήσετε το πρόσημο της f (x).

β) Να λύσετε την ανίσωση f (x) > 1.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f ΄ (x) και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f (x).

δ) Αν g (x) = $e^{f(x)}$ και h (x) = ln [f (x)], x ∈ (- 6, 2), να εξετάσετε τις g, h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

11. ****** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, + ∞) με f (0) = 0.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g (x) = $\frac{f(x)}{x}$, x > 0, είναι παραγωγίσιμη στο (0, + ∞).

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει g ΄ (x) = $\frac{1}{x}$ (f ΄ (x) - $\frac{f(x)}{x}$).

γ) Αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞), να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞).

12. ****** Ένα πολυώνυμο P (x) ικανοποιεί τη σχέση P (x) = P ΄ (x) + x^3.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο P (x).

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

13. ****** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, x ∈ R, έχει μία μόνο λύση.

14. ** Δίνονται τα πολυώνυμα P (x) και Q (x), ώστε P (x) $\neq$ Q (x) και P ΄΄ (x) $\neq$ Q ΄΄ (x) για κάθε x $\in$ R. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση P ΄ (x) = Q ΄ (x) έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του S (x) = P (x) - Q (x).

15. ** Έστω ότι $x^{\alpha} \geq \alpha^{x}$ (α > 0) για κάθε x > 0. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι α = e.

16. ** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [0, 6]. Αν η C_f περνά από το σημείο A (0, 1) και ισχύει: f ΄ (x) > x για κάθε x $\in$ [0, 6], να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 6].

β) g (x) > 0, x $\in$ [0, 6].

γ) το σημείο B (6, 18) δεν ανήκει στη C_f.

17. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, x $\in$ R και g (x) = lnx, x > 0.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία y = x.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την y = x.

δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2$, α $\neq$ 0.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$.

19. ****** Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση $Π_0$ χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:

$Π_1(t) = Π_0 + t\,e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και $Π_1$ η πίεση

$Π_2(t) = Π_0 + t^2 e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και $Π_2$ η πίεση

Να βρείτε:

α) Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.

β) Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.

20. ****** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο R, για την οποία ισχύει: $xe^x f''(x) + xe^x (f'(x))^2 = e^x - 1$, για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \neq 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

β) Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

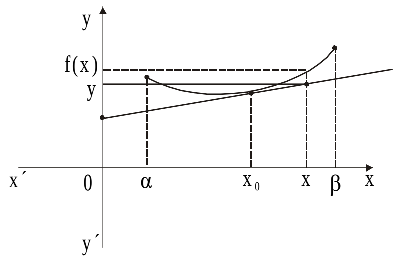
21. ****** Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2, να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

22. ****** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται στο [α, β], πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in$ [α, β] με εξαίρεση το σημείο επαφής.



23. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα - κυρτά και τα σημεία καμπής.

δ) Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $y = 2x$.

ε) Να βρείτε ένα σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.

24. ** α) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

25. ** Να γίνει η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ κοντά στο σημείο $x = -1$ αν ισχύουν συγχρόνως:

$f(-1) = 2, \quad f'(-1) = -1, \quad f''(-1) = 0, \quad f'''(x) > 0.$

26. ** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x + 1$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot ημx}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

27. ** Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + κx^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;

28. ** Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ’ ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;

29. ** Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(α) = f(β) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (α, β)$.

30. ****** Ένα δοχείο γεμίζει με νερό. Ο όγκος V (t) του νερού στο δοχείο μετά t sec δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = \frac{2}{3}\left(20t^2 - \frac{t^3}{6}\right), \quad 0 \le t \le 120$$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου, όταν t = 20 sec.

β) Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;

31. ****** Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3$

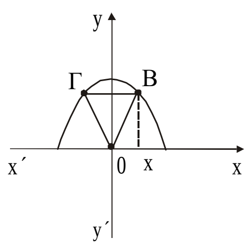
(η πραγματική τιμή είναι $-\frac{5}{3}$).

32. ****** Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο $E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}\,[2(\upsilon - 35)^2 + 750]$, $\upsilon > 0$, όπου υ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.

α) Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.

β) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

3. ****** Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΓ.



α) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.

β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;

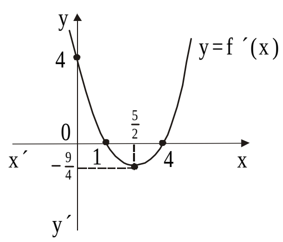
34. ****** Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση με το χρόνο t. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t-2}$, t > 2:

α) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ισχύει f (3) = 4.

β) Μέχρι ποια χρονική στιγμή θα ισχύει f (t) > 1;

35. ****** Έστω f (x) = x^2 (3 - x), όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

36. ****** Η γραφική παράσταση C_{f}' της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

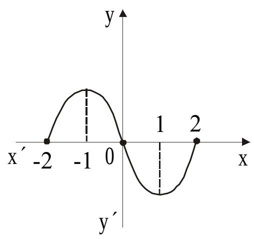


α) Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν f (0) = 1.

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

37. ****** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:



α) f ΄ (x) = 0 β) f ΄ (x) < 0 γ) f ΄ (x) > 0

38. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^2$, $α > 0$. Στο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $x_1 > 0$ φέρνουμε εφαπτομένη (ε) που τέμνει τον x΄x στο Τ. Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Ν πάνω στον x΄x ώστε ΜΡ ⊥ x΄x και ΜΝ ⊥ (ε).

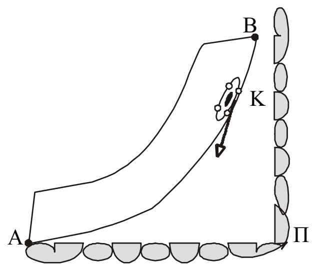
α) Να δείξετε ότι:

i) $ΟΡ = 2ΤΡ$ ii) $ΤΡ = \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

iii) $ΡΝ = f(x_1)\cdot f'(x_1)$ iv) $ΤΜ = \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x_1)\right)^2}$

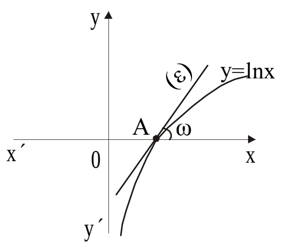
β) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ το ΤΡ είναι σταθερό. Για ποια εκθετική συνάρτηση ισχύει $ΤΡ = \dfrac{1}{2}$.

γ) Το κομμάτι ΑΒ της πίστας δοκιμών αυτοκινήτων που αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο Α. Στο σημείο Κ, που απέχει από το προστατευτικό διάζωμα ΑΠ 40 μέτρα, το αυτοκίνητο Κ εκτρέπεται λόγω της πολύ μεγάλης ολισθηρότητας, κινείται σχεδόν ευθύγραμμα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης. και προσκρούει στο διάζωμα ΑΠ σε απόσταση 8 μέτρα από το Α. Ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση του τμήματος ΑΒ;

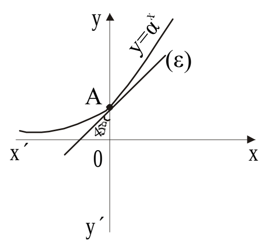


Σημείωση: *Η προηγούμενη άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για ανάπτυξη και άλλων ερωτημάτων όπως για παράδειγμα αν ισχύουν οι ίδιες σχέσεις και για παραβολή της μορφής* $y^2 = αx$ ($y = κ\sqrt{x}$).

39. ****** Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία ω και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό α. (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f).



(α)



(β)

40. ****** Ένα κέντρο έρευνας για την ασφάλεια των αυτοκινήτων εξετάζει το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα διακρίνει ένα εμπόδιο μέχρι την ακινητοποίησή του. Οι ερευνητές κατέληξαν σε μια σχέση της μορφής $3K\dfrac{ds}{dt} - e^t s^2 = 0$ όπου t ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο, Κ μια σταθερά που εξαρτάται από το μοντέλο και παριστάνει το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα πατήσει φρένο μέχρι την ακινητοποίησή του (υποτίθεται ότι στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε για όλα τα αυτοκίνητα ταχύτητα 80 km/h).

α) Να βρείτε τη συνάρτηση s (t) χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική συνθήκη.

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

γ) Κάποιος γνωρίζει ότι ο χρόνος αντίδρασής του είναι 0,8 sec. Πόση απόσταση πρέπει να κρατά από ένα προπορευόμενο αμάξι όταν τρέχει με υ = 80 km/h;

41. ****** Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σε έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωστών επιλογών r (σε μια εβδομάδα) βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο $r(t) = \dfrac{13}{1 + 25e^{-0,24t}}$ (t εβδομάδες εκπαίδευσης).

α) Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.

β) Τι θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα;

42. ****** Ο υπολογιστής τσέπης για να υπολογίσει τις δυνάμεις του αριθμού e, δηλαδή τις τιμές του e^x, χρησιμοποιεί το άθροισμα $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$ (στην ουσία χρησιμοποιεί πολύ περισσότερους προσθετέους).

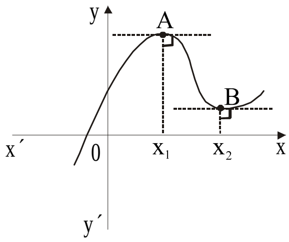
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ η προσέγγιση του υπολογιστή είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του e^x.

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $24e^x = 12x^2 + 4x^3 + x^4$, $x \geq 0$ έχει λύση.

γ) Να δείξετε ότι για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του e^x, $x > 0$, έχουμε ολοένα μεγαλύτερο σφάλμα.

43. ****** Μια συνάρτηση f έχει $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$. Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές για τα $f(0, 1)$ και $f(-0,05)$.

44. ** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + κx^2 + x + λ$, $κ, λ \in R$.



Να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

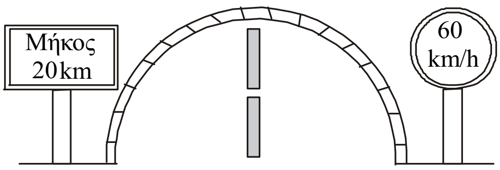
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x - α)^ν + x^ν$, $α \in R$ και $α > 0$, $ν \in N^*$, $ν = 2ρ$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.

46. ** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα Δ. Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in Δ$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in Δ$.

47. ****** Το παρακάτω σχήμα παριστάνει την είσοδο μιας σήραγγας του εθνικού οδικού δικτύου. Όταν η κίνηση είναι αυξημένη παρατηρείται «μποτιλιάρισμα» των αυτοκινήτων στη σήραγγα αυτή. Μια ομάδα συγκοινωνιολόγων μελέτησε τη ροή f των αυτοκινήτων για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και κατέληξε σε έναν τύπο ο οποίος εκφράζει τη ροή (πλήθος αυτοκινήτων / sec) σαν συνάρτηση της ταχύτητας υ των αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα. Ο τύπος είναι $f(\upsilon) = \dfrac{22\upsilon}{\upsilon + \dfrac{\upsilon^2}{22} + 73}$.



α) Ποιες επεμβάσεις προτείνετε στη σήμανση που υπάρχει στην είσοδο της σήραγγας;

β) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ροή αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα;

48. ****** Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$, $x \in R$, διαφέρουν κατά μία σταθερά. Να βρεθεί αυτή η σταθερά.

49. ****** Η κατανάλωση ενός φορτηγού που τρέχει με σταθερή ταχύτητα υ είναι $1 + \dfrac{\upsilon^2}{300}$ lt πετρέλαιο την ώρα, το πετρέλαιο κοστίζει 150 δρχ. το lt και η αμοιβή του οδηγού είναι 4.000 δρχ. την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς, καθώς και τα έξοδα της μεταφοράς για μια απόσταση 500 km.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΡΟΣ Β΄

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Λ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Λ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Σ

24.	Λ
25.	Λ
26.	Λ
27.	Λ
28.	Σ
29.	Λ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Λ
33.	Σ
34.	Λ
35. α)	Σ
β)	Σ
γ)	Σ
36.	Σ
37.	Λ
38.	Λ
39.	Σ
40.	Σ
41.	Σ
42.	Σ

43.	Λ
44.	Σ
45. α)	Σ
β)	Λ
γ)	Σ
46.	Λ
47.	Σ
48.	Σ
49.	Σ
50.	Σ
51.	Λ
52.	Λ
53.	Σ
54.	Λ
55.	Σ
56.	Σ
57.	Λ
58.	Σ
59.	Σ
60.	Λ
61.	Σ
62.	Σ
63.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β
2.	Δ
3.	Ε
4.	Β
5.	Β
6.	Γ
7.	Β
8.	Γ
9.	Γ

10.	Γ
11.	Ε
12.	Γ
13.	Β
14.	Ε
15.	Ε
16.	Α
17.	Δ
18.	Β
19.	Β

20.	Β
21.	Δ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Β
27.	Δ
28.	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	γ, δ
3	γ, δ, ε

2.

1	ε
2	α
3	γ
4	β
5	δ

3.

1	ε
2	δ
3	γ
4	θ

4.

1	δ
2	β
3	γ
4	α

5.

1	γ
2	δ
3	β
4	στ

6.

1	β
2	δ
3	ε
4	α

7.

1	α
2	β

8.

1	γ
2	ε
3	β
4	στ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-1 < -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$

2. $\xi_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}} < \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_4 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

3. $f'(x_2) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_1)$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** Θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ **β)** απαγωγή σε άτοπο

2. **β)** $f'(\xi) = \frac{\log 20 - \log 1}{19}$

3. **β)** $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \kappa$ με $\kappa = 6$ **γ)** $f'(x) \neq 0$

4. **α)** Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$ **β)** πράξεις στο (α)

5. Η ανισότητα γράφεται $\frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{(\alpha + h) - \alpha} < \sigma\upsilon\nu\alpha$ και Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \eta\mu x$ στο $[\alpha, \alpha + h]$.

6. **α)** Θ.Μ.Τ. στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, προκύπτει $f'(\xi_1) = \alpha$
β) εφαρμογή του (α)

7. **α)** Θ.Μ.Τ. σε δύο κατάλληλα διαστήματα

β) Θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ που έχει προκύψει από το (α)

8. Η $f(x) = ημ^6x + συν^6x + 3ημ^2x\, συν^2x$ είναι σταθερή

9. Για $x > x_0$ $f(x) = c_1$, για $x < x_0$ $f(x) = c_2$, λόγω συνέχειας

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = c_1$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = c_2$, άρα $c_1 = c_2 = f(x_0)$

11. **γ)** $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$ από το Θ.Μ.Τ. με $\xi \in (0, x)$

12. **α)** $\nu = 3$ **β)** $x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ **γ)** μία μόνο **δ)** αρνητική

13. $x = 0$ και η $f(x) = (x - 2000)^{2000} - x^{2000} - 2000^{2000}$ είναι γνησίως μονότονη ($f'(x) \neq 0$)

14. Έστω $S(x) = P(x) - Q(x)$ αν $S(x)$ περιττού βαθμού προκύπτει άτοπο

15. Η $f(x) = x^{\alpha} - \alpha^{x}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο α

16. **β)** $g(0) = 1$ και $g \uparrow$ **γ)** $g(6) = f(6) - 18 \geq 1$ άρα $f(6) \geq 19$

17. **α)** $e^x \geq x + 1 > x$ και $\ln x \leq x - 1 < x$

β) $d = \dfrac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{e^{x_0} - x_0}{\sqrt{2}}$ και $d_{min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, αφού $e^{x_0} \geq x_0 + 1$

γ) Μ (0, 1)

δ) οι C_f, C_g είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$

19. **α)** $\Pi_2'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ $\Pi_1'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$

β) το δεύτερο

20. **α)** $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) > 0$, αφού $e^{x_0} - 1$ και x_0 ομόσημα για κάθε $x \in R$

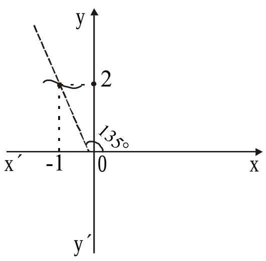
β) $f''(x) = \dots$ είναι συνεχής και $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} f''(x) = 1 > 0$

21. **α)** $x_0 = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$ **β)** $\beta^2 = 3\alpha\gamma$

22. Αρκεί $f(x) > y$ ή $f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ και περιπτώσεις για $x > x_0$ και $x < x_0$

24. **α)** $g''(x) > 0$ **β)** $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

25.



26. Διαίρεση αριθμητή και παρονομαστή με x^2. Το όριο είναι 3

27. $\kappa = -3$

28. Η χορδή που απέχει από το Α $\dfrac{3}{2}\rho$

(Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho$ και η εφαπτομένη στο $(0, \rho)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας)

29. Θεώρημα Rolle στο (α, β), υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, δηλαδή $f(\xi)$ μέγιστο

30. **α)** 400 **β)** $t = 80$

31. Στο δεύτερο βήμα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος L' Hospital

32. **α)** $\upsilon = 40$ **β)** Ε (40) = 20 μονάδες ενέργειας

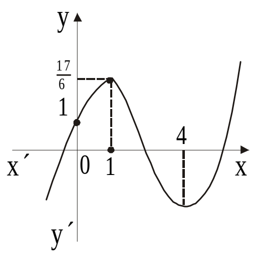
33. **α)** $E = \dfrac{48x - x^3}{14}$ $B\left(4, \dfrac{16}{7}\right)$ $\Gamma\left(-4, \dfrac{16}{7}\right)$

β) $E = \dfrac{64}{7}$

34. **α)** $f(t) = \ln(t - 2) + 4$ **β)** $t > 2 + e^{-3}$

35. $x = 2$ $f(2) = 4$

36. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + 1$



37. **α)** $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ **β)** $-1 < x < 1$ **γ)** $-2 < x < -1$ ή $1 < x < 2$

38. **β)** ΤΡ = 1 για την e^x και αν ΤΡ = $\dfrac{1}{2}$ $\alpha = e^2$

γ) ΑΤ = 8 άρα το ΟΤ του (α) ερωτήματος είναι 8, δηλαδή ΟΡ= 16 επομένως

$f(16) = 40$, δηλαδή $\alpha \cdot 16^2 = 40$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση $y = \dfrac{40}{16^2}x^2$

39. **(α)** $\omega = 45°$ **(β)** $\alpha = e$

40. **α)** $\left(-\dfrac{1}{s(t)}\right)' = \left(\dfrac{e^t}{3\kappa}\right)'$. Άρα $s(t) = \dfrac{3\kappa}{-e^t + 4}$ αφού για $t = 0$ $s(t) = \kappa$

β) $s'(t) > 0$ άρα $s(t) \uparrow$, δηλαδή μεγαλύτερος χρόνος αντίδρασης μεγαλύτερο διάστημα ακινητοποίησης

γ) $s(0,8) = 1{,}7\kappa$

41. **α)** $r'(t) > 0$, δηλαδή $r(t) \uparrow$

β) $\lim\limits_{t \to +\infty} r(t) = 13$

42. **α)** $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{24}$, $x > 0$, τότε $f^{(3)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f^{(2)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f'(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f \uparrow$ με $f(x) > 0$

β) αδύνατη

γ) η f είναι $\uparrow$ και δίνει τη διαφορά του e^x από το άθροισμα

43. $(f(x) + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$ για $x = 0$ και $\Delta x = 0{,}1$

$f(0,1) \approx 1{,}2$ ενώ με όμοιο τρόπο $f(-0{,}05) \approx 0{,}9$

44. x_1, x_2 είναι οι ρίζες της $3x^2 + 2\kappa x + 1 = 0$

45. **β)** σύγκριση των $f(0)$ και $f(2)$

46. $f'(x_0) = g'(x_0)$

47. **α)** $f'(\upsilon) = 0$ τότε $\upsilon \approx 40$, άρα η σήμανση πρέπει να γίνει 40 km/h

β) $f(40) \approx 5$ αυτ/sec

48. $f'(x) = g'(x)$ άρα $f(x) = g(x) + c$ για $x = 0$ $c = 4$

49. Σε t ώρες έξοδα καυσίμου $150\left(1 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)t$, αφού θα κινηθεί επί $t = \frac{500}{\upsilon}$.

Άρα θεωρούμε την $K(t) = 150\left(1 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)t + 4.000t$

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων, ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου τμήματος στο οποίο απευθύνεται.

Σ Χ Ε Δ Ι Ο Κ Ρ Ι Τ Η Ρ Ι Ο Υ Α Ξ Ι Ο Λ Ο Γ Η Σ Η Σ

Κεφάλαιο 2ο: **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ** **ΜΕΡΟΣ Β΄**

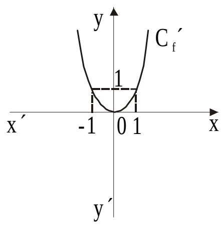
1. Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο R και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν $f\,΄(x) = g\,΄(x)$ για όλα τα $x \in$ R, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε $f(x) = g(x)$, για όλα τα $x \in$ R;

Α. f και g συνεχείς στο R **Β.** $f(0) = g(0)$

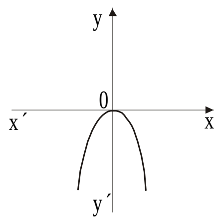
Γ. $f\,΄΄(x) = g\,΄΄(x) + c$ **Δ.** $f\,΄΄(0) = g\,΄΄(0)$

Ε. δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

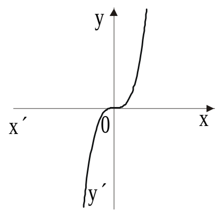
2. Η γραφική παράσταση $C_f΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



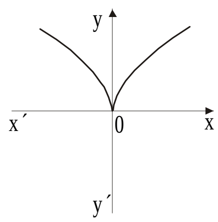
Α.



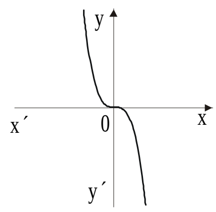
Β.



Γ.

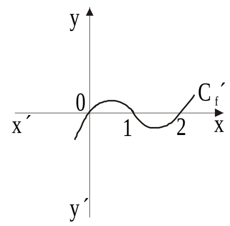


Δ.



Ε. καμία από τις προηγούμενες

3. Το διάγραμμα $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1]

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2]

Γ. η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με x = 0

Δ. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 1

Ε. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 2

4. Η συνάρτηση f ορίζεται σε διάστημα Δ και $x_0 \in$ Δ. Θεωρούμε τις προτάσεις:

Ι. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο Α $(x_0, f(x_0))$

ΙΙ. Η f ΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

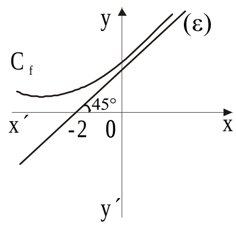
ΙΙΙ. Η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

Τότε το Α $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις

Α. Ι και ΙΙ　　**Β.** Ι και ΙΙΙ　　**Γ.** ΙΙ και ΙΙΙ

Δ. μόνο η ΙΙΙ　　**Ε.** μόνο η Ι

5. Η ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Τότε ισχύει ότι

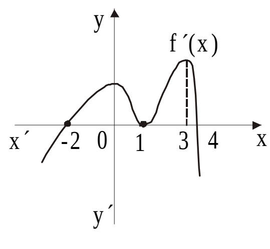


Α. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$　　**Β.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

Γ. $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$　　**Δ.** $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$

Ε. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

6. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f στο R. Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει



Α. στο διάστημα [- 2, 0] η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Β. στο διάστημα [1, 3] ισχύει f ΄΄(x) = 0

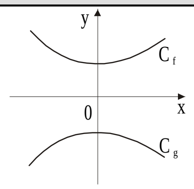
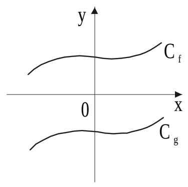
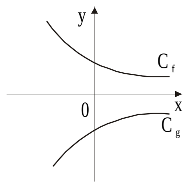
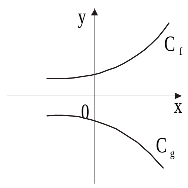
Γ. στο διάστημα [0, 1] η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Δ. στο διάστημα [- 2, 1] η f είναι γνησίως φθίνουσα

Ε. όλα τα παραπάνω

7. Σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα Ι. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ (οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R).

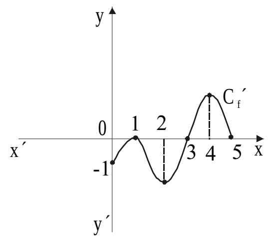
Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(f(x) - g(x))' > 0$	**α.** 
2. $(f(x) - g(x))' = 0$	**β.** 
3. $(f(x) - g(x))' < 0$	**γ.** 
4. $(f(x) - g(x))' > 0$, για $x > 0$ και $(f(x) - g(x))' < 0$, για $x < 0$	**δ.** 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

8. Η γραφική παράσταση C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f ΄					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f ΄					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμπής της f					

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2,\ \alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$.

10. Ένα δοχείο γεμίζει με νερό. Ο όγκος V (t) του νερού στο δοχείο μετά t sec δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = \frac{2}{3}\left(20t^2 - \frac{t^3}{6}\right),\ \ 0 \leq t \leq 120$$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου, όταν t = 20 sec.

β) Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;

11. Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L’ Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2}{2x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$ (η πραγματική τιμή είναι $-\frac{5}{3}$).

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η συνάρτηση F (x) = xlnx - x είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f (x) = lnx. **Σ** **Λ**

2. * Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

3. * Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c. **Σ** **Λ**

4. * Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$ **δεν** έχει παράγουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. **Σ** **Λ**

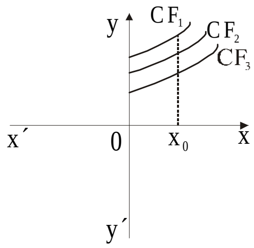
5. * Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει ο τύπος $\int f'(x)\, g'(x)\, dx = f'(x)\, g(x) - \int f''(x)\, g(x)\, dx$. **Σ** **Λ**

6. * Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει $\int (f(x)\, g(x))'\, dx = f(x)\, g(x) + c$. **Σ** **Λ**

7. * Ισχύει: $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$. **Σ** **Λ**

8. * Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τότε θα ισχύει: $\int f''(x)\, dx = f'(x) + c$. **Σ** **Λ**

9. * Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών F_1, F_2, F_3 μιας συνάρτησης f, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, έχουν παράλληλες εφαπτομένες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0. **Σ** **Λ**



0. * Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $F(x) = e^x + c$, έχουν εφαπτόμενες παράλληλες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0. **Σ** **Λ**

1. * Ισχύει: $\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \int (f(x)\,g(x))\,dx$. **Σ** **Λ**

2. * Για $x < 1$ το $\int \frac{dx}{x-1}$ είναι ίσο με $\ln(1 - x) + c$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $f(t) = \int_\alpha^t x\sqrt{x^2 - 2x}\,dx$, τότε $\int_\alpha^t x^2\sqrt{x^2 - 2x}\,dx = x \cdot f(t)$. **Σ** **Λ**

4. * Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 1}\,dx = \frac{\int_\alpha^\beta (x^2 - 4x)\,dx}{\int_\alpha^\beta (x^3 + 1)\,dx}$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$, τότε $\int f'(x) \cdot g'(x)\,dx = x + c$. **Σ** **Λ**

16. * Ισχύει: $\int_0^\alpha x f'(x)\,dx = \alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x)\,dx$. **Σ** **Λ**

17. * Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f(x)\,dx = 0$. **Σ** **Λ**

8. * Ισχύει: $\int_\beta^\alpha f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int_\beta^\alpha f'(x)\,g(x)\,dx$. **Σ** **Λ**

9. * Ισχύει: $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$. **Σ** **Λ**

20. * Ισχύει: $\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$. **Σ** **Λ**

21. * Ισχύει: $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\,g'(x)$. **Σ** **Λ**

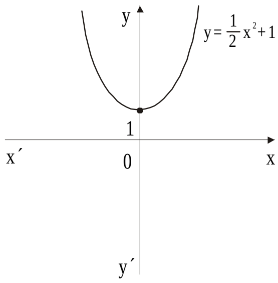
22. * Ισχύει: $\left(\int_x^\alpha f(t)\,dt\right)' = -f(x)$. **Σ** **Λ**

23. * Ισχύει: $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)' = f(h(x))\,h'(x) + f(g(x))\,g'(x)$. **Σ** **Λ**

24. * Η διαφορική εξίσωση y΄ = κy (κ ∈ R) έχει μερική λύση την $y = e^{\kappa x}$. **Σ** **Λ**

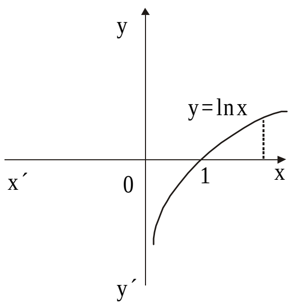
25. * Μια λύση της διαφορικής εξίσωσης y΄ = y είναι η συνάρτηση $y = \frac{1}{2} e^x$. **Σ** **Λ**

26. * Η γραφική παράσταση του σχήματος είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης y΄ = x. **Σ** **Λ**



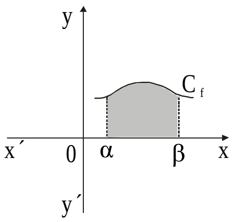
27. * Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = 3$ είναι όλες οι ευθείες με συντελεστή διεύθυνσης λ = 3. **Σ** **Λ**

28. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που παριστάνει το $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. **Σ** **Λ**



29. * Ισχύει $\int_2^4 c\,dx = \int_6^8 c\,dx$, c σταθερά. **Σ** **Λ**

30. * Το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι ίσο με $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + c$, $c \neq 0$. **Σ** **Λ**



31. * Αν f συνεχής στο R και f (10) = 100, τότε ισχύει: $100 = f(0) + \int_0^{10} f'(x)\,dx$. **Σ** **Λ**

32. * Ισχύει: $\int_0^1 \eta\mu x dx = 1 - \sigma\upsilon\nu 1$. **Σ** **Λ**

33. * Αν θεωρήσουμε ότι e ≈ 2,7, τότε ισχύει $\int_0^1 e^x dx = 1{,}7$. **Σ** **Λ**

34. * Αν $A = \int_0^2 f(x)\,dx$, τότε:

α) $\int_0^2 f(\omega)\,d\omega = A$ **Σ** **Λ**

β) $\int_2^0 f(t)\,dt = -A$ **Σ** **Λ**

γ) $\int_0^2 (3f(z) - 4)\,dz = 3A - 8$ **Σ** **Λ**

35. * Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση στο R με περίοδο T, τότε θα ισχύει: $\int_0^T f(t)\,dt = \int_T^{2T} f(t)\,dt$. **Σ** **Λ**

36. * Αν α ≥ β, τότε $\int_\alpha^\beta (e^x + 1)\,dx \geq 0$. **Σ** **Λ**

37. * Αν f (x) > 0, τότε ισχύει $\int_1^{\ln 2} f(x)\,dx > 0$. **Σ** **Λ**

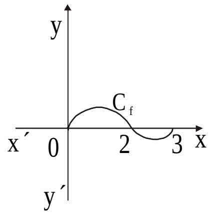
38. * Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$ τότε f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β]. **Σ** **Λ**

39. * Αν f (x) ≤ g (x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε θα ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$. **Σ** **Λ**

40. * Αν α < β, τότε ισχύει ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$. **Σ** **Λ**

41. * Αν η f είναι συνεχής στο [1, 3], τότε ισχύει ότι $\int_1^3 f(x)\,dx < \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$. **Σ** **Λ**

42. * Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι: $\int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx$.

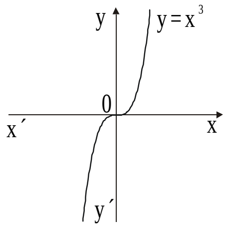


Σ Λ

43. * Ισχύει: $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = 0$.

Σ Λ

44. * Για τη συνάρτηση του σχήματος, ισχύει ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, για κάθε α > 0.



Σ Λ

45. * Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών x = α, x = β.

Σ Λ

46. * Ισχύει: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 4\sigma\upsilon\nu^3 x)\,dx > 0$.

Σ Λ

47. * Ισχύει: $\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln x$, x > 0.

Σ Λ

48. * Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$, τότε f (x) = g (x) για κάθε x ∈ [α, β].

Σ Λ

49. * Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$, ισχύει μόνο εφόσον $\alpha < \gamma < \beta$.

Σ Λ

50. * Ισχύει ο τύπος $\left(\int_x^\alpha f(t)\,dt\right)' = -\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)'$.

Σ Λ

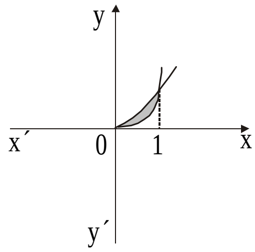
51. * Ισχύει: $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} e^x dx = \beta - \alpha$, α, β > 0.

Σ Λ

52. * Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος δίνεται από τη σχέση:

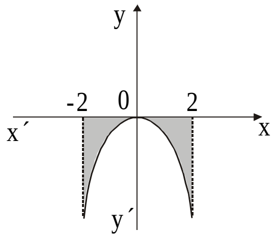
$$E = \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx.$$

(Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα είναι οι $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$).



Σ **Λ**

53. * Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα, ισχύει: $E = -\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.



Σ **Λ**

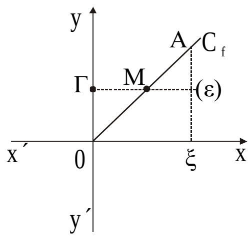
54. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και f (0) = f (1), τότε $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0$.

Σ **Λ**

55. ** Αν $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$, το ελάχιστο της f στο διάστημα [0, 5] δεν μπορεί να είναι 3.

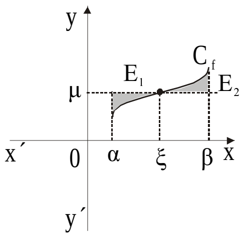
Σ **Λ**

56. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Αν Μ μέσον του ΟΑ και (ε) // x΄x, τότε θα ισχύει: $\int_0^{\xi} f(x)\,dx = (\mathrm{O\Gamma})\,\xi$.



Σ **Λ**

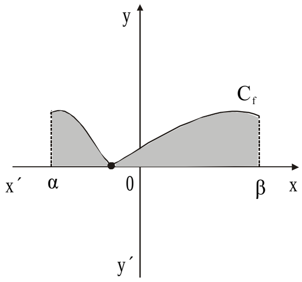
57. * Αν ξ ∈ (α, β) και f (ξ) = μ, όπου μ η μέση τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β], τότε $E_1 = E_2$.



Σ **Λ**

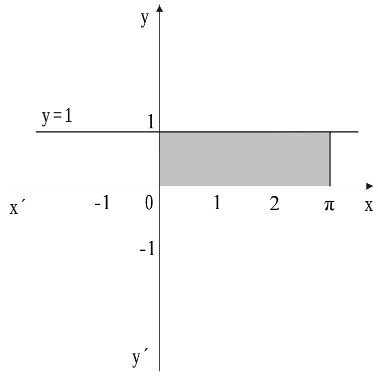
58. ***** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

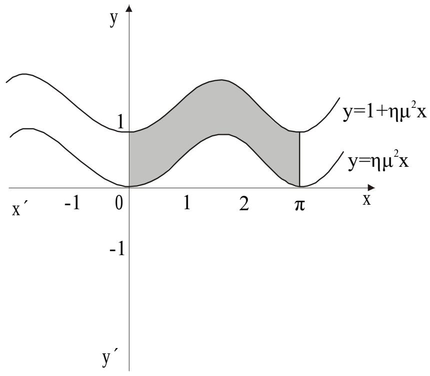


Σ **Λ**

59. ***** Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι μεγαλύτερο από το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2. **Σ** **Λ**



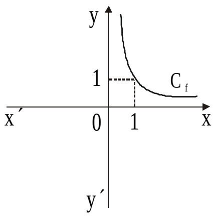
Σχήμα 1



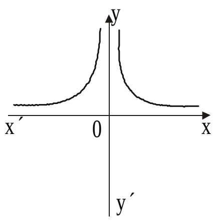
Σχήμα 2

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

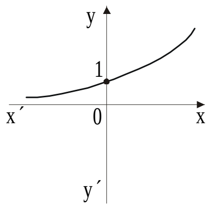
1. ***** Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε μία παράγουσά της μπορεί να έχει γραφική παράσταση την



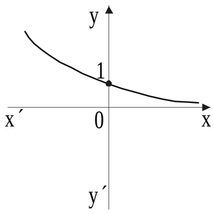
Α.



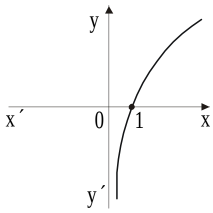
Β.



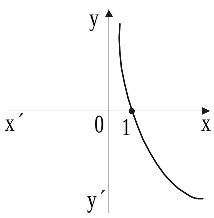
Γ.



Δ.

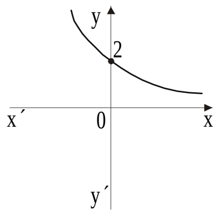


Ε.

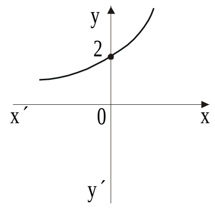


2. ***** Αν f (x) = e^x, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

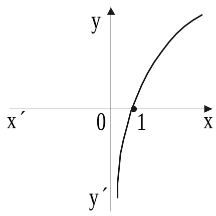
Α.



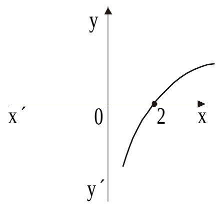
Β.



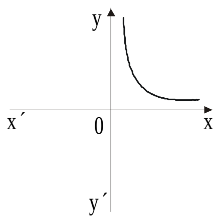
Γ.



Δ.

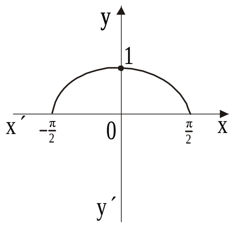


Ε.

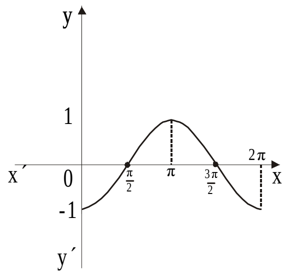


3. ***** Αν F (x) = - ημx είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο [0, 2π], τότε η γραφική παράσταση της f είναι

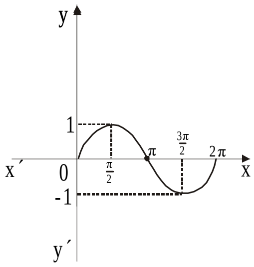
Α.



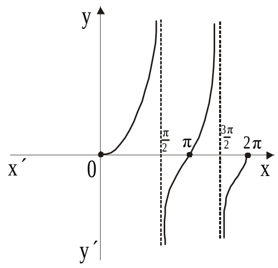
Β.



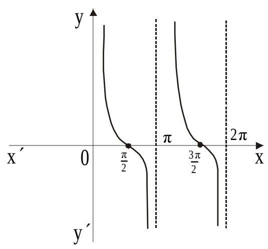
Γ.



Δ.

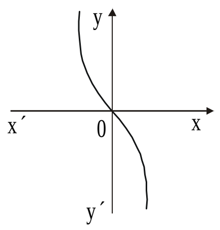


Ε.

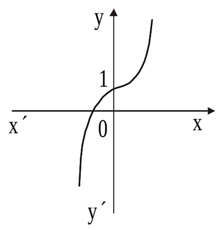


4. * Αν $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι

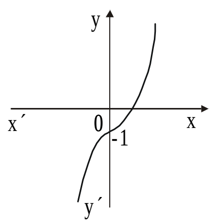
Α.



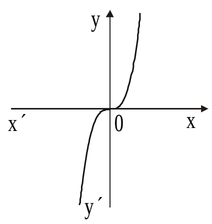
Β.



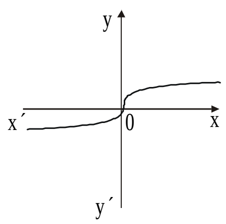
Γ.



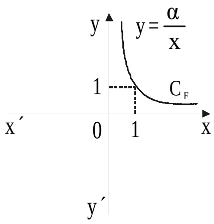
Δ.



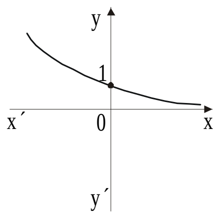
Ε.



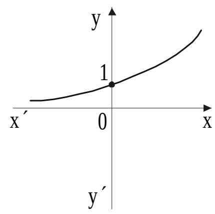
5. ***** Αν μία παράγουσα F μιας συνάρτησης f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι



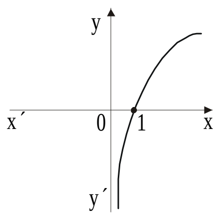
Α.



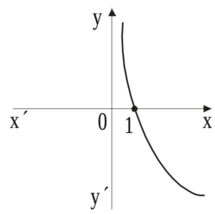
Β.



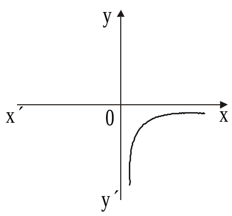
Γ.



Δ.

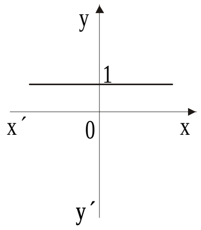


Ε.

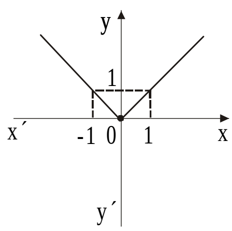


6. ***** Αν f (x) = 1, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

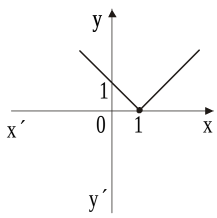
Α.



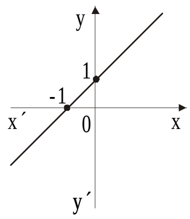
Β.



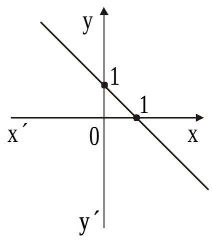
Γ.



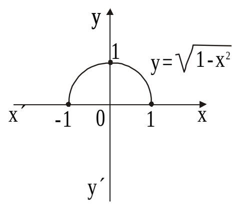
Δ.



Ε.



7. ***** Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ισχύει



Α. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ **Β.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi$

Ε. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi^2$

8. * Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ

Α. είναι αριθμός

Β. είναι μια παράγουσα της f

Γ. είναι το σύνολο των παραγουσών της f

Δ. είναι ίσο με $f\,'(x)$

Ε. είναι ίσο με $f(x) + c,\ c \in R$

9. * Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Τότε ισχύει

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Β. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

Γ. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx$

Δ. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$

Ε. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$

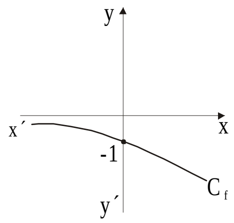
10. * Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1 + e^x}$, $x > 0$, είναι η συνάρτηση

Α. $F_1(x) = \dfrac{x^3 + \ln x}{x + e^x}$ **Β.** $F_2(x) = \dfrac{6x - \frac{1}{x^2}}{e^x}$

Γ. $F_3(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1 + e^x} \right)' dx$ **Δ.** $F_4(x) = \int_{2004}^{x} \dfrac{3t^2 + \frac{1}{t}}{1 + e^t}\,dt$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

1. ***** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, μπορεί να είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης



Α. $y' = x$ **Β.** $y' = y$ **Γ.** $y' = -3$

Δ. $y' = -2x$ **Ε.** $y' = x^3$

12. ***** Η διαφορική εξίσωση $y' = xy$, $y > 0$, έχει μία λύση τη συνάρτηση

Α. $y = e^{x^2}$ **Β.** $y = e^x$ **Γ.** $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ **Δ.** $y = \frac{1}{x}$ **Ε.** $y = \ln x$

13. ***** Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

Α. $\frac{y'}{x^2} = y$ **Β.** $y'y = \frac{1}{x}$ **Γ.** $\frac{y'}{y} = x$

Δ. $y'y = x$ **Ε.** $y^2y' = x^3$

14. ***** Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε μία παράγουσα της f στο Δ είναι η συνάρτηση

Α. $F(x) = \int_{f(x)}^{\alpha} f(t)\,dt$ **Β.** $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Γ. $F(x) = \int_{\alpha}^{f(x)} f(t)\,dt$ **Δ.** $F(x) = \int f(t)\,dt$

Ε. $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)\,du$

15. ***** Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{1}^{e^x} \ln t\,dt$ ισούται με

Α. 0 **Β.** $\frac{1}{x}e^x$ **Γ.** e^x **Δ.** xe^x **Ε.** $\ln x \cdot e^x$

16. ***** Το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta \left(f(x)\,g(x)\right)' dx$ ισούται με

Α. $f'(\beta)\,g(\beta) - f(\alpha)\,g'(\alpha)$ **Β.** $f(\beta)\,g(\beta) - f(\alpha)\,g(\alpha)$

Γ. $(f{\cdot}g)(\alpha) - (f{\cdot}g)(\beta)$ **Δ.** $f(\beta)\,g'(\beta) - f'(\alpha)\,g(\alpha)$

Ε. $2(\beta - \alpha)$

17. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η παράσταση $\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)'$ είναι ίση με

Α. $f(x)$ **Β.** $f(\beta) - f(\alpha)$ **Γ.** $(\beta - \alpha)\,f(x)$ **Δ.** 0

Ε. $F(\beta) - F(\alpha)$ όπου $F(x)$ παράγουσα της f

18. ****** Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon(t) = 2t$ m/sec. Κατά τη διάρκεια του νιοστού δευτερολέπτου το σώμα διάνυσε 9 μέτρα. Ισχύει:

Α. $\nu = 1$ **Β.** $\nu = 3$ **Γ.** $\nu = 4$ **Δ.** $\nu = 5$ **Ε.** $\nu = 10$

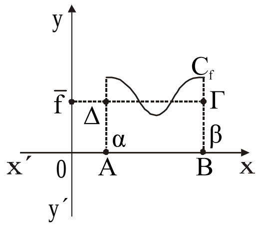
19. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$. Η μέση τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα [- 2, 2] είναι

Α. 1 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** π **Δ.** 2 **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

20. ***** Έστω ότι η συνάρτηση f είναι περιττή. Τότε η μέση τιμή της f στο διάστημα [-α, α] είναι ίση με

Α. 2α **Β.** 0 **Γ.** -2α **Δ.** $\frac{\alpha}{2}$ **Ε.** $-\frac{\alpha}{2}$

21. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Αν $\bar{f}$ είναι η μέση τιμή της f στο διάστημα [α, β], τότε θα ισχύει:



Α. $AB \cdot A\Delta = f(\beta) - f(\alpha)$

Β. $AB \cdot \bar{f} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Γ. $AB \cdot \bar{f} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + c$ **Δ.** $OA \cdot \bar{f} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Ε. όλα τα παραπάνω

22. * Αν $I = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x\,dx$ και $J = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$ και K = I + J, τότε το K είναι ίσο με

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** π **Δ.** 2π **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

23. * Το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f'(g(x))\,g'(x)\,dx$ είναι ίσο με

Α. $f'(g(\beta)) - f'(g(\alpha))$ **Β.** $f(g'(\beta)) - f(g'(\alpha))$

Γ. $f(g(\beta)) - f(g(\alpha))$ **Δ.** $g(\beta) - g(\alpha)$ **Ε.** $f(\beta) - f(\alpha)$

24. * Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β]. Μέση τιμή της συνάρτησης αυτής στο [α, β] ονομάζεται ο αριθμός

Α. $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ **Β.** $\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\alpha - \beta}$ **Γ.** $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

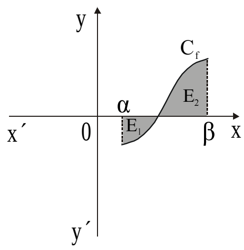
Δ. $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$ **Ε.** $\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\beta - \alpha}$

25. ***** Το $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2} dx$ είναι πάντα

Α. θετικό **Β.** αρνητικό **Γ.** ίσο με το 0

Δ. θετικό αν $\beta > \alpha$ **Ε.** είναι θετικό αν $\beta < \alpha$

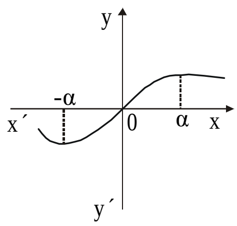
26. ****** Για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με



Α. $E_1 + E_2$ **Β.** $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ **Γ.** $2E_1 + E_2$

Δ. $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ **Ε.** $E_2 - E_1$

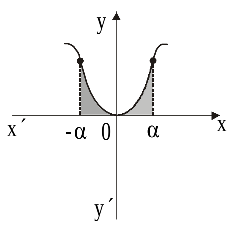
27. ****** Έστω f μια περιττή συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$ είναι ίσο με



Α. 2 **Β.** $2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ **Γ.** 0

Δ. 2α **Ε.** $-2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$

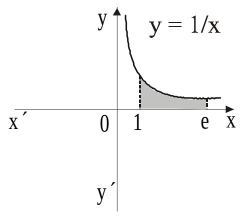
28. ****** Έστω f μια άρτια συνάρτηση. Τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



Α. 2 **Β.** $2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ **Γ.** 0

Δ. 2α **Ε.** $-2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$

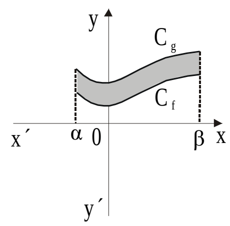
29. ***** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



Α. e **Β.** e - 1 **Γ.** 1

Δ. 1 - e **Ε.** 2e

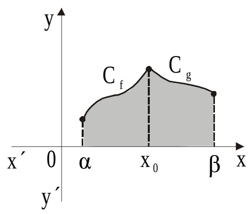
30. ***** Αν g (x) = f (x) + 1, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



Α. $\alpha \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha)$ **Β.** β - α **Γ.** $\alpha \cdot \beta$

Δ. 1 τ.μ. **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

31. ***** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

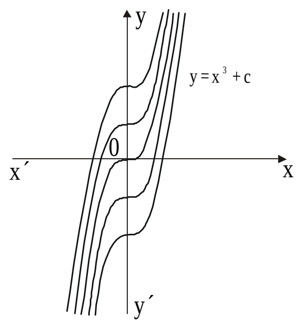


Α. $\int_\alpha^\beta \left(g(x)\, f(x)\right)dx$ **Β.** $\int_\alpha^\beta \left(f(x) - g(x)\right)dx$

Γ. $\int \left(f(x) - g(x)\right)dx$

Δ. $\int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx - \int_\beta^{x_0} g(x)\,dx$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

32. ***** Οι καμπύλες του σχήματος παριστάνουν συναρτήσεις του συνόλου

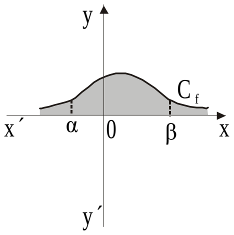


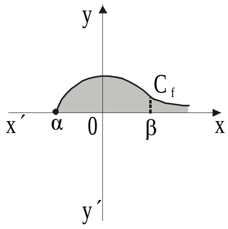
Α. $\int x^3 dx$ **Β.** των παραγουσών της $f(x) = 3x^2$

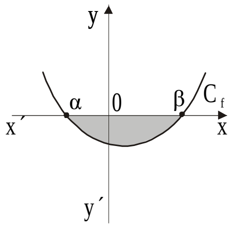
Γ. $\int x^4 dx$ **Δ.** $\int (3x^2 + 2)\,dx$

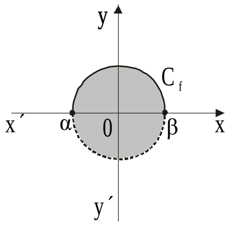
Ε. τίποτα από τα παραπάνω

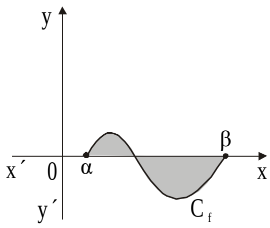
33. ***** Το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ μας δίνει το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος στο σχήμα

Α. 

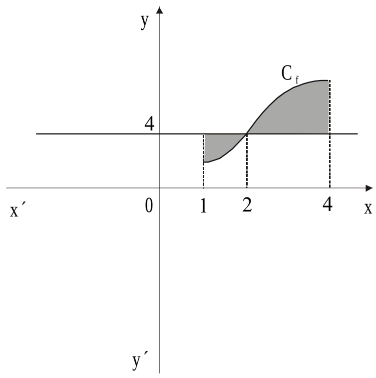
Β. 

Γ. 

Δ. 

Ε. 

34. ***** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α. $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$ **Β.** $\int_{1}^{4} (-f(x))\,dx$

Γ. $\int_{1}^{4} (f(x) - 4)\,dx$ **Δ.** $\int_{1}^{4} (4 - f(x))\,dx$

Ε. $\int_{1}^{2} (4 - f(x))\,dx + \int_{2}^{4} (f(x) - 4)\,dx$

35. ****** Οι συναρτήσεις f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in R$. Από τις παρακάτω προτάσεις:

I. $f'(x) \le g'(x)$ για κάθε $x \in R$

II. $f''(x) \le g''(x)$ για κάθε $x \in R$

III. $\int_0^2 f(x)\,dx \le \int_0^2 g(x)\,dx$

αληθεύουν

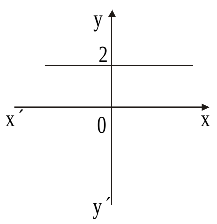
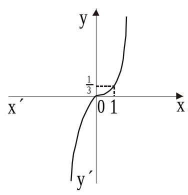
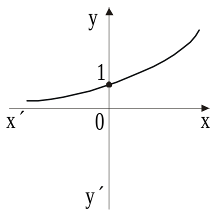
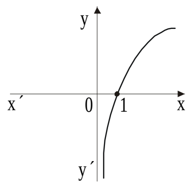
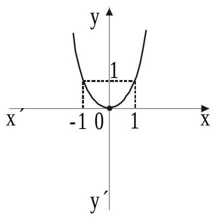
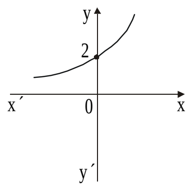
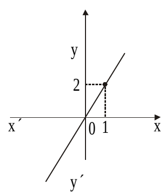
Α. όλες **Β.** καμία **Γ.** μόνο η I

Δ. μόνο η III **Ε.** μόνο οι I και II

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχεί η γραφική παράσταση της παράγουσάς της από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

<table>
<tr><th colspan="2">Στήλη Α</th><th colspan="2">Στήλη Β</th></tr>
<tr><th colspan="2">Συνάρτηση f</th><th colspan="2">Παράγουσα F</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td>α.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td><td>β.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td><td>γ.</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>δ.</td><td>
</td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

2. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι με την παράγωγό της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

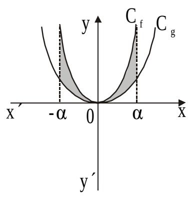
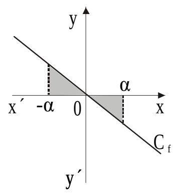
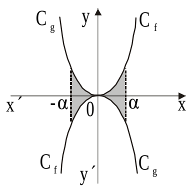
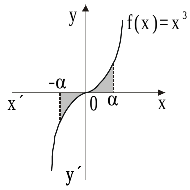
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $F(x) = \int_{-1}^{x+3} \eta\mu(t+2)\,dt$	**α.** $f(x) = -\eta\mu(x+2)$
	β. $f(x) = \eta\mu(x+2)$
2. $F(x) = \int_{\alpha}^{x^2} \ln(u+1)\,du$	**γ.** $f(x) = 2x\ln(x^2+2)$
	δ. $f(x) = \eta\mu(x+5)$
3. $F(x) = \int_{0}^{x} t\ln(t^2+1)\,dt$	**ε.** $f(x) = x\ln(x^2+1)$
	ζ. $f(x) = \ln(x^2+2)$
4. $F(x) = \int_{x+2}^{-1} \eta\mu t\,dt$	**η.** $f(x) = 2x\ln(x^2+1)$
	θ. $f(x) = \eta\mu(x+3)$
5. $F(x) = -\int_{x^2}^{1} \ln(u+2)\,du$	

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**

3. ** Να αντιστοιχίσετε το εμβαδόν κάθε χωρίου που φαίνεται στη στήλη Α του πίνακα Ι στον τύπο που το υπολογίζει και υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α		**Στήλη Β**
1.		**α.** $E = \int_{-\alpha}^{0} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{0}^{\alpha} (f(x) - g(x))\,dx$
		β. $E = \int_{-\alpha}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{\alpha} (g(x) - f(x))\,dx$
2.		**γ.** $E = \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x) - g(x))\,dx$
3.		**δ.** $E = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$
		ε. $E = -2\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$
4.		**ζ.** $E = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

4. * Σε κάθε διαφορική εξίσωση της στήλης Α να αντιστοιχίσετε μια λύση της που υπάρχει στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $y' = y$	**α.** $y = e^{3x}$
2. $yy' = 2x^3 + 2x$	**β.** $y = \frac{1}{3}e^{2x}$
3. $y' = 3y$	**γ.** $y = \frac{1}{3}e^{x}$
4. $y'x^3 = -\frac{1}{y}$	**δ.** $y = x^2 + 1$
	ε. $y = x - \frac{1}{x}$
	ζ. $y = -\frac{1}{x}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

5. ***** Να αντιστοιχίσετε τις διαφορικές εξισώσεις της στήλης Α του πίνακα Ι με τις λύσεις τους στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\dfrac{dQ}{dt} = -\kappa Q,\ \kappa > 0$	**α.** $Q(t) = Q_0 e^{+\kappa t}$
2. $\dfrac{dQ}{dt} = \kappa(B - Q),\ \kappa > 0$	**β.** $Q(t) = Q_0 e^{-\kappa t}$
3. $\dfrac{dQ}{dt} = \kappa Q,\ \kappa > 0$	**γ.** $Q(t) = B + Ae^{-\kappa t}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**

6. ** Στη στήλη Α του πίνακα Ι φαίνονται οι παράγουσες κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι συναρτήσεις αυτές. Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α ***παράγουσα F***	**Στήλη Β** ***συνάρτηση f***
1. $\frac{1}{3}$ συν3x + 3	**α.** $\frac{1}{3}$ ημ3x
	β. $2^x \ln 2$
2. εφx + ln2	**γ.** $\frac{1}{\text{συν}^2 x}$
3. ln |3x - 2| + 2	**δ.** e^{2x+3}
4. e^{2x+3}	**ε.** - ημ3x
5. 2^x	**ζ.** $\frac{3}{3x-2}$
6. $\frac{2^x}{\ln 2}$	**η.** $\frac{2}{3x-2}$
	θ. 2^x
	ι. $2e^{2x+3}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

7. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε κάθε παράγουσα F που υπάρχει στη στήλη Α του πίνακα Ι να αντιστοιχεί η συνάρτηση f από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
παράγουσα F	***συνάρτηση f***
1. $F(x) = x + c$	**α.** $f(x) = εφx$
2. $F(x) = 2\sqrt{x} + c$	**β.** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $F(x) = εφx + c$	**γ.** $f(x) = e^x$
4. $F(x) = -\ln\lvert συνx\rvert + c$	**δ.** $f(x) = \dfrac{1}{συν^2x}$
5. $F(x) = \dfrac{1}{x} + c$	**ε.** $f(x) = 1$
6. $F(x) = x\ln x - x + c$	**ζ.** $f(x) = -\dfrac{1}{ημ^2x}$
	η. $f(x) = \ln x$
	θ. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
	ι. $f(x) = σφx$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ****** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Διαφορική εξίσωση	***Γενική λύση***	***Αρχική συνθήκη***	***Μερική λύση***
$y' = 3x + 2$		$f(0) = 2$	
$y' = ημx$		$f(0) = 1$	
$y' = e^{-x}$		$f(0) = 0$	
$y' = \frac{1}{x}$, $x > 0$		η f διέρχεται από το (1, e)	
$y' = x^2$		$f(0) = -1$	
$y' = 5$		$f(2) = 8$	
$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$		$f(1) = -3$	

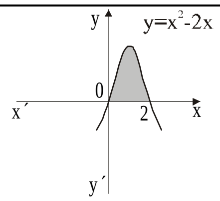
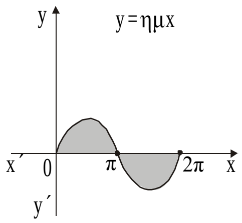
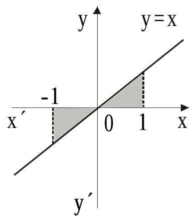
2. ****** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$\int f(x)\,dx$	**F (x) + c**	**(F (x) + c)′ = f (x)**
$\int (2x+5)\,dx$		
$\int (x^3+x^2+1)\,dx$		
$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$		
$\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$		
$\int (2ημx - 3συνx)\,dx$		
$\int \left(\frac{1}{ημ^2x}+\frac{1}{συν^2x}\right)dx$		
$\int (x+1)^9\,dx$		
$\int (x^2-3x+5)^2\,(2x-3)\,dx$		
$\int ημxσυν^3x\,dx$		
$\int xe^{x^2+1}\,dx$		
$\int \frac{1}{2x+1}\,dx$		
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$		
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		

3. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

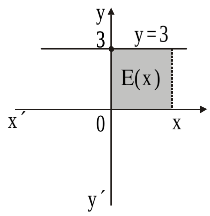
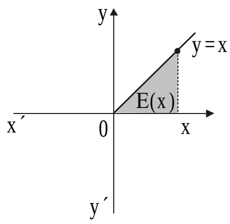
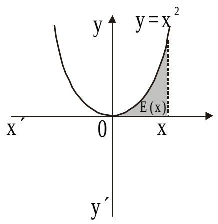
Συνάρτηση f	**Μια παράγουσα της f, F**	$\int_\alpha^\beta \mathbf{f\,(x)\,dx}$
$f\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F\,(x) = 2\sqrt{x}$	$\int_1^2 f\,(x)\,dx = F\,(2) - F\,(1)$
$f\,(x) = ημ2x$		$\int_0^\pi f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = e^{3x}$		$\int_0^1 f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = \dfrac{1}{ημ^2x}$		$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = \ln x$		$\int_1^e f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = \dfrac{1}{x-1}$		$\int_0^{1/2} f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = x^3 + 1$		$\int_{-2}^3 f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$		$\int_1^2 f\,(x)\,dx =$ ……………
$f\,(x) = c$		$\int_\alpha^\beta f\,(x)\,dx =$ ……………

4. ****** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

<table>
<tr><th>Συνάρτηση</th><th>Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου</th><th>μέση τιμή της F</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2"></td><td>στο διάστημα [0, 2]</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="4"></td><td>στο διάστημα [0, π]</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>στο διάστημα [π, 2π]</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="4"></td><td>στο διάστημα [- 1, 0]</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>στο διάστημα [0, 1]</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

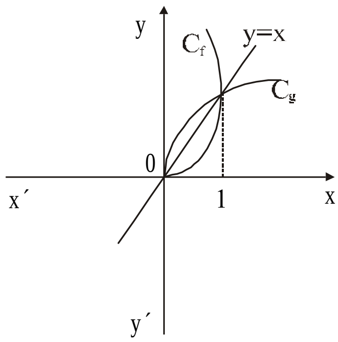
5. * Στη στήλη Α φαίνονται κάποια σκιασμένα χωρία. Να συμπληρώσετε στη στήλη Β τα τμήματα των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης F (x) στο διάστημα [0, 3].

Πίνακας Ι

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Ερωτήσεις διάταξης

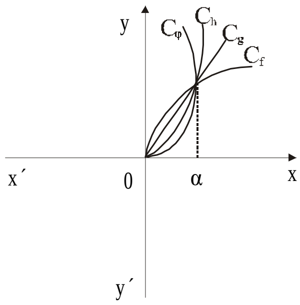
1. ***** Τα παρακάτω ολοκληρώματα αναφέρονται στις συναρτήσεις του διπλανού σχήματος. Να τα γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.



$E_1 = \int_0^1 x dx$ $\qquad$ $E_2 = \int_0^1 f(x) dx$

$E_3 = \int_0^1 g(x) dx$ $\qquad$ $E_4 = \int_0^1 (x - g(x)) dx$

2. ***** Να διατάξετε τη μέση τιμή των συναρτήσεων f, g, h, φ στο διάστημα [0, α] κατά αύξουσα σειρά.



3. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{x-1}^{0} \frac{t}{e^t} dt$. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τις τιμές της συνάρτησης f (1), f (2), f (3).

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο R, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $G(x) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ είναι μια παράγουσα της $h(x) = f(\alpha x + \beta)$, $\alpha \neq 0$ στο R.

2. ****** α) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x - \gamma)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

β) Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας.

3. ****** Αν P (t) είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση $P'(t) = \kappa P(t)$ (1), όπου $\kappa > 0$ σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση P (t) είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:

α) να λύσετε την εξίσωση (1).

β) Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό της Ελλάδας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000, να βρεθεί η σταθερά κ για την Ελλάδα.

γ) Αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες διαβίωσης δεν θα μεταβληθούν σημαντικά, να «προβλεφθεί» ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος 2010.

4. ****** Αν $y = f(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t μιας ραδιενεργού ουσίας, τότε σύμφωνα με το «νόμο της διάσπασης» ισχύει $y' = -\kappa y$ (1), όπου κ θετική σταθερά και t ο χρόνος σε έτη.

α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση (1).

β) Αν ορίσουμε ως «χρόνο υποδιπλασιασμού» το χρόνο T, στον οποίο η αρχική μάζα μειώνεται στο μισό, να αποδείξετε ότι $T = \frac{\ln 2}{\kappa}$ και ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε μάζα μιας συγκεκριμένης ραδιενεργού ουσίας.

γ) Το ραδιενεργό στοιχείο ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Να βρείτε πόση μάζα θα έχει διασπαστεί μετά από 100 χρόνια, αν η αρχική μάζα είναι 5 kgr.

5. ** Προφανώς $\int_{-2}^{1} 2x^2\, dx > 0$. Αλλά $I = \int_{-2}^{1} 2x^2\, dx = \int_{-2}^{1} x \cdot 2x\, dx$ και θέτουμε $u = x^2$, οπότε $du = 2x\, dx$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = 1$ και για $x = -2$ είναι $u = 4$.

Άρα $I = \int_{4}^{1} \sqrt{u}\, du = -\int_{1}^{4} \sqrt{u}\, du < 0$. Πού βρίσκεται το λάθος;

6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{1}^{x} (t^{1997} + t^{1999} + t^{2001} + t^{2003} + t)\, dt$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

7. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\pi/6}^{2x} \frac{\etaμt}{t}\, dt$, με $x > 0$.

α) Να υπολογιστεί η $f'(x)$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

8. ** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x - 1)\int_{2}^{x} \frac{\ln t}{t}\, dt$, $x > 0$.

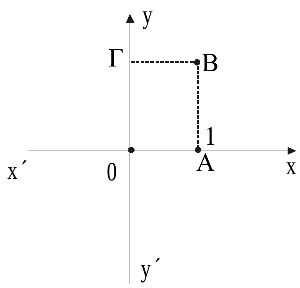
α) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη.

β) Να αποδείξετε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Rolle για την h στο [1, 2].

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\frac{1-\xi}{\xi} \ln\xi = \int_{2}^{\xi} \frac{\ln t}{t}\, dt$.

9. ** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι το $I_\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2\, dx$, $\lambda \in R$, γίνεται ελάχιστο όταν το λ είναι ίσο με τη μέση τιμή $\bar{f}$ της f στο [α, β].

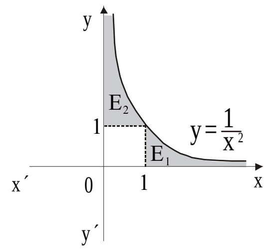
10. ****** α) Να κατασκευάσετε το τμήμα μιας καμπύλης με αρχή πάνω στον άξονα y΄y και τέλος το Β ώστε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών y = 0 και x = 1 να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ. Είναι δυνατόν η καμπύλη να παριστάνει γνησίως μονότονη συνάρτηση;



β) Να παρατηρήσετε ότι η πρόταση: «Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] και ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx = f(1)$ δείξτε ότι η f διαθέτει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου στο διάστημα (0, 1)» απαντά στο ερώτημα (α) και να την αποδείξετε.

Σημείωση: *Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 3 της σελίδας 342 του σχολικού βιβλίου και το ερώτημα (α) ενδείκνυται για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη.*

11. ****** α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2.



β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.: για το E_1: θεωρήστε λ > 1 και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2}\,dx$ και

για το E_2: 0 < λ < 1 και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;

Σημείωση: *Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 9 της σελίδας 353 του σχολικού βιβλίου, αποτελεί πρόταση για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη και απόδειξη ότι συχνά είναι ανάγκη η εποπτεία να ελέγχεται από μαθηματικές μεθόδους.*

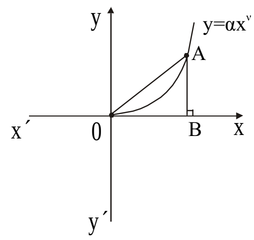
12. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και της $f(x) - x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, $y = x$.

13. ****** Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x^{\nu}$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_1, 0)$. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C_f να χωρίζει το τρίγωνο ΟΑΒ σε δύο ισεμβαδικά χωρία;



14. ****** α) Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις $xy' = 1$, $x > 0$ (1) και $y' + x = 0$ (2).

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε λύσης της (1) και η γραφική παράσταση κάθε λύσης της (2) στο σημείο τομής τους έχουν κάθετες εφαπτόμενες (όπως λέμε τέμνονται κάθετα).

Σημείωση: *Η απόδειξη ότι κάθε λύση της (1) έχει ένα κοινό σημείο με οποιαδήποτε λύση της (2) μπορεί να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον θέμα διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη.*

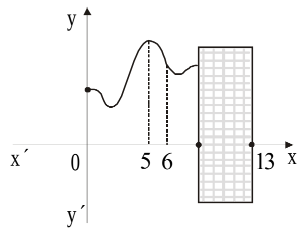
15. ****** Δίνεται η $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\,dt$.

α) Να βρείτε το $f'(0)$.

β) Να βρείτε το $f(1)$.

γ) Να υπολογίσετε το $f''(1)$.

16. ****** Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο [0, 13] και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



α) $\int_5^{12} f'(x)\,dx$ β) $\int_0^{13} f(x)\,dx$ γ) $\int_5^{6} f''(x)\,dx$

Σημείωση: *Η παραπάνω άσκηση αποτελεί θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη. Τα ερωτήματα θα μπορούσαν να αναφέρονται και σε άλλα σημεία του διαστήματος [0, 13] καθώς και σε ορισμένο ολοκλήρωμα της f'''.*

17. ****** α) Η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα [α, β] και είναι γνησίως αύξουσα. Να δικαιολογήσετε γεωμετρικά τη σχέση:

$$(\beta - \alpha)\, f(\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq (\beta - \alpha)\, \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α, β] και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

γ) Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο διάστημα (1, 1,21).

18. ****** Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x = α σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη x = β γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο [α, β], να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f''(x)\,dx$.

19. ** Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία T σε βαθμούς C τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0{,}3t - 0{,}05t^3$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

β) Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

γ) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

20. ** Αν η συνάρτηση f, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx$$

21. ** Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t.

22. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2 < 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού $f(x) \geq 0$.

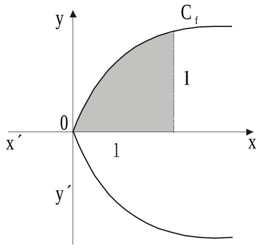
Πού βρίσκεται το λάθος;

23. ** Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}}\,dx$. Γράφουμε:

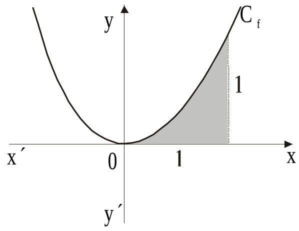
$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2 x}{2}} = \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x\,dx = 0$. Όμως η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}}$ είναι μη αρνητική στο διάστημα [0, π], άρα δεν μπορεί να μηδενιστεί το I.

Πού βρίσκεται το λάθος;

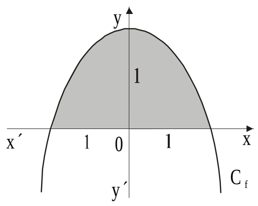
24. ****** Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



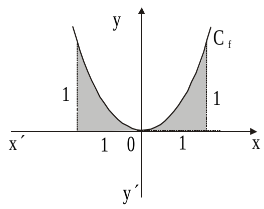
Α



Β



Γ



Δ

25. ****** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

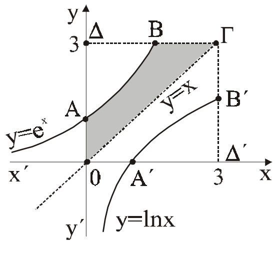
α) $\int_0^{\pi} \eta\mu 2x \, dx = 0$ β) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2} \, dx = \frac{9\pi}{2}$

γ) $\int_1^2 (2x+1) \, dx = 4$ δ) $\int_{1/2}^{5} \ln x \, dx < \int_1^5 \ln x \, dx$

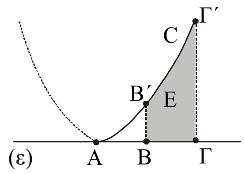
26. ****** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Α΄Β΄Δ΄.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Σημείωση: *Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 6 στη σελίδα 350 του σχολικού βιβλίου Θετικής Κατεύθυνσης.*

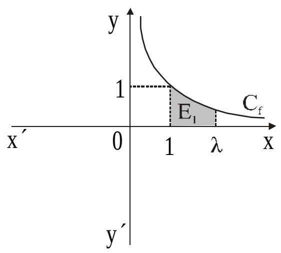


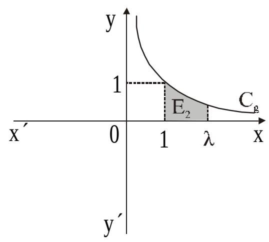
27. ** α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ είναι ίση με $\frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.



β) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιος ώστε $\xi^2 = \frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.

28. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.





α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2.

β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^\lambda f(x)\,dx$ και $I_2 = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^\lambda g(x)\,dx$.

29. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

30. ****** Δίνεται η συνάρτηση $f : R^* \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \dfrac{2004}{e}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

31. ****** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.

α) Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο R, τέτοιες ώστε $f(x) + g(x) = h(x)$.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε (λ) του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Σ

22.	Σ
23.	Λ
24.	Σ
25.	Σ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34. α)	Σ
β)	Σ
γ)	Σ
35.	Σ
36.	Λ
37.	Λ
38.	Λ
39.	Σ
40.	Σ

41.	Λ
42.	Λ
43.	Σ
44.	Σ
45.	Λ
46.	Σ
47.	Σ
48.	Λ
49.	Λ
50.	Σ
51.	Σ
52.	Λ
53.	Σ
54.	Σ
55.	Σ
56.	Σ
57.	Σ
58.	Σ
59.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Β
3.	Β
4.	Δ
5.	Ε
6.	Δ
7.	Γ
8.	Γ
9.	Β
10.	Δ
11.	Β
12.	Γ

13.	Δ
14.	Ε
15.	Δ
16.	Β
17.	Δ
18.	Δ
19.	Ε
20.	Β
21.	Β
22.	Ε
23.	Γ
24.	Ε

25.	Δ
26.	Ε
27.	Γ
28.	Β
29.	Γ
30.	Β
31.	Δ
32.	Β
33.	Γ
34.	Ε
35.	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	δ
2	γ
3	α

2.

1	δ
2	η
3	ε
4	α
5	γ

3.

1	γ
2	ζ
3	α
4	ε

4.

1	γ
2	δ
3	α
4	ζ

5.

1	β
2	γ
3	α

6.

1	ε
2	γ
3	ζ
4	ι
5	β
6	θ

7.

1	ε
2	θ
3	δ
4	α
5	β
6	η

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $E_4 < E_2 < E_1 < E_3$

2. $\overline{\varphi} < \overline{h} < \overline{g} < \overline{f}$

3. f (3) < f (2) < f (1)

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. $G'(x) = f(\alpha x + \beta)$

2. **α)** Θέτουμε $x - \gamma = u$

β) Το εμβαδόν παραμένει σταθερό αν η γραφική παράσταση μεταφερθεί κατά διάνυσμα $\vec{\gamma} \,//\, x'x$

3. **α)** $P(t) = ce^{\kappa t}$, $c = P(0)$

β) $P(1990) = f(1920)\, e^{\kappa \cdot 70}$ $\quad \kappa = \dfrac{\ln 2}{70}$

γ) $P(2010) \approx 12.000.000$

4. **α)** $y = f(0) \cdot e^{-\kappa t}$

β) $f(t) = \dfrac{f(0)}{2}$ άρα $T = \dfrac{\ln 2}{\kappa}$

γ) 0,21 kgr

5. Στο $[-2, 1]$ η $g(x) = x^2$ δεν είναι 1-1

6. $f''(x) > 0$

7. **β)** Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = f'(x) - 1$ στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

9. I_λ είναι τριώνυμο ως προς λ με θετικό συντελεστή του λ^2

10. **α)** Όχι

β) Αν f γνησίως μονότονη τότε f 1-1.

Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\int_0^1 f(x)\,dx = f(\xi)(1 - 0)$, δηλαδή $f(\xi) = f(1)$,

άρα $\xi = 1$ άτοπο

11. **α)** Φαίνεται να ισχύει $E_1 = E_2$

β) $E_1 = 1$ και $E_2 = +\infty$

12. **β)** $2(1 - e^{-2})$ γ) $1 - e^{-2}$

13. $\int_0^{x_1} \alpha x^\nu\,dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1 \cdot \alpha x_1^\nu)$, άρα $f(x) = \alpha x^3$

14. **α)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$, $y = \ln x + c_2$ **β)** $(-x_1)\left(\frac{1}{x_1}\right) = -1$

Σημείωση: Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2$ έχει σύνολο τιμών το R, άρα η παράσταση $\ln x + \frac{x^2}{2} + (c_2 - c_1)$ μπορεί να μηδενιστεί για κάποιο x, για κάθε c_1, c_2

15. **α)** 1 **β)** $\frac{4}{3}$ **γ)** 2

16. **α)** $f(12) - f(5) < 0$ **β)** θετικό **γ)** $f'(6) < 0$

17. **α)** $(\beta - \alpha)\, f(\alpha)$ = εμβαδόν ορθογωνίου, $(\beta - \alpha)\, \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ = εμβαδόν τραπεζίου

γ) $f \uparrow$ και $f''(x) > 0$ άρα $1 < I < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$

18. $1 - \sqrt{3}$

19. **α)** $t_0 = \sqrt{2}$ **β)** $T(\sqrt{2})$ **γ)** είναι η μέση τιμή $\overline{T}$

20. Θετική

21. Αν Α ο συνολικός πληθυσμός f η ζητούμενη συνάρτηση τότε

$\dfrac{df}{dt} = K(A - f(t))$ και $f(t) = A + ce^{-\kappa t}$

22. Η f δεν είναι συνεχής στο 0.

23. $\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\sigma\upsilon\nu x|$ στο $[0, \pi]$

24. **Α.** $\dfrac{2}{3}$ **Β.** $\dfrac{1}{3}$ **Γ.** $\int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx$ **Δ.** $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

26. **α)** $(A'B'\Delta') = 3\ln 3 - 2$

β) $(O\Delta\Gamma) = \dfrac{9}{2}$, $(AO\Gamma B) = \dfrac{9}{2} - (3\ln 3 - 2)$ λόγω συμμετρίας

28. **α)** $E_1 = \ln\lambda$, $E_2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ **β)** $I_1 = +\infty$ $I_2 = 1$

29. **γ)** $\frac{9}{4}$ **δ)** $\int_2^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{9}{8}$

30. **α)** $[\ln f(x)]' = \left(-\frac{1}{x}\right)' \ldots$ **β)** $2004\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\right)$

31. **α)** $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **γ)** $E(\lambda) = 1 - \frac{1}{e^{\lambda}}$ **δ)** 1

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων, ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου τμήματος στο οποίο απευθύνεται.

Σ Χ Ε Δ Ι Ο   Κ Ρ Ι Τ Η Ρ Ι Ο Υ   Α Ξ Ι Ο Λ Ο Γ Η Σ Η Σ

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1+e^x}$, x > 0, είναι η συνάρτηση

A. $F_1(x) = \dfrac{x^3 + \ln x}{x + e^x}$ **B.** $F_2(x) = \dfrac{6x - \frac{1}{x^2}}{e^x}$

Γ. $F_3(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1+e^x}\right)' dx$ **Δ.** $F_4(x) = \displaystyle\int_{2004}^{x} \dfrac{3t^2 + \frac{1}{t}}{1+e^t}\, dt$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

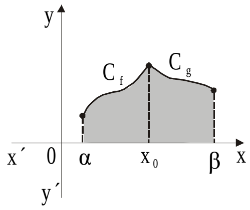
2. Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \ln t\, dt$ ισούται με

A. 0   **B.** $\dfrac{1}{x}\, e^x$ **Γ.** e^x **Δ.** xe^x **Ε.** $\ln x \cdot e^x$

3. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι περιττή. Τότε η μέση τιμή της f στο διάστημα [-α, α] είναι ίση με

A. 2α   **B.** 0   **Γ.** - 2α   **Δ.** $\dfrac{\alpha}{2}$ **Ε.** $-\dfrac{\alpha}{2}$

4. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

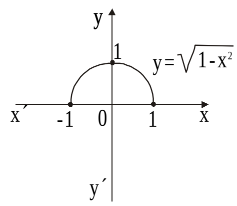


Α. $\int_{\alpha}^{\beta}\left(g(x)\,f(x)\right)dx$ **Β.** $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx$

Γ. $\int \left(f(x)-g(x)\right)dx$

Δ. $\int_{\alpha}^{x_0} f(x)\,dx - \int_{\beta}^{x_0} g(x)\,dx$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

5. Για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ισχύει



Α. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ **Β.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{\pi}{2}$ **Δ.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi$

Ε. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi^2$

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η παράσταση $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right)'$ είναι ίση με

Α. f (x) **Β.** f (β) - f (α) **Γ.** (β - α) f (x) **Δ.** 0

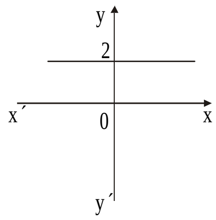
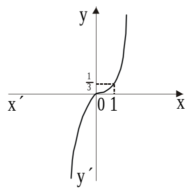
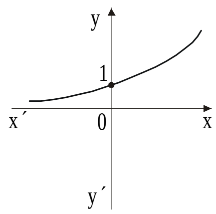
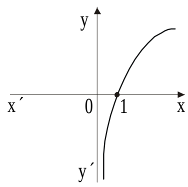
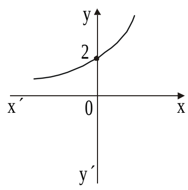
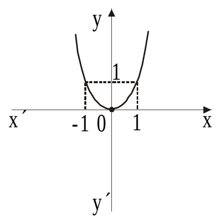
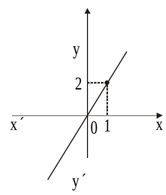
Ε. F (β) - F (α) όπου F (x) παράγουσα της f

7. Η διαφορική εξίσωση y΄ = xy, y > 0, έχει μία λύση τη συνάρτηση

Α. $y = e^{x^2}$ **Β.** $y = e^x$ **Γ.** $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ **Δ.** $y = \dfrac{1}{x}$ **Ε.** y = lnx

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχεί η γραφική παράσταση της παράγουσάς της από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
Συνάρτηση f		***Παράγουσα F***	
1.		**α.**	
2.		**β.**	
		γ.	
3.		**δ.**	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2}\,dx$ β) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$ γ) $\int_1^2 x\ln x\,dx$

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 4x$ και τον άξονα x΄x.

11. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0{,}3t - 0{,}05t^3$.

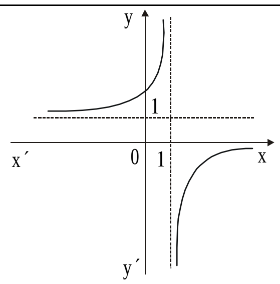
α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

β) Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

γ) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ Α΄ ΤΕΥΧΟΥΣ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α			
σελίδα	***νούμερο άσκησης***	***αντί της:***	***να γραφεί:***
90	70 (β)	παλιάς εκφώνησης	«το σύνολο των σημείων των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση y = x + 1»

Α Ν Α Λ Υ Σ Η			
σελίδα	***νούμερο άσκησης***	***αντί του:***	***να γραφεί:***
111	24	«το διάστημα Δ» και «για κάθε x ∈ Δ»	«το R» «για κάθε x ∈ R»
145	22	«γραφικά τη συνάρτηση f» και «στο διάστημα [- 3, 5]»	«γραφικά στο R τη συνάρτηση f» να διαγραφεί
159	13 (α)	«τίποτα - περιττή - άρτια - τίποτα - περιττή»	«τίποτα - περιττή - άρτια - τίποτα - τίποτα»
191	20	παλιού σχήματος	
209	37	«Σ»	«Λ»
215	41 (γ)	«περιπτώσεις για 0 < α < 2, α < 2, α = 2»	«περιπτώσεις για 0 < α < 1, α > 1, α = 1»

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου 1873. Κατά την περίοδο 1881-91 ολοκλήρωσε τις σπουδές του στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχολεία του Βελγίου όπου διακρίθηκε για την επίδοσή του στα Μαθηματικά. Κατά την περίοδο 1891-95 φοίτησε στη Βελγική Στρατιωτική Σχολή απ' όπου πήρε πτυχίο μηχανικού. Κατά την περίοδο 1897-98 παρακολούθησε μαθήματα στα Πανεπιστήμια του Λονδίνου και των Παρισίων, ενώ το φθινόπωρο του 1898 έως την άνοιξη του 1900 εργάστηκε ως μηχανικός στην Αίγυπτο στην κατασκευή των φραγμάτων Assuan και Assiout. Αμέσως μετά μεταβαίνει στο Βερολίνο με μοναδικό σκοπό **τη σπουδή των Μαθηματικών.**

Το καλοκαίρι του 1902 αναχωρεί για το Göttingen, προπύργιο τότε των μαθηματικών ερευνών και τόπο συγκέντρωσης διασήμων μαθηματικών (Klein - Hilbert - Minkowski κ.ά.). Το 1905 γίνεται υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Το 1909 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Αννόβερου, ενώ το 1910 γίνεται καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Breslaw. Το 1913 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen και διαδέχεται τον Felix Klein στην σημαντικότερη μαθηματική έδρα στην Ευρώπη. Το 1918 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Το 1920 η ελληνική κυβέρνηση τον προσκάλεσε για να οργανώσει το Ιωνικό Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη. Το 1922 Ο Καραθεοδωρή κατάφερε να διασώσει την Πανεπιστημιακή Βιβλιοθήκη του Ιωνικού Πανεπιστημίου από την τουρκική εισβολή στη Σμύρνη και τη μετέφερε στην Αθήνα. Κατά το ίδιο έτος γίνεται τακτικός καθηγητής της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, το 1923 τακτικός καθηγητής της Μηχανικής στο ΕΜΠ και ανακηρύσσεται ακαδημαϊκός. Το 1924 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, όπου και διδάσκει μέχρι το τέλος της ακαδημαϊκής του καριέρας.

Η βασική επιστημονική εργασία του Καραθεοδωρή είναι στα θέματα του Λογισμού των Μεταβολών (55 συνολικά εργασίες, μεταξύ των οποίων η διδακτορική του διατριβή "περί των ασυνεχών λύσεων του λογισμού των μεταβολών", 1905). Επίσης εργάστηκε με μεγάλη επιτυχία σε θέματα Θεωρίας Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεωρίας Πραγματικών Συναρτήσεων, Θεωρίας κυρτότητας, Θεωρίας μέτρου, Θεωρίας Συνόλων, Θερμοδυναμικής, Θεωρίας σχετικότητας, Γεωμετρικής οπτικής και Θεωρητικής μηχανικής, δημοσιεύοντας συνολικά 132 πρωτότυπες εργασίες.

Η προσφορά του στη μαθηματική επιστήμη έχει αναγνωριστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Μια πρωτότυπη εργασία του αναφέρεται στις αρχιτεκτονικές καμπύλες του Παρθενώνα (δημοσιεύτηκε το 1937 στην "αρχαιολογική εφημερίδα").

Ο καθηγητής E. Schmidt γράφει για τον Κ. Σ. Καραθεοδωρή: *"Ανήκει εις την πλειάδα των μεγάλων εργατών της μαθηματικής επιστήμης, οίτινες ανεκάλυψαν απροσδόκητους και βασικάς σχέσεις εις όλους σχεδόν τους κλάδους αυτής… Θα μείνει εις τα μαθηματικά ο Καραθεοδωρή εις την πρώτην γραμμήν των ερευνητών των μάλλον ικανών, οίτινες δια της δυνάμεως της μεγαλοφυΐας των, επέτυχον καταπληκτικήν επέκτασιν του ορίου της επιστήμης ταύτης…".*

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή απεβίωσε στο Μόναχο στις 2 Φεβρουαρίου 1950 και το θάνατό του πένθησαν όλα τα πνευματικά ιδρύματα του κόσμου με τα οποία είχε σχέση κατά τη διάρκεια της ζωής του.