Κεφάλαιο 1°

Μιγαδικοί αριθμοί

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

✓ Να γνωρίζει:

α. την έννοια του μιγαδικού αριθμού και
β. πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι.

✓ Να μπορεί να βρίσκει:

α. το άθροισμα, το γινόμενο, τη διαφορά και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών
β. το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και να λύνει προβλήματα σε συνδιασμό με τις κωνικές τομές.

✓ Να γνωρίζει:

α. την έννοια του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού
β. τις ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

1. Πρόσθεση: $z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

2. Πολλαπλασιασμός: $z_1z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

3. Διαίρεση: Η διαίρεση εκτελείται με τη βοήθεια του συζυγούς του μιγαδικού του παρονομαστή.

Έστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i\neq 0$.

Τότε: $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\ldots=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Όμοια όπως στο R ορίζουμε για τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$:

i. $z^1=z$

ii. $z^0=1$, $z\neq 0$

iii. $z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$, $\nu\in N^*$, $z\neq 0$

iv. $z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z$, $\nu\in N$, $\nu>1$

v. $$i^\nu=i^\upsilon=\begin{cases}1, & \alpha\nu\quad \upsilon=0\\ i, & \alpha\nu\quad \upsilon=1\\ -1, & \alpha\nu\quad \upsilon=2\\ -i, & \alpha\nu\quad \upsilon=3\end{cases}$$

Ιδιότητες συζυγών

I. Για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ ισχύουν:

i. $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$ **ii.** $z+\bar{z}=2\alpha=2\,\mathrm{Re}(z)$ **iii.** $z-\bar{z}=2\beta i=2(\mathrm{Im}(z))i$

II. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$. Τότε:

i. Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\bar{z}=z$

ii. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\bar{z}=-z$

III. Για τους μιγαδικούς z, z_1, z_2 ισχύουν

i. $\bar{\bar{z}}=z$

ii. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ και γενικότερα $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\nu$

iii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1 \cdot z_2 ... z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} ... \overline{z_\nu}$ για κάθε $\nu \in N^*$.

iv. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$ **v.** $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ (1) στο C με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, και $\alpha \neq 0$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (διακρίνουσα της (1))

• Αν $\Delta > 0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

• Αν $\Delta = 0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα: $z = -\frac{\beta}{2\alpha}$

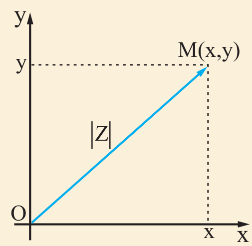
• Αν $\Delta < 0$ (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή $z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και M(z) η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού z την απόσταση του M(z) από την αρχή O(0,0) των αξόνων και συμβολίζουμε:

$$|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ιδιότητες του μέτρου

• Έστω $z = x + yi$ τότε $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Για κάθε μιγαδικό $z = x + yi$ ισχύει $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

• Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και γενικότερα

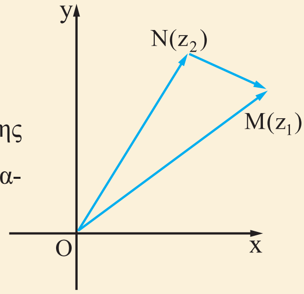
$|z_1 \cdot z_2 ... z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| ... |z_\nu|$ και $|z^\nu| = |z|^\nu$ $\nu \in N^*$

• Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ τότε $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,

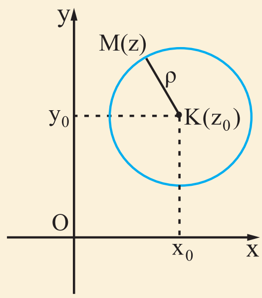
• Αν $z_1, z_2 \in C$ τότε $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)

- Για τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, ισχύει ακόμα

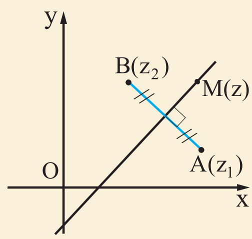
  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$ ή $\left|\overrightarrow{MN}\right| = |z_1 - z_2|$ δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με τήν απόσταση των εικόνων τους.



- Έστω ο μιγαδικός $z_0 = x_0 + y_0 i$ και ένας θετικός πραγματικός ρ. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $K(x_0, y_0)$ του z_0 και ακτίνα ρ.



- Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.**

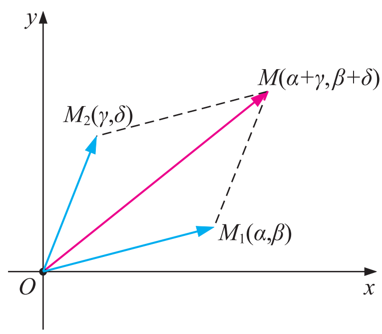
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.



ΘΕΩΡΙΑ 2 **Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

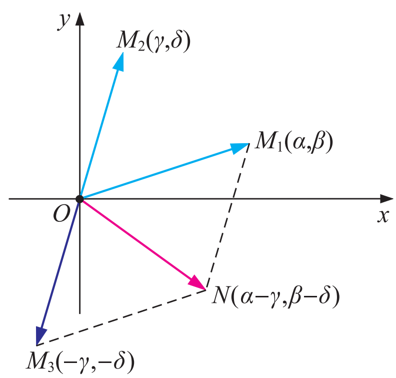
Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο

$N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$



ΘΕΩΡΙΑ 3 **Πως εκφράζεται το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i \neq 0$, στη μορφή μιγαδικού αριθμού;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i \neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τον συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Πως υπολογίζουμε τη δύναμη i^ν, με ν φυσικό;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$$

.

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Αποδείξτε ότι $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$

$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\overline{z}_1+\overline{z}_2\,.$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Να βρείτε τον τύπο που δίνει τις λύσεις της *εξίσωσης* $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με α,β,γ πραγματικούς *και* $\alpha\neq 0$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0,\quad \text{με με } \alpha,\beta,\gamma \text{ πραγματικούς και } \alpha\neq 0\,.$$

Τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\Leftrightarrow z+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\Leftrightarrow z=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\,.$$

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$$

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Αποδείξτε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, όπου z_1 , z_2 μιγαδικοί αριθμοί.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε: $$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

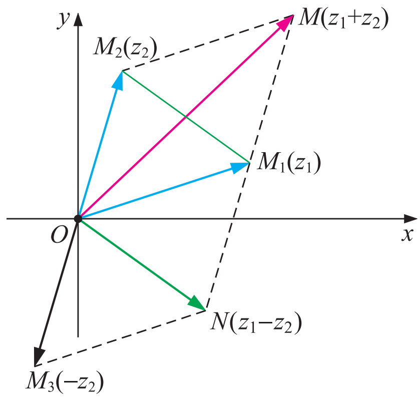
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αποδείξτε ότι $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, όπου z_1 , z_2 μιγαδικοί αριθμοί και ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

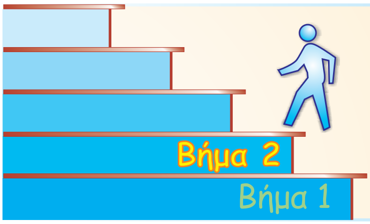


Από την τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών σύμφωνα με το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι:

$\big||OM_1| - |M_1M|\big| \le |OM| \le |OM_1| + |M_1M|$ δηλαδή

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$ (αφού το ONM_1M_2 είναι παραλληλόγραμμο). Δηλαδή: $\boxed{(M_1M_2) = |z_1 - z_2|}$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

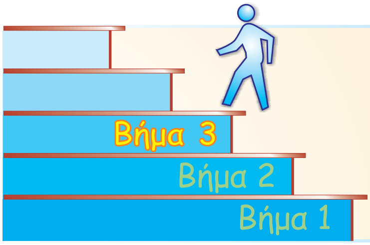
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

§ 2.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού.

§ 2.2 Πράξεις στο C.

- Πράξεις	σελ. 95, άσκηση 6	
-Ισότητα μιγαδικών	σελ. 95, άσκηση 7	
-Εξισώσεις 1ου βαθμού στο C	σελ. 96, άσκηση 12	
-Εξισώσεις που περιέχουν $\overline{z}$	σελ. 124, άσκηση 7	(γενικές)
-Δυνάμεις του i	σελ. 93, εφαρμογή 1	
	σελ. 96, άσκηση 3,4	(Β΄ ομάδα)
	σελ. 93, εφαρμογή 2	
	σελ. 96-97, άσκηση 1, 6, 8	(Β΄ ομ.)
	σελ. 101-102, άσκηση 2, 3, 4	(Β΄ ομ.)
-Εξισώσεις 2ου Βαθμού	σελ. 96, άσκηση 13, 14	
-Γεωμετρικοί τόποι	σελ. 97, άσκηση 9	
	σελ. 123, άσκηση 1, 3	(Γενικές)
§ 2.3 Μέτρο Μιγάδικου		
-Εύρεση μέτρου	σελ. 99, εφαρμογή 1	
	σελ. 100, άσκηση 1	
-Αποδεικτικές ασκήσεις	σελ. 101, άσκηση 9	
-Εξισώσεις με μέτρα	σελ. 101, άσκηση 3	(Α΄ ομάδα)
-Ανισοτικές ασκήσεις	σελ. 101, άσκηση 1	(Β΄ ομάδα)
-Γεωμετρική ερμηνεία	σελ. 99-100, εφαρμογή 1	

$\|Z_1 - Z_2\|$	σελ. 101, άσκηση 4,5,6,7,8 (Α΄ ομάδα)
και γεωμετρικοί τόποι	σελ. 102, άσκηση 5, 6, 7, 8, 9
	σελ. 123, άσκηση 4
-Συνδιαστικές με ανάλυση	
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 124-125, άσκηση 1, 2, 3



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:** $|z-1|=1+\mathrm{Re}(z)$ **(1) και η συνάρτηση f με** $f(z)=z^2-z$.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση: $y^2=4x$.

β. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει: $f(z)=-4+2i$.

γ. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει: $|f(z)|=3|\bar{z}|$.

Λύση

α. Έστω z = x + yi, με x και y πραγματικούς. Τότε:

$$|z-1|=1+\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow |x+yi-1|=1+x\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1+x \qquad (1)$$

Πρέπει $1+x\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$(1)\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(1+x)^2\Leftrightarrow y^2=4x$$

που είναι εξίσωση παραβολής.

β. $f(z)=-4+2i\Leftrightarrow z^2-z=-4+2i\Leftrightarrow (x+yi)^2-(x+yi)=-4+2i\Leftrightarrow$

$$(x^2-y^2-x)+y(2x-1)i=-4+2i\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=-4\left(\text{διότι } y^2=4x\right) \\ y(2x-1)=2 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ y(2x-1)=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή } x=4 \\ y(2x-1)=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=4 \\ y=2/7 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο μιγαδικοί οι : $z_1=1+2i$ και $z_2=4+\dfrac{2}{7}i$.

Από τους οποίους μόνο ο z_1 ανήκει στην παραβολή $y^2=4x$

γ. $f(z)=3|\bar{z}| \Leftrightarrow |z^2-z|=3|z| \Leftrightarrow |z||z-1|=3|z| \Leftrightarrow |z|(|z-1|-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |z|=0 \\ \text{ή} \\ |z-1|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ή} \\ 1+\mathrm{Re}(z)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ή} \\ \mathrm{Re}(z)=2 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$$

Ο μιγαδικός $z=0$ ανήκει στην παραβολή $y^2=4x$.

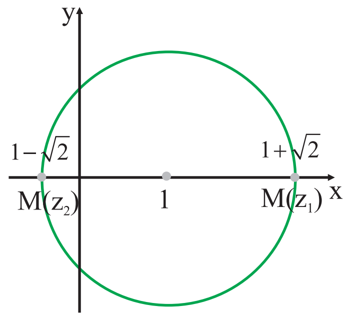
$\mathrm{Re}(z)=2 \Leftrightarrow x=2$, όμως $y^2=4\cdot 2 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$, άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z=0$, $z_1=2+2\sqrt{2}i$ και $z_2=2-2\sqrt{2}i$

2. **Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$, όπου $z=x+yi$ με x ,y πραγματικούς και $z\neq 0$.**

α. Να γραφεί ο μιγαδικός f(z) στη μορφή α + βi.

β. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

f(z) πραγματικός $\Leftrightarrow$ z πραγματικός



γ. Αν ισχύει $f(z)f(\bar{z})=2$, να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου K(1,0) και ακτίνας $R=\sqrt{2}$.

δ. Για τους μιγαδικούς του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|f(z)-1|$.

Λύση

α. Εχουμε: $f(z)=\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{x+yi+1}{x+yi}=\dfrac{[(x+1)+yi](x-yi)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i$

β. Είναι: $f(z)\in R \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z))=0 \Leftrightarrow \dfrac{-y}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow -y=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z\in R$

γ. $f(z)f(\bar{z})=2 \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z}\cdot\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{(z+1)(\bar{z}+1)}{z\bar{z}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{z\bar{z}+z+\bar{z}+1}{z\bar{z}}=2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2+y^2+2x+1}{x^2+y^2}=2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-1=0$, που παριστάνει κύκλο με κέντρο (1,0) και ακτίνα $R=\sqrt{2}$.

δ. $|f(z)-1|=\left|\dfrac{z+1}{z}-1\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$

Όμως η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο (1,0) και ακτίνα $R=\sqrt{2}$. Άρα

$$\max\{|z|\}=|1+R|=\left|1+\sqrt{2}\right| \text{ και } \min\{|z|\}=|1-R|=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$$

Έτσι:

$$\max\{|f(z)-1|\}=\frac{1}{\min\{|z|\}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ και } \min\{|f(z)-1|\}=\frac{1}{\max\{|z|\}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

3. Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 0$ και η συνάρτηση $f:\mathbb{N}^*\to \mathbb{C}$ με $f(\nu)=(i^\nu-1)z$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει: $f(\nu)\cdot f(\nu+1)\cdot f(\nu+2)\cdot f(\nu+3)=0$.

β. Αν ισχύει $f(3)=-1-3i$, να δείξετε ότι: $z=2+i$.

γ. Για τον μιγαδικό z του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $w=f(\nu+1)-f(\nu)$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Λύση:

α. • Αν $\nu=4\kappa,\ \kappa\in\mathbb{N}^*$ τότε $f(\nu)=(i^{4\kappa}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+1,\ \kappa\in\mathbb{N}^*$ τότε $f(\nu+3)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+2,\ \kappa\in\mathbb{N}^*$ τότε $f(\nu+2)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+3,\ \kappa\in\mathbb{N}^*$ τότε $f(\nu+1)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

Άρα για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$, $f(\nu)\cdot f(\nu+1)\cdot f(\nu+2)\cdot f(\nu+3)=0$.

β. $f(3)=-1-3i \Leftrightarrow (i^3-1)z=-1-3i \Leftrightarrow (-1-i)z=-1-3i \Leftrightarrow$

$$z=\frac{-1-3i}{-1-i} \Leftrightarrow z=\frac{(-1-3i)(-1+i)}{(-1)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow z=\frac{4+2i}{2} \Leftrightarrow z=2+i$$

γ. $w=f(\nu+1)-f(\nu)=(1^{\nu+1}-1)z-(i^\nu-1)z=$

$=(i^{\nu+1}-1-i^\nu+1)z=i^\nu(i-1)z$

Έτσι: $|w|=|i^\nu(i-1)z|=|i^\nu|\cdot|-1+i|\cdot|z|=|i|^\nu\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}=1^\nu\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10}$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και $u=z\cdot w$.

α. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν ισχύει $z=-\bar{z}$.

β. Αν για τους z και w ισχύει: $|z+\bar{w}|=|\bar{z}-w|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $u=z\cdot w$ είναι φανταστικός.

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $w=2+i$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Λύση:

α. Αν $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ τότε:

$$z=-\bar{z}\Leftrightarrow \alpha+\beta i=-(\alpha-\beta i)\Leftrightarrow \alpha+\beta i=-\alpha+\beta i\Leftrightarrow$$

$$2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow z \text{ είναι φανταστικός}$$

β. $|z+\bar{w}|=|\bar{z}-w|$ υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$|z+\bar{w}|^2=|\bar{z}-w|^2\Leftrightarrow (z+\bar{w})\left(\overline{z+\bar{w}}\right)=(\bar{z}-w)\left(\overline{\bar{z}-w}\right)\Leftrightarrow$$

$$(z+\bar{w})(\bar{z}+w)=(\bar{z}-w)(z-\bar{w})\Leftrightarrow z\bar{z}+zw+\overline{zw}+w\bar{w}=z\bar{z}-zw-\overline{zw}+w\bar{w}\Leftrightarrow$$

$$2zw=-2\overline{zw}\Leftrightarrow zw=-\overline{zw}\Leftrightarrow u=-\bar{u}$$ που σημαίνει ότι ο z είναι φανταστικός.

γ. Αν $w=2+i$ και $z=x+yi$, $x,y\in R$ τότε:

$$u=zw=(x+yi)(2+i)=2x+xi+2yi+yi^2=(2x-y)+(x+2y)i$$

Αφού ο u είναι φανταστικός, ισχύει:

$$\mathrm{Re}(u)=0\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία y = 2x.

5. Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\dfrac{z+3i}{z+3}$, με $z\neq-3$.

α. Αν $z=x+yi$, $x,y\in R$ να γράψετε τον w στην μορφή $\alpha+\beta i$.

β. Να δείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$.

γ. Να δείξετε ότι αν $|w|=2$, τότε η εικόνα του z κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Λύση:

α. $$w=\frac{x+yi+3i}{x+yi+3}=\frac{x+(y+3)i}{(x+3)+yi}=\frac{[x+(y+3)i][(x+3)-yi]}{(x+3)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x(x+3)-xyi+(x+3)(y+3)i-(y+3)yi^2}{(x+3)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x(x+3)+y(y+3)}{(x+3)^2+y^2}+\frac{-xy+(x+3)(y+3)}{(x+3)^2+y^2}i$$

Έτσι $Re(w)=\dfrac{x^2+y^2+3x+3y}{(x+3)^2+y^2}$, $Im(w)=\dfrac{3x+3y+9}{(x+3)^2+y^2}$

β. Ο w είναι πραγματικός , αν και μόνον αν ,

$$Im(w)=0 \Leftrightarrow 3x+3y+9=0 \Leftrightarrow y=-x-3$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$, με εξαίρεση το σημείο (–3,0), αφού πρέπει $z+3\neq 0 \Leftrightarrow x+3+yi\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$ και $y\neq 0$

γ. $|w|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|z+3i|}{|z+3|}=2 \Leftrightarrow |z+3i|=2|z+3| \Leftrightarrow |x+(y+3)i|=2|(x+3)+yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+(y+3)^3}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $x^2+(y+3)^2=4\left[(x+3)^2+y^2\right]\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+6y+9=4x^2+24x+36+4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2+24x-6y+27=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+8x-2y+9=0$

Επειδή $8^2+(-2)^2-4\cdot 9=64+4-36=32>0$, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-4,1)$ και ακτίνα $R=\dfrac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

6. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί, για τους οποίους ισχύει: $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$, $z_1\neq z_2$ και $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ (1).

α. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

β. Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{iz_1}{z_1-z_2}\right|+\left|\dfrac{\overline{z}_2}{z_1+z_2}\right|\geq 1$.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z_1 αν $z_2=1+i$.

Λύση:

α. $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ υψώνουμε στο τετράγωνο:

$|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)\Leftrightarrow$

$z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$

$2z_1\overline{z}_2 = -2z_2\overline{z}_1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \Leftrightarrow w = -\overline{w}$

Όμως: αν $w = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$.

$w = -\overline{w} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -(\alpha - \beta i) \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow \alpha = 0$, άρα ο w είναι φανταστικός.

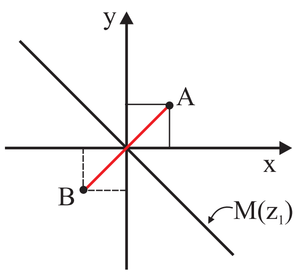
(*2ος τρόπος:*

Διαιρούμε με $|z_2|$, οπότε $\left|\frac{z_1 + z_2}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| \Leftrightarrow |w+1| = |w-1|$, αρα η εικόνα του w ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $A(1,0)$ $B(-1,0)$ $\rightarrow yy'$, άρα w φανταστικός.)

β. Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$\frac{|z_1|}{|z_1 - z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 - z_2|} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 - z_2|} \geq 1 \Leftrightarrow |z_1| + |z_2| \geq |z_1 - z_2|$, που ισχύει διότι

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$, άρα ισχύει και η αρχική .



γ. Για $|z_1 + 1 + i| = |z_1 - 1 - i| \Leftrightarrow |z_1 - (-1 - i)| = |z_1 - (1 + i)|$

Άρα η εικόνα του z_1 κινείται στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $A(-1,-1)$ και $B(1,1)$ που είναι η ευθεία: $(\varepsilon): y = -x$

7. Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$ και $u = z^2$ τέτοιοι ώστε οι εικόνες των z και w σχηματίζουν με την αρχή των αξόνων O, ορθογώνιο τρίγωνο στο O.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι οι διχοτόμοι των αξόνων χωρίς το σημείο τομής τους.

β. Να δείξετε ότι ο u είναι φαντασικός.

γ. Αν ισχύει $\left|z - \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$, να βρείτε το μέτρο του u.

Λύση:

α. Έστω $z = x + yi$ τότε $w = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$.

Έστω M_1 η εικόνα του z $\overrightarrow{OM_1}(x,y)$, M_2 η εικόνα του w $\overrightarrow{OM_2}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

πρέπει:

$$\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{-y}{x} = -1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \quad ή \\ y = -x \end{cases}, \quad z \neq 0$$

Άρα γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του ορθοκανονικού συστήματος χωρίς το $O(0,0)$.

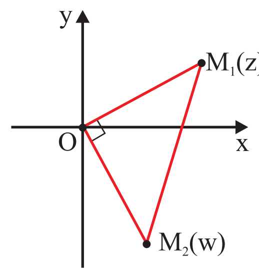
β. $u = z^2 \Leftrightarrow u = (x+yi)^2 \Leftrightarrow u = (x^2 - y^2) + 2xyi$

Όμως από το **α.** ισχύει $y^2 = x^2$ (και $z \neq 0$, $x \neq 0$ και $y \neq 0$)

Έτσι $u = (x^2 - x^2) + 2xyi = 2xyi$, άρα $xy \neq 0$ ο u είναι φανταστικός.

γ. $\left|z - \dfrac{1}{z}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - w| = \sqrt{2}$ (1)

Όμως $|z - w|$: απόσταση των εικόνων του z και του w (M_1M_2).



Στο τρίγωνο OM_1M_2 εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$(M_1M_2)^2 = (OM_1)^2 + (OM_2)^2 \Leftrightarrow |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = |z|^2 + |w|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} = 2 \Leftrightarrow \left(|z|^2\right)^2 - 2|z|^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|z|^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Έτσι $|u| = |z^2| = |z|^2 = 1$.

8. **Αν $z \in C$ και ισχύει $(z+i)^{17} + (2i)^{11}(\overline{z} - i)^6 = 0$, με $z \neq -i$, να αποδείξετε ότι:**

α. $|z+i| = 2$ **β.** $w = \dfrac{(z+i)^2 + 4}{z+i} \in R$ **γ.** $u = (z+i)^{23} \in I$

Λύση:

Είναι: $(z+i)^{17} + (2i)^{11}(\overline{z}-i)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{17} + 2^{11}\cdot i^{11}(\overline{z}-i)^6 = 0 \Leftrightarrow$

$$(z+i)^{17}+2^{11}\cdot(-i)(\overline{z}-i)^{6}=0\Leftrightarrow(z+i)^{17}=2^{11}i(\overline{z}-i)^{6}\quad(1)$$

α. Έχουμε: $(z+i)^{17}=2^{11}\cdot i(\overline{z}-i)^{6}$ και επομένως τα μέτρα τους είναι ίσα, δηλαδή:

$$|z+i|^{17}=|2^{11}|\cdot|i|\cdot|\overline{z}-i|^{6}$$

Όμως $|\overline{z}-i|=\left|\left(\overline{\overline{z}-i}\right)\right|=|z+i|$ οπότε $|z+i|^{17}=2^{11}|z+i|^{6}$ και αφού $|z+i|\neq 0$ είναι:

$$\frac{|z+i|^{17}}{|z+i|^{6}}=2^{11}\Leftrightarrow|z+i|^{11}=2^{11}\Leftrightarrow|z+i|=2$$

β. Είναι: $|z+i|^{2}=(z+i)\overline{(z+i)}=2^{2}\Leftrightarrow 2^{2}=(z+i)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow\overline{z}-i=\dfrac{4}{z+i}\quad(2)$

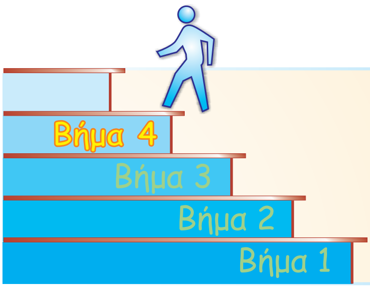
Έχουμε: $w=\dfrac{(z+i)^{2}+4}{z+i}=\dfrac{(z+i)^{2}}{z+i}+\dfrac{4}{z+i}\overset{(2)}{=}z+i+\overline{z}-i=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$

Άρα $w\in R$.

γ. Είναι: $u=(z+i)^{23}=(z+i)^{17}(z+i)^{6}\overset{(1)}{=}2^{11}i(\overline{z}-i)^{6}(z+i)^{6}=$

$=2^{11}i(z+i)^{6}\overline{(z+i)^{6}}=2^{11}i\left|(z+i)^{6}\right|^{2}=2^{11}i|z+i|^{12}=2^{11}i2^{12}$

Έτσι $u=2^{23}i$, άρα $u\in I$.



Λύνουμε μόνοι μας

1.α. **Να λύσετε στο C την εξίσωση:** $z^2 - 2|z| = 0$

β. **Να σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $z \in C$, αν $|z-2| = |z-4i|$.**

2. **Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, όπου $x, y \in R$ και $x \neq 0$, $y \neq 2$. Αν $\left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2$, τότε:**

α. **Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.**

β. **Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |z| και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.**

3. **Έστω ότι για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει:** $|z-4+9i|\le 2$ **. Να αποδείξετε ότι:** $3\le|z-7+5i|\le 7$

....

....

....

....

....

....

....

4. **α. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |z| αν** $|z-5|\le 2$.

β. Αν z_1,z_2 **είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι:** $(z_1\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2)^2\le 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω** $f(z)=\dfrac{2+i\overline{z}}{1-\overline{z}}, z\ne 1$

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=[f(2)]^{2004}$ **είναι πραγματικός.**

β. Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$

γ. Αν |z|=1 και M είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. α. **Αν για το μιγαδικό z ισχύουν** $|z^2+1|<1$ **και** $|z+1|<1$, **να δειχθεί ότι** $|z|\le 1$.

β. **Αν** $z_1, z_2 \in C$ **με** $z_2 \neq 0$, **να δειχθεί η ισοδυναμία:**

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}\in R$$

....

....

....

....

....

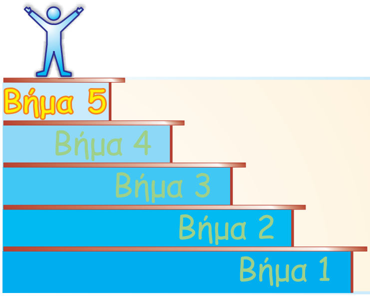
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

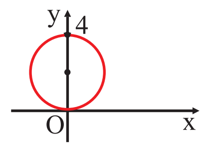
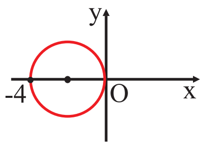
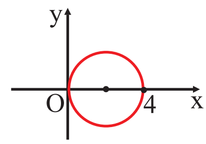
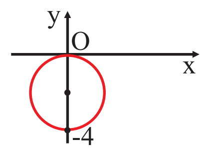
Α.α. Γράψτε τις ιδιότητες που γνωρίζετε για συζυγείς μιγαδικούς και για το μέτρο μιγαδικού.

(Μονάδες 3)

β. Αποδείξτε ότι: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

(Μονάδες 5)

Β.1. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 8 ώστε καθένα από τα σχήματα της πρώτης στήλης να ταιριάζει με την κατάλληλη εξίσωση της δεύτερης στήλης.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. 	**1.** $\lvert z+2\rvert = 2$
	2. $\lvert z-2i\rvert = 4$
	3. $\lvert z-2i\rvert = 2$
Β. 	**4.** $\lvert z-2\rvert = 2$
	5. $\lvert z+2i\rvert = 2$
Γ. 	**6.** $\lvert z+2\rvert = 4$
	7. $\lvert z+2i\rvert = 2$
Δ. 	**8.** $\lvert z-2\rvert = 2$

(Μονάδες 5)

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)

α. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

(Μονάδες 4)

β. Ο κύκλος με εξίσωση $|z-i|=1$ εφάπτεται στον πραγματικό άξονα.

(Μονάδες 4)

γ. Αν $|z-1-i|=\sqrt{2}$ τότε η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $\sqrt{8}$.

(Μονάδες 4)

Θέμα 2^0

Α. Να γράψετε στη μορφή α+βi, όπου $\alpha,\beta\in R$, τους αριθμούς:

Α. $\dfrac{1-3i}{1-i}$ **Β.** $\dfrac{2}{3-4i}$

(Μονάδες 12)

α. Αν εικόνα του $z \in C$ "γράφει" την ευθεία y=x τότε η εικόνα του $\bar{z}$ "γράφει" την ευθεία:

Α. $y=0$ **Β.** $x=0$ **Γ.** $x+y=0$ **Δ.** $y=x+1$ **Ε.** $y=x+2$

(Μονάδες 7)

β. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστες έχει ρίζα τον αριθμό $3i-\sqrt{3}$. Η άλλη ρίζα της είναι ο αριθμός:

Α. $3-i\sqrt{3}$ **Β.** $-\sqrt{3}-3i$ **Γ.** $\sqrt{3}-3i$ **Δ.** $-\sqrt{3}+3i$ **Ε.** $\sqrt{3}+3i$

(Μονάδες 6)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

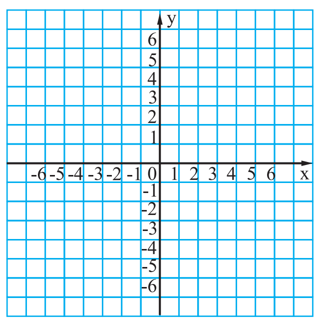
....

....

Θέμα 3ο

Α. Στο διπλανό σχήμα να χαράξετε την ευθεία $|z-2i|=|z+2|$ και να γραμμοσκιάσετε την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου τα σημεία της οποίας επαληθεύουν την σχέση $|z-2i| \leq |z+2|$.

(Μονάδες 13)



Β. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου με κέντρο την εικόνα του 2-i και ακτίνα 2 τότε:

Α. $|z+2-i|<2$ **Β.** $|z-2+i|<2$ **Γ.** $|z-2+i|<4$

Δ. $|z+2-i|<4$ **Ε.** $|z+2+i|<2$

(Μονάδες 12)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4^0

Έστω z, w μιγαδικοί που συνδέονται με τη σχέση $w = z + \frac{1}{z}$, με $z \neq 0$. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε έλλειψη.

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....