# Κεφάλαιο 1ο

## Τριγωνομετρία

**Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει:**

- Να γνωρίζει την έννοια της περιοδικής συνάρτησης,και να μπορεί να σχεδιάζει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y= αημ(ωx), y=ασυν(ωx).
- Να μπορεί να επιλύει τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις: ημx =α, συνx=α, εφx=α και άλλες που ανάγονται σ’ αυτές.
- Να γνωρίζει τους τύπους του αθροίσματος της διαφοράς και του διπλάσιου τόξου, καθώς και τις αποδείξεις αυτών και με την βοήθεια αυτών να υπολογίζει την τιμή παραστάσεων των τριγωνομετρικών αριθμών.
- Να επιλύει τριγωνομετρικές εξισώσεις.
- Να αποδεικνύει τριγωνομετρικές ταυτότητες.

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

## Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω

| | Τεταρτημόρια | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| ημω | + | + | - | - |
| συνω | + | - | - | + |
| εφω | + | - | + | - |
| σφω | + | - | + | - |

## Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών

| ω (μοίρες) | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ | $180^o$ | $270^o$ | $360^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ω (rad) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| ημω | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| συνω | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| εφω | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – | $0$ | – | $0$ |
| σφω | – | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | – | $0$ | – |

| **Ταυτότητα** | **Με την προϋπόθεση** |
|---|---|
| $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ | $ω \in R$ |
| $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ | $ω \in R\ ,\ συνω \neq 0$ |
| $σφω = \frac{συνω}{ημω}$ | $ω \in R\ ,\ ημω \neq 0$ |
| $εφω \cdot σφω = 1$ | $ω \in R\ ,\ ημω \cdot συνω \neq 0$ |
| $ημ^2ω = \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$ | $ω \in R\ ,\ συνω \neq 0$ |
| $συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω}$ | $ω \in R\ ,\ συνω \neq 0$ |

| | $-x$ | $\frac{\pi}{2}-x$ | $\frac{\pi}{2}+x$ | $\pi-x$ | $\pi+x$ | $\frac{3\pi}{2}-x$ | $\frac{3\pi}{2}+x$ | $2\pi-x$ | $2\pi+x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $90-x$ | $90+x$ | $180-x$ | $180+x$ | $270-x$ | $270+x$ | $360-x$ | $360+x$ |
| ημ | −ημx | συνx | συνx | ημx | −ημx | −συνx | −συνx | −ημx | ημx |
| συν | συνx | ημx | −ημx | −συνx | −συνx | −ημx | ημx | συνx | συνx |
| εφ | −εφx | σφx | −σφx | −εφx | εφx | σφx | −σφx | −εφx | εφx |
| σφ | −σφx | εφx | −εφx | −σφx | σφx | εφx | −εφx | −σφx | σφx |

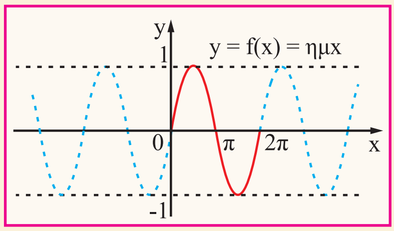
## Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει $T \in R_+^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν:

**i.** $x+T \in A$, $x-T \in A$, **ii.** $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

## Η συνάρτηση ημίτονο




Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ(x rad) λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$ημx = ημ(x\ rad)$$

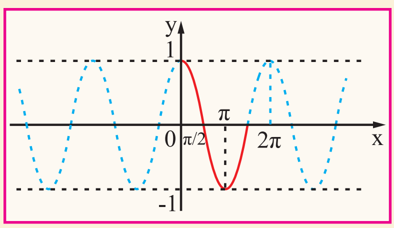
Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π διότι:

$$ημ(2π+x) = ημx, \text{ για κάθε } x \in R$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π. Η μονοτονία της συνάρτησης αυτής στο διάστημα [0,2π] φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

| x | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ημx | 0 ↗ | 1 ↘ | 0 ↘ | -1 ↗ | 0 |
| | | μέγιστο | | ελάχιστο | |

## Η συνάρτηση συνημίτονο




Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο συν (x rad) λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$συνx = συν(x\ rad)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π., διότι:

$$συν(2π+x)=συνx \text{ για κάθε } x \in R$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π. Η μονοτονία της συνάρτησης αυτής στο διάστημα [0,2π] φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

| x | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| συνx | 1 ↘ | 0 ↘ | -1 ↗ | 0 ↗ | 1 |
| | μέγιστο | | ελάχιστο | | μέγιστο |

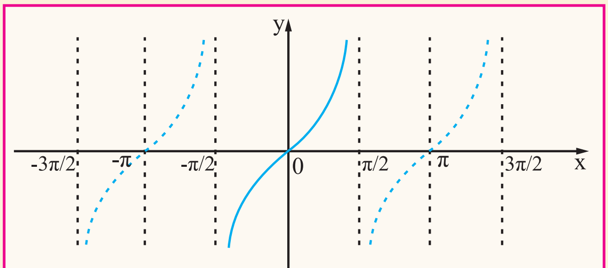
## Η συνάρτηση εφαπτομένη

Η συνάρτηση εφαπτόμενη ορίζεται ως το πηλίκο του ημιτόνου προς το συνημίτονο.

Είναι: $f(x) = εφx = \frac{ημx}{συνx}$ με πεδίο ορισμού το $A = \{x \in R : συνx \neq 0\}$

Η συνάρτηση εφx είναι περιοδική με περίοδο π διότι: εφ(π + x) = εφx, για κάθε $x \in A$. Άρα η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται η ίδια σε κάθε διάστημα πλάτους π.

Όταν το x πλησιάζει ("τείνει") στο $\frac{\pi}{2}$ με $x < \frac{\pi}{2}$ η εφx τείνει στο $+\infty$ γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f με f(x) = εφx.



y = f(x) = εφx

## Οι συναρτήσεις f(x) = ρημ(ωx), όπου ρ, ω > 0 και g(x) = ρσυν(ωx), όπου ρ, ω > 0

Επειδή $-1 \le ημx \le 1$ έχουμε $-1 \le ημ(ωx) \le 1$ και επειδή ρ > 0 είναι:

$$-ρ \le ρημ(ωx) \le ρ \Leftrightarrow -ρ \le f(x) \le ρ$$

Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι το ρ και η ελάχιστη τιμή της είναι το - ρ.

Το ω καθορίζει την **περίοδο T** της f που είναι: $T = \frac{2\pi}{ω}$

| Τριγωνομετρικές εξισώσεις |
|---|
| $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$, $\kappa \in Z$ |
| $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta$, $\kappa \in Z$ |
| $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in Z$ |
| $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in Z$ |

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς

| | |
|---|---|
| $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ | $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ |
| $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ | $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ |
| $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ | $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ |
| $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$ | $\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$ |

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί του 2α

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $\eta\mu2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ | | |
| **2α.** $\sigma\upsilon\nu2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ | **2β.** $\sigma\upsilon\nu2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ | **2γ.** $\sigma\upsilon\nu2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ |
| **3.** $\varepsilon\varphi2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ | **4.** $\sigma\varphi2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$ | **5.** $\eta\mu2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ |
| **6.** $\sigma\upsilon\nu2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ | **7.** $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$ | **8.** $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ |
| **9.** $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ | **10.** $\eta\mu3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$ | **11.** $\sigma\upsilon\nu3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$ |


## [Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφορές γωνίων]

**ΘΕΩΡΙΑ 1** $\quad \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$

*Απόδειξη*

Χωρίς απόδειξη

**ΘΕΩΡΙΑ 2** $\quad \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$

*Απόδειξη*

Αν στον τύπο (1) αντικαταστήσουμε το β με –β έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu[\alpha-(-\beta)]=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\sigma\upsilon\nu[\alpha-(-\beta)]=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)+\eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

**ΘΕΩΡΙΑ 3** $\quad \boldsymbol{\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}$

*Απόδειξη*

Επειδή $\sigma\upsilon\nu(\pi/2-x)=\eta\mu x$ και $\eta\mu(\pi/2-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχουμε :

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu[\pi/2-(\alpha+\beta)]=\sigma\upsilon\nu[(\pi/2-\alpha)-\beta]=$$

$$=\sigma\upsilon\nu(\pi/2-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu(\pi/2-\alpha)\eta\mu\beta=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

**ΘΕΩΡΙΑ 4** $\quad \boldsymbol{\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}$

*Απόδειξη*

Αν στον τύπο (3) αντικαταστήσουμε το β με το –β έχουμε :

$$\eta\mu[\alpha+(-\beta)]=\eta\mu(\alpha-\beta)$$

$$\eta\mu[\alpha+(-\beta)]=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

**ΘΕΩΡΙΑ 5** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}}$, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0}$ **και** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha\neq 0}$ **και** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0}$ **.**

*Απόδειξη*

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}= \quad (\text{Διαιρούμε με } \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0)$$

$$=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 6** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}}$

*Απόδειξη*

Αν στον τύπο (5) αντικαταστήσουμε το β με –β έχουμε :

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\varepsilon\varphi[\alpha+(-\beta)]$$

$$\varepsilon\varphi[\alpha+(-\beta)]=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(-\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi(-\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

## [Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α]

**ΘΕΩΡΙΑ 7** $\boldsymbol{\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

*Απόδειξη*

$$\eta\mu 2\alpha=\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

**ΘΕΩΡΙΑ 8** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha}$

*Απόδειξη*

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha$$

**ΘΕΩΡΙΑ 9** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi 2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}$

*Απόδειξη*

$$\varepsilon\varphi 2\alpha=\varepsilon\varphi(\alpha+\alpha)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 10** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

*Απόδειξη*

Από τον τύπο (2) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\alpha+1=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 11** $\boldsymbol{\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

*Απόδειξη*

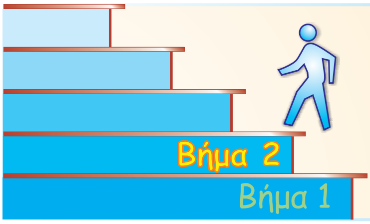
Από τον τύπο (2) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 12** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}$

*Απόδειξη*

$$\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

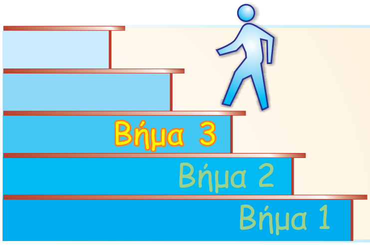



# Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

## Α. Από το σχολικό βιβλίο

**ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

| | | |
|---|---|---|
| **§ 1.1** | Α΄ Ομάδα: | 5, 6, 7, 8 |
| | Β΄ Ομάδα: | 2, 3 |
| **§ 1.2** | Α΄ Ομάδα: | 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 2, 3 |
| **§ 1.3** | Α΄ Ομάδα: | 6, 8, 10, 11 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 2, 3, 4, 6, 8 |
| **§ 1.4** | Α΄ Ομάδα: | 6, 7, 8, 9, 10 |
| | Β΄ Ομάδα: | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |




## Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

**1. Δίνεται η συνάρτηση:**

$$f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)+\beta \quad \mu\varepsilon \; x\in\mathbb{R} \quad \kappa\alpha\iota \; \alpha>0\,,\;\beta\in\mathbb{R}$$

**i.** **Αν η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η γραφική της παράσταση $C_f$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0,1), βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.**

**ii.** **Να κάνετε την γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.**

**iii.** **Βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο διάστημα μιας περιόδου.**

**Λύση:**

**i.** • Η $C_f'$ τέμνει τον $y'y$ στο (0,1), άρα το σημείο $M(0,1)\in C_f' \Leftrightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow \beta=1$

• Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$-1\le\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)\le 1\Leftrightarrow \qquad (\text{πολλαπλασιάζουμε με } \alpha>0)$$

$$-\alpha\le\alpha\cdot\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)\le\alpha\Leftrightarrow \qquad (\text{προσθέτουμε το } 1)$$

$$-\alpha+1\le\alpha\cdot\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)+1\le\alpha+1\Leftrightarrow$$

$$-\alpha+1\le f(x)\le\alpha+1$$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή της f είναι το $\alpha+1$, άρα $\alpha+1=3\Leftrightarrow\alpha=2$ και τελικά:

$$\boxed{f(x)=2\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)+1 \quad \mu\varepsilon\; x\in\mathbb{R}}$$

**ii.** • Η f είναι περιοδική με ελάχιστη θετική περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

Άρα θα την μελετήσουμε στο διάστημα $[0,3\pi]$.

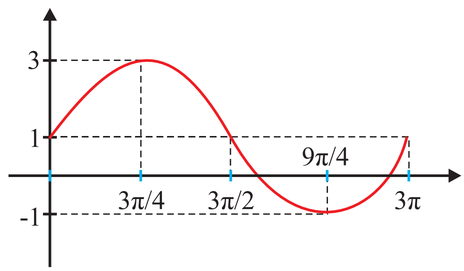
• Η f είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα ως εξής:

| x | 0 → 3π/4 | 3π/4 → 3π/2 | 3π/2 → 9π/4 | 9π/4 → 3π |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | ↑ | ↓ | ↓ | ↑ |

• Ο πίνακας τιμών της f είναι:

| x | 0 | 3π/4 | 3π/2 | 9π/4 | 3π |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $2\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |
| $2\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)-1$ | -1 | 3 | 1 | -1 | 1 |

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι η επόμενη:




**iii.** Θα λύσουμε την εξισωση $f(x)=0$ στο διάστημα $[0,3\pi]$

Βρίσκουμε καταρχάς τις γενικές λύσεις της εξίσωσης:

$$2\eta\mu\frac{2x}{3}+1=0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{2x}{3}=-\frac{1}{2}=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \quad ή \quad \frac{2x}{3}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x=3\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \quad ή \quad x=3\kappa\pi+\frac{7\pi}{4}$$

Πρέπει: $0\le 3\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\le 3\pi$ και $0\le 3\kappa\pi+\frac{7\pi}{4}\le 3\pi$

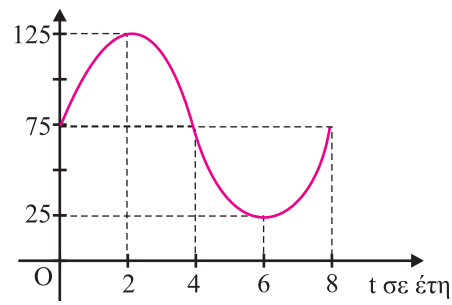
$\frac{\pi}{4}\le 3\kappa\pi\le 3\pi+\frac{\pi}{4}$ $\qquad -\frac{7\pi}{4}\le 3\kappa\pi\le 3\pi-\frac{7\pi}{4}$

$\frac{1}{12}\le \kappa\le\frac{13}{12}$ $\qquad -\frac{7}{12}\le\kappa\le -\frac{5}{12}$

Άρα $\kappa=1$ $\qquad$ Άρα $\kappa=0$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στο $A\left(\frac{11\pi}{4},0\right)$ που προκύπτει από την $x=3\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$ αν θέσουμε $\kappa=1$, και στο $B\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$ που προκύπτει από την $x=3\kappa\pi+\frac{7\pi}{4}$ αν θέσουμε $\kappa=0$.

**2.** **Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης f στο διάστημα μιας περιόδου της οποίας ο τύπος είναι της μορφής: $f(t)=\rho\eta\mu(\omega t)+\beta$, και οι τιμές f(t) είναι οι πωλήσεις σε χιλιάδες κομμάτια ενος προϊόντος στην διάρκεια μιας οκταετίας.**




**i. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.**

**ii. Σε ποιες χρονικές στιγμές οι πωλήσεις $f(t)$ ειναι 100.000 κομμάτια;**

**iii. Σε ποιο χρονικό διάστημα οι πωλήσεις υπερβαίνουν τις 100.000 κομμάτια;**

**Λύση:**

**i.** Ο τύπος της f είναι:

$$f(t)=\rho\eta\mu(\omega t)+\beta \quad \text{με } 0\le t\le 8 \text{ και } \rho>0$$

• Επειδή είναι περιοδική με περίοδο 8 έχουμε: $8=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \omega=\frac{\pi}{4}$

• Επίσης ισχύει: $-1\le \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)\le 1 \Leftrightarrow -\rho\le\rho\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)\le\rho\Leftrightarrow$

$$\beta-\rho\le\rho\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)+\beta\le\beta+\rho\Leftrightarrow\beta-\rho\le f(t)\le\beta+\rho$$

Όμως $25\le f(t)\le 125$, άρα: $\begin{cases}\beta-\rho=25\\ \beta+\rho=125\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=150\\ \rho=125-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=75\\ \rho=50\end{cases}$

Άρα τελικά ο τύπος της f είναι: $f(t)=50\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)+75$ με $0\le t\le 8$

**ii.** Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(t)=100 \Leftrightarrow 50\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)+75=100 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\cdot t=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \quad \acute{\eta} \quad \frac{\pi}{4}\cdot t=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$t=8\kappa+\frac{2}{3} \quad \acute{\eta} \quad t=8\kappa+\frac{10}{3} \quad \mu\varepsilon \quad \kappa\in\mathbb{N}$$

Όμως $t\in[0,8]$ άρα:

$$\left.\begin{array}{c} 0\le 8\kappa+\frac{2}{3}\le 8 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le 8\kappa\le\frac{22}{3} \\ \kappa\alpha\iota \\ 0\le 8\kappa+\frac{10}{3}\le 8 \Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le 8\kappa\le\frac{14}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \kappa=0$$

Τότε είναι: $t=\frac{2}{3}$ ή $t=\frac{10}{3}$

**iii.** Λύνουμε την ανίσωση: $f(t)>100 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<\frac{\pi t}{4}<\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}<t<\frac{10}{3} \Leftrightarrow t\in\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$$

**3.i. Δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(x+y)\cdot\sigma\upsilon\nu(x-y)=\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y-1}$

**ii. Λύστε την εξίσωση:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}}$

**iii. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B=1+\sigma\upsilon\nu\Gamma}$ **, δείξτε ότι είναι ορθογώνιο.**

**Λύση:**

**i.** Ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\sigma\upsilon\nu(x+y)\cdot\sigma\upsilon\nu(x-y)=\\
&=(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu x\cdot\eta\mu y)\cdot(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x\cdot\eta\mu y)=\\
&=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2y-\eta\mu^2x\cdot\eta\mu^2y=\\
&=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2y-(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu^2y)=\\
&=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2y-1+\sigma\upsilon\nu^2y+\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2y=\\
&=\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y-1
\end{aligned}$$

**ii.** Η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}-1=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\ \ \text{ή}\ \ \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\ \Leftrightarrow\ x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}\ \ \text{ή}\ \ x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

**iii.** Ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B=1+\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B-1=\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad \text{ή}$$

$$-\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=0 \qquad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma[1+\sigma\upsilon\nu(A-B)]=0 \qquad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma=0\quad \text{ή}\quad \sigma\upsilon\nu(A-B)=-1 \qquad \text{ή}$$

$\Gamma=90^\circ$ ή Α–Β=π, που είναι ***αδύνατο***. Άρα $\Gamma=90^\circ$.

## 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

**i. Δείξτε οτι:** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=1}$

**ii. Αν** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{1}{2}}$ **και** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{1}{3}}$, **βρείτε την γωνία Γ.**

**Λύση:**

**i.** Ισχύει: $A+B+\Gamma=180^\circ\Leftrightarrow\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^\circ\Leftrightarrow\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{\Gamma}{2}$

Οπότε: $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(90^\circ-\frac{\Gamma}{2}\right)$ ή $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ ή

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}\quad\text{ή}\quad\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right)\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\quad\text{ή}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=1$$

**ii.** Εφόσον $εφ\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ και $εφ\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$ σύμφωνα με το **i.** ερώτημα είναι:

$$\frac{1}{2}\cdot εφ\frac{Γ}{2}+\frac{1}{3}\cdot εφ\frac{Γ}{2}+\frac{1}{6}=1 \quad ή \quad 3\cdot εφ\frac{Γ}{2}+2\cdot εφ\frac{Γ}{2}=5 \quad ή \quad εφ\frac{Γ}{2}=1 \quad ή \quad \frac{Γ}{2}=45°$$

Άρα $\hat{Γ}=90°$.

**5.** **Αν** $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ **και** $εφ2\alpha=-\frac{5}{12}$.

**i. Δείξτε οτι:** $εφ\alpha=5$.

**ii. Λύστε την εξίσωση** $3\cdot εφ(x-\alpha)+εφ\alpha=3\cdot εφx$, **εφόσον** $εφ\frac{3\pi}{25}=\frac{2}{3}$.

**Λύση:**

**i.** Ισχύει: $εφ2\alpha=-\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{2εφ\alpha}{1-εφ^2\alpha}=-\frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$$5\cdot εφ^2\alpha-5=24\cdot εφ\alpha \Leftrightarrow 5\cdot εφ^2\alpha-24\cdot εφ\alpha-5=0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $y=εφ\alpha$ και η εξίσωση γίνεται:

$$5y^2-24y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-(-24)\pm\sqrt{26^2}}{25} \Leftrightarrow y=\frac{24\pm 26}{10} \Leftrightarrow$$

$y=5$ ή $y=-\frac{1}{5}$. Άρα $εφ\alpha=5$ ή $εφ\alpha=-\frac{1}{5}$

Επειδή $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ είναι $εφ\alpha>0$, οπότε $εφ\alpha=5$.

**ii.** $3\cdot εφ(x-\alpha)+εφ\alpha=3\cdot εφx \Leftrightarrow 3\cdot\frac{εφx-εφ\alpha}{1+εφx\cdot εφ\alpha}+5=3\cdot εφx \Leftrightarrow$

$$3\cdot\frac{εφx-5}{1+5\cdot εφx}+5=3\cdot εφx \Leftrightarrow 3\cdot εφx-15+5+25\cdot εφx=3\cdot εφx+15\cdot εφ^2x \Leftrightarrow$$

$$15\cdot εφ^2x-25\cdot εφx+10=0 \Leftrightarrow 3\cdot εφ^2x-5\cdot εφx+2=0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $y=εφx$ και η εξίσωση γίνεται:

$$3y^2-5y+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow y=\frac{5\pm 1}{6} \Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=\frac{2}{3}$$

Άρα $\varepsilon\varphi x = 1$ ή $\varepsilon\varphi x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{25}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**6.α. Δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 33^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 12^\circ - \sigma\upsilon\nu 57^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 78^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

**β. Δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\varepsilon\varphi 22^\circ + \sigma\varphi 67^\circ = 1 - \varepsilon\varphi 22^\circ \cdot \sigma\varphi 67^\circ}$

**γ. Δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ - \alpha) - \eta\mu^2(45^\circ - \alpha) = \eta\mu 2\alpha}$

**δ. Δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{8} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{8} + \eta\mu^3\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}}$

**Λύση:**

**α.** Παρατηρούμε οτι:

- $33^\circ + 57^\circ = 90^\circ$ άρα $\sigma\upsilon\nu 57^\circ = \eta\mu 33^\circ$ και
- $12^\circ + 78^\circ = 90^\circ$ άρα $\sigma\upsilon\nu 78^\circ = \eta\mu 12^\circ$

$\sigma\upsilon\nu 33^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 12^\circ - \sigma\upsilon\nu 57^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 78^\circ = \sigma\upsilon\nu 33^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 12^\circ - \eta\mu 33^\circ \cdot \eta\mu 12^\circ =$

$\sigma\upsilon\nu(33^\circ + 12^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**β.** Παρατηρούμε οτι:

- $23^\circ + 67^\circ = 90^\circ$ άρα $\sigma\varphi 67^\circ = \varepsilon\varphi 23^\circ$

Οπότε:

$\varepsilon\varphi 22^\circ + \varepsilon\varphi 67^\circ = 1 - \varepsilon\varphi 22^\circ \cdot \sigma\varphi 67^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 22^\circ + \varepsilon\varphi 23^\circ = 1 - \varepsilon\varphi 22^\circ \cdot \varepsilon\varphi 23^\circ \Leftrightarrow$

$\frac{\varepsilon\varphi 22^\circ + \varepsilon\varphi 23^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 22^\circ \cdot \varepsilon\varphi 23^\circ} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(22^\circ + 23^\circ) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$, που είναι αληθές

**γ.** Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ - \alpha) - \eta\mu^2(45^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu[2(45^\circ - \alpha)] =$

$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 2\alpha) = \eta\mu 2\alpha$

**δ.** Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{8} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{8} + \eta\mu^3\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \eta\mu\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} + \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right) =$

$\eta\mu\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

**7.i. Αν ισχύει:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{5}}$, **δείξτε ότι:** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}}$.

**ii.** **Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ βρείτε τα ημ2x, συν2x.**

**iii.** **Αν ισχύει: $εφ(y+2x)=1$ δείξτε οτι $εφy=-\frac{17}{31}$.**

**Λύση:**

**i.** Ισχύει:

$$συν\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cdot ημ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{5}\Leftrightarrow$$

$$συνx\cdot συν\frac{\pi}{3}-ημx\cdot ημ\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cdot\left(ημx\cdot συν\frac{\pi}{3}+συνx\cdot ημ\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{5}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot συνx-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ημx+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ημx+\frac{3}{2}\cdot συνx=\frac{8}{5}\Leftrightarrow 2\cdot συνx=\frac{8}{5}\Leftrightarrow συνx=\frac{4}{5}$$

**ii.** Ισχύει:

$$ημ^2x=1-συν^2x\Leftrightarrow ημ^2x=1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow ημ^2x=\frac{9}{25}\Leftrightarrow ημx=\frac{3}{5}\text{ ή } ημx=-\frac{3}{5}$$

Επειδή $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $ημx>0$. Οπότε $ημx=\frac{3}{5}$.

Οπότε:

- $ημ2x=2ημxσυνx=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$
- $συν2x=2συν^2x-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{7}{25}$
- $εφ2x=\frac{ημ2x}{συν2x}=\frac{24}{7}$

**iii.** Ισχύει: $εφ(y+2x)=1\Leftrightarrow\frac{εφy+εφ2x}{1-εφy\cdot εφ2x}=1\Leftrightarrow εφy+\frac{24}{7}=1-\frac{24}{7}\cdot εφy\Leftrightarrow$

$$7\cdot εφy+24=7-24\cdot εφy\Leftrightarrow 31\cdot εφy=-17\Leftrightarrow εφy=-\frac{17}{31}$$

**8.i. Δείξτε ότι:** $$ημ^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-ημ^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ημx$$

**ii. Λύστε την εξίσωση:** $4\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\right]^2=\sigma\upsilon\nu 2x$

**Λύση:**

**i.** Ισχύει:

$$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2}-\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}=$$

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}}{2}=$$

$$\frac{2\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu x$$

**ii.** Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$4\cdot\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu x\right)^2=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$1=2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

**9.i. Αν το $\frac{\pi}{4}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 4x+\beta\cdot\eta\mu^2 x=0$, δείξτε οτι $\beta=2\alpha$.**

**ii. Αν $\alpha\neq 0$, λύστε την εξίσωση.**

**Λύση:**

**i.** Το $\frac{\pi}{4}$ είναι ρίζα της εξίσωσης άρα:

$$\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\pi + \beta \cdot \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} = 0 \iff -\alpha + \beta \cdot \frac{1}{2} = 0 \iff \beta = 2\alpha$$

**ii.** Η εξίσωση γράφεται:

$\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 4x + 2\alpha \cdot \eta\mu^2 x = 0 \iff \quad \alpha \neq 0$

$\sigma\upsilon\nu 4x + 2 \cdot \eta\mu^2 x = 0 \iff 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2x - 1 + 2 \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} = 0 \iff$

$2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2x - 1 + 1 - \sigma\upsilon\nu 2x = 0 \iff 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2x - \sigma\upsilon\nu 2x = 0 \iff$

$\sigma\upsilon\nu 2x \cdot (2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - 1) = 0 \iff \sigma\upsilon\nu 2x = 0 \;$ ή $\; \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2} \iff$

$2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \;$ ή $\; \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \;$ ή $\; 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \iff$

$x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \;$ ή $\; x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \; \kappa \in \mathbb{Z}$

**10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \mathbb{R}$.**

**i. Δείξτε οτι: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \eta\mu 4x$**

**ii. Λύστε την εξίσωση: $f(x) + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4}$**

**iii. Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:**

$$g(x) = 8 \cdot f(x) - 1 \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}$$

**Λύση:**

**i.** Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x \left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\right) \iff f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \iff$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \iff f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \iff f(x) = \frac{1}{4} \cdot \eta\mu 4x$

**ii.** Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{4}\cdot\eta\mu 4x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \eta\mu 4x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 4x=1\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 4x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 4x=1\Leftrightarrow \eta\mu 4x+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}\cdot\sigma\upsilon\nu 4x=1\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 4x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu 4x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \eta\mu\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$4x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\quad \acute{\eta}\quad 4x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$4x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\quad \acute{\eta}\quad 4x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\quad \acute{\eta}\quad x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

**iii.** Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $g(x)=8\cdot f(x)-1=2\cdot\eta\mu 4x-1$

Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-1\leq\eta\mu 4x\leq 1$

$-2\leq 2\cdot\eta\mu 4x\leq 2$

$-3\leq 2\cdot\eta\mu 4x-1\leq 1$

$-3\leq g(x)\leq 1$

Άρα -3, 1 η ελάχιστη και η μέγιστη αντίστοιχα τιμή της g.

**11.i. Δείξτε ότι:** $\dfrac{\eta\mu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

**ii. Δείξτε ότι:** $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi\alpha$

**iii. Λύστε την εξίσωση:** $\dfrac{\eta\mu 2x\cdot\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu 2x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x+\eta\mu x}$

**Λύση:**

**i.** Ισχύει: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\dfrac{2\cdot\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{\left(1+2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=$

$$\frac{2\cdot ημα\cdot συν^2α}{\left(2\cdot συν^2α\ \right)\cdot(1+συνα)}=\frac{2\cdot ημα}{1+συνα}=\frac{2\cdot ημ\frac{α}{2}\cdot συν\frac{α}{2}}{1+2\cdot συν^2\frac{α}{2}\ -1}=$$

$$\frac{2\cdot ημ\frac{α}{2}\cdot συν\frac{α}{2}}{2\cdot συν^2\frac{α}{2}}=\frac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}}=εφ\frac{α}{2}$$

**ii.** Ισχύει: $\dfrac{1+συν2α+συνα}{ημ2α+ημα}=\dfrac{1+2\cdot συν^2α-1+συνα}{2\cdot ημα\cdot συνα+ημα}=$

$$\frac{συνα\cdot(2συνα+1)}{ημα\cdot(2συνα+1)}=\frac{συνα}{ημα}=σφα$$

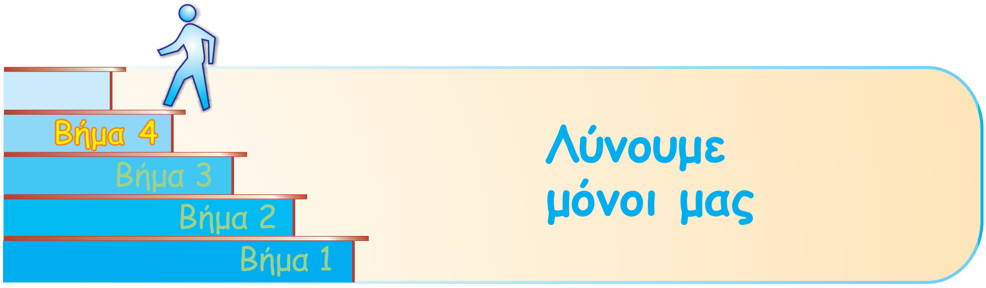
**iii.** Η εξίσωση γράφεται: $\dfrac{ημ2x\cdot συνx}{(1+συν2x)\cdot(1+συνx)}=\dfrac{1+συν2x+συνx}{ημ2x+ημx}\Leftrightarrow$

$$εφ\frac{x}{2}=σφx\Leftrightarrow εφ\frac{x}{2}=\frac{1}{εφx}\Leftrightarrow εφx\cdot εφ\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow \frac{2\cdot εφ\frac{x}{2}}{1-εφ^2\frac{x}{2}}\cdot εφ\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow$$

$$2\cdot εφ^2\frac{x}{2}=1-εφ^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow 3\cdot εφ^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow εφ^2\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$εφ\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad ή\quad εφ\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow εφ\frac{x}{2}=εφ\frac{π}{6}\quad ή\quad εφ\frac{x}{2}=εφ\left(-\frac{π}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2}=κπ+\frac{π}{6}\quad ή\quad \frac{x}{2}=κπ-\frac{π}{6}\quad\Leftrightarrow\quad x=2κπ+\frac{π}{3}\quad ή\quad x=2κπ-\frac{π}{3},\quad κ\in\mathbb{Z}$$




**1.** **Θεωρούμε τις συναρτήσεις:**

i. $f(x)=2\eta\mu\dfrac{x}{2}$, ii. $g(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3x$, iii. $h(x)=1+3\eta\mu\dfrac{x}{4}$

**Να βρεθούν:** α. **η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή,**
β. **η περίοδος, των παραπάνω συναρτήσεων.**

**2.** **Η θερμοκρασία μιας πόλης t ώρες μετά τα μεσάνυκτα περιγράφεται συναρτήσει του χρόνου t από τη σχέση:** $\theta=\rho\eta\mu\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$ **σε** $0\,^{\circ}C$, $t\in[0,24]$.

α. **Βρείτε το ρ αν γνωρίζετε ότι στις 2 μετά τα μεσάνυκτα η θερμοκρασία της πόλης είναι** $4\,^{\circ}C$.

β. **Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.**

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

**3.** **Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :**

i. $συνx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ii. $συν2x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$, iii. $3εφ\frac{x}{4} + \sqrt{3} = 0$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

**4.** **Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:**

i. $ημ^3x + συν^3x = -3ημxσυνx(ημx + συνx)$

ii. $συν^2 2x + ημ^2 3x = 1$

iii. $εφx + συνx = \frac{1}{συνx}$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

**5.** **Έστω η συνάρτηση:** $f(x)=3\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

**α.** **Να βρείτε τα x για τα οποία η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα $[0,2\pi]$.**

**β.** **Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x.**

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

**6.** **Για την γωνία ω ισχύει ότι:** $\sigma\upsilon\nu 2\omega+5\sigma\upsilon\nu\omega+3=0$

**i.** **Να αποδείξετε ότι:** $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}$

**ii.** **Αν επιπλέον ισχύει:** $\pi\leq\omega\leq\frac{3\pi}{2}$ **να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: ημ2ω, συν2ω και εφ2ω.**

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**7.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{-x+\eta\mu\alpha-x\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-x\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{και} \quad B=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha+x\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+x+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$$

**i.** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x.

**ii.** Αν $\alpha=\frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι: $A+B=3+\sqrt{3}$.

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**8.** Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

**i.** $-1+\sigma\upsilon\nu2x=2\eta\mu(\pi-x)$ **ii.** $\sigma\upsilon\nu^2x-\frac{\eta\mu4x}{2}=\frac{1}{2}$

**iii.** $\sigma\upsilon\nu^2 2x-\eta\mu^2 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**9.** Να αποδείξετε ότι: $\left(1+\text{συν}\frac{\pi}{12}\right)\left(1+\text{συν}\frac{5\pi}{12}\right)\left(1+\text{συν}\frac{11\pi}{12}\right)\left(1+\text{συν}\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{16}$

**10.** Να αποδείξετε ότι: $\frac{1-\text{εφ}^2(135-\alpha)}{1+\text{εφ}^2(135-\alpha)}=-\text{ημ}2\alpha$

**11.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

**i.** Να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)$

**ii.** Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=1$

..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................

**12.** Να αποδείξετε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\eta\mu 2\alpha}$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια του τύπου αυτού να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}$.

..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................

**13.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu 2x$

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(\pi-x)=f(-x)$

iii. Βρείτε τα $x\in[0,2\pi)$ για τα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

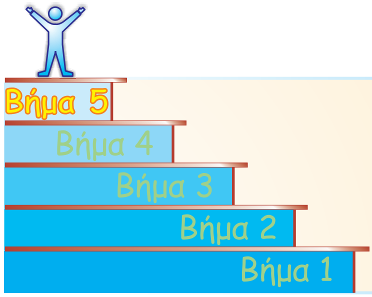
..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................




# Ελέγχουμε τη γνώση μας

## Θέμα 1ο

**α.** Αν $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa \in Z$, δείξτε ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

*(Μονάδες 5)*

**β.i.** Αν το $\frac{\pi}{6}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = \frac{1}{2}$, βρείτε το α.

*(Μονάδες 5)*

**ii.** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Δείξτε ότι: $\eta\mu 2B = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$

*(Μονάδες 5)*

**iii.** Δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \eta\mu 2\alpha$ *(Μονάδες 5)*

**iv.** Δείξτε ότι: $1 + \eta\mu\alpha = \left(\eta\mu\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\right)^2$ *(Μονάδες 5)*

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

## Θέμα 2ο

Αποδείξτε τις ισότητες:

**α.** $ημ19°συν26° + ημ71°συν64° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Μονάδες 5)*

**β.** $\frac{εφ^2 5α - εφ^2 3α}{1 - εφ^2 5αεφ^2 3α} = εφ8α \cdot εφ2α$ *(Μονάδες 10)*

**γ.** $ημ^3 \frac{π}{2} συν \frac{π}{8} + συν^3 \frac{π}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ *(Μονάδες 10)*

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

## Θέμα 3ο

Λύστε τις εξισώσεις: **α.** $εφ\left(\frac{π}{3} + x\right)εφ\left(\frac{π}{3} - x\right) = -1$ *(Μονάδες 10)*

**β.** $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2 \dfrac{x}{2} = 0$ *(Μονάδες 15)*

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

## Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$ με $x \in R$.

**α.** Δείξτε ότι $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 4x + 3}{4}$, με $x \in R$. *(Μονάδες 5)*

**β.** Να κάνετε την γραφική παράσταση της f. *(Μονάδες 10)*

**γ.** Λύστε την εξίσωση $8f(x) = 7$ στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. *(Μονάδες 10)*

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

*ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ*