ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μάθημα Θετικής Κατεύθυνσης

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΑΘΗΝΑ 1999

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία: Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Συντονιστές: Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed.
Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος
Μακρής Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος

Συγγραφική ομάδα: Βογιατζόγλου Σωτήρης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Μέτης Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

Για το τεύχος αυτό:

ΜΕΡΟΣ Α΄: Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Συντονιστής: Μακρής Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος

Συντάκτες κειμένων: Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Α Ν Α Λ Υ Σ Η

Συντονιστής: Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος

Συγγραφική ομάδα: Βογιατζόγλου Σωτήρης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Μέτης Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.
Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ   Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

ΜΕΡΟΣ Α΄ - ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο: *Πίνακες - Γραμμικά Συστήματα*

Κεφάλαιο 2ο: *Μιγαδικοί Αριθμοί*

ΜΕΡΟΣ Β΄ - ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 1ο:

Ι. *Συναρτήσεις*

ΙΙ. *Όρια - Συνέχεια*

Φωτογραφία εξωφύλλου: Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Επιμέλεια εξωφύλλου: Σ. Βογιατζόγλου, Π. Βουργάνας, Η. Γεωργακάκος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), συνεχίζοντας την προσπάθεια υποβοήθησης των εκπαιδευτικών στο δύσκολο έργο τους, συνέταξε νέα βιβλία που αναφέρονται στην αξιολόγηση των μαθητών της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου (Ε.Λ.). Κατά τη σύνταξή τους έχουν ληφθεί υπόψη οι παρατηρήσεις και υποδείξεις των εκπαιδευτικών που χρησιμοποίησαν κατά το σχολικό έτος 1998-99 τα αντίστοιχα βιβλία για τους μαθητές των Α΄ και Β΄ τάξεων του Λυκείου, και οι διαπιστώσεις που προέκυψαν από έρευνες σχετικές με την αξιοποίηση των βιβλίων αυτών στη σχολική πράξη.

Με την ευκαιρία της έκδοσης των νέων βιβλίων θα ήθελα να επαναλάβω ακόμη μια φορά τα κύρια σημεία του τρόπου χρησιμοποίησής τους. Η επανάληψη αυτή στοχεύει στην εξάλειψη μερικών παιδαγωγικών σφαλμάτων που, παρά τις συνεχείς ενημερώσεις, έγιναν κατά το πρόσφατο παρελθόν. Τα σημεία αυτά είναι τα εξής:

- Οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στα βιβλία αξιολόγησης των μαθητών ***έχουν ενδεικτικό χαρακτήρα***. Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι υποχρεωμένοι να τις χρησιμοποιούν αυτούσιες. ***Έχουν τη δυνατότητα να τις τροποποιούν έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στις ιδιαιτερότητες των μαθητών τους, να τις απλουστεύουν, εφόσον τις θεωρούν δύσκολες, να παραλείπουν όσες κρίνουν πως δεν αντιστοιχούν στο επίπεδο των μαθητών τους ή στους διδακτικούς στόχους, τους οποίους οι ίδιοι θέτουν***. Τα παραδείγματα αυτά επιδιώκουν ακόμη να βοηθήσουν τους διδάσκοντες στο να εκπονούν ***οι ίδιοι δικές τους ερωτήσεις***. Πρόθεσή μας δεν είναι να περιορίσουμε την ελευθερία και την παιδαγωγική αυτονομία του εκπαιδευτικού, αλλά να του προσφέρουμε ιδέες που θα τον βοηθήσουν να αυξήσει τα περιθώρια της πρωτοβουλίας του και να βελτιώσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του.
- Η προσπάθεια ορισμένων εκπαιδευτικών να αναθέτουν στους μαθητές τους την επεξεργασία όλων των ερωτήσεων που περιέχονται στα βιβλία του Κ.Ε.Ε. από το ένα μέρος, και το πλήθος των σχετικών παραδειγμάτων από το άλλο οδήγησαν κατά το πρόσφατο παρελθόν σε σημαντική αύξηση της εργασίας των μαθητών. Η τακτική αυτή, της οποίας οι αρνητικές συνέπειες είναι προφανείς, οφείλεται σε παρεξήγηση και σε μη ορθή κατανόηση του σκοπού, τον οποίο υπηρετεί το παραπάνω παιδαγωγικό υλικό. Οι Ομάδες Εργασίας του Κ.Ε.Ε. εκπόνησαν για κάθε ενότητα της διδακτέας ύλης ικανό αριθμό ερωτήσεων, επειδή στόχος τους ήταν: α) να καλύψουν ευρύ φάσμα διδακτικών στόχων, β) να ικανοποιήσουν ποικίλα επίπεδα απαιτήσεων και γ) να αξιοποιήσουν τα θετικά στοιχεία διαφορετικών τύπων ερωτήσεων. Επιδίωξαν, με άλλα λόγια, να διευρύνουν, μέσα από την παροχή πολλών παραδειγμάτων, τη δυνατότητα επιλογής ερωτήσεων από τους διδάσκοντες και να καλύψουν στο βαθμό του δυνατού, όλες τις πιθανές ανάγκες τους, οι οποίες είναι λογικό να διαφέρουν από εκπαιδευτικό σε εκπαιδευτικό και από τάξη σε τάξη. ***Ποτέ, όμως, και για κανένα λόγο, δε ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς ούτε να εξαντλούν τα σχετικά παραδείγματα, ούτε να περιορίζονται αποκλειστικά σ' αυτά, ούτε να φωτοτυπούν τα βιβλία αξιολόγησης και να δίνουν όλες τις ερωτήσεις στους μαθητές τους. Κάτι τέτοιο και αντιπαιδαγωγικό είναι και αντίθετο προς το πνεύμα της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Κάθε διδάσκων οφείλει να επιλέγει από***

κάθε ενότητα μικρό αριθμό ερωτήσεων, οι οποίες ανταποκρίνονται στους διδακτικούς στόχους που επιδιώκει και στα κριτήρια που ο ίδιος θέτει. Αυτές πρέπει να αξιοποιεί στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης.

- Τα θέματα και οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στα βιβλία αξιολόγησης δεν προορίζονται μόνο για εργασίες των μαθητών στο σπίτι ή για την εκπόνηση ολιγόλεπτων και ωριαίων διαγωνισμάτων. Πολλά από τα θέματα και τα ερωτήματα αυτά μπορούν και πρέπει να αξιοποιούνται στο πλαίσιο της καθημερινής σχολικής εργασίας. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τα ζητήματα εκείνα που, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, παρουσιάζουν δυσκολίες για το μέσο μαθητή.
- Οι εκπαιδευτικοί πρέπει ακόμη να έχουν υπόψη τους ότι καμιά από τις ερωτήσεις που περιέχονται στα βιβλία αξιολόγησης δεν χρησιμοποιείται αυτούσια στις προαγωγικές και απολυτήριες εξετάσεις. Στις εξετάσεις αυτές τίθενται ερωτήσεις ανάλογες προς εκείνες που περιέχονται στα βιβλία αυτά και στα σχολικά εγχειρίδια, διαφορετικές, όμως, ως προς το περιεχόμενό τους. Οι προαγωγικές εξετάσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την περασμένη σχολική χρονιά (1998-99) επιβεβαιώνουν πλήρως όσα προαναφέρθηκαν. Μάταια, λοιπόν, μερικοί εκπαιδευτικοί καταπονούν τους μαθητές τους με υπέρμετρο φόρτο εργασίας, επειδή πιστεύουν ότι, εξαντλώντας όλες τις ερωτήσεις που περιέχονται στα βιβλία του Κ.Ε.Ε., θα "πιάσουν" -κατά το κοινώς λεγόμενο- τα θέματα των προαγωγικών και απολυτήριων εξετάσεων.
- Η χρησιμοποίηση, τέλος, των ερωτήσεων που περιέχονται στα παραπάνω βιβλία δεν αποκλείει ούτε εμποδίζει την αξιοποίηση των ερωτήσεων που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Για τη διεύρυνση της βοήθειας που φιλοδοξεί το Κ.Ε.Ε. να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς στο κρίσιμο ζήτημα της αξιολόγησης των μαθητών, έχουν γίνει και οι εξής συμπληρωματικές ενέργειες: Τα παραδείγματα των ερωτήσεων που περιέχονται στα βιβλία αξιολόγησης έχουν καταχωρισθεί στη σελίδα του Internet του Υπουργείου Παιδείας, από την οποία μπορούν να τα αντλούν όσοι έχουν τη δυνατότητα πρόσβασης στο διαδίκτυο. Σύντομα το Κ.Ε.Ε. θα έχει τη δυνατότητα να προσφέρει τη βοήθεια αυτή με δικά του μέσα. Προωθείται, τέλος, η επανέκδοση όλων των ερωτήσεων που έχουν εκπονηθεί από το Κ.Ε.Ε. σε ηλεκτρονική μορφή (cd-rom).

Τελειώνοντας αισθάνομαι την ανάγκη να συγχαρώ τους επιστημονικούς συνεργάτες του Κ.Ε.Ε. για την εργασία τους και να ευχαριστήσω τις δεκάδες των εκπαιδευτικών για τα σχόλια που μας έστειλαν και τις υποδείξεις τους. Εύχομαι και τα νέα βιβλία να αποδειχθούν, όπως και τα προηγούμενα, πολύτιμο εργαλείο στην προσπάθεια βελτίωσης του τρόπου αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου.

Ιούνιος 1999
Ο Πρόεδρος του Κ.Ε.Ε.

Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα, τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για τη λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, ***έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα*** για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Ιούνιος 1999

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο: ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Ένας διαγώνιος πίνακας είναι πάντα τετραγωνικός. **Σ** **Λ**

2. * Όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ενός διαγωνίου πίνακα είναι διάφορα του μηδενός. **Σ** **Λ**

3. * Ένας μηδενικός πίνακας είναι πάντα τετραγωνικός. **Σ** **Λ**

4. * Στην πρόσθεση πινάκων ιδίων διαστάσεων ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. **Σ** **Λ**

5. * Για τους μ x μ πίνακες[*] ΑΒ ισχύει πάντοτε $(AB)^ν = A^ν B^ν$, $ν \in N^*$. **Σ** **Λ**

6. * Ισχύει πάντοτε $AB = O \Leftrightarrow A = O$ ή $B = O$. **Σ** **Λ**

7. * Αν ορίζεται το γινόμενο των πινάκων Α, Β και $A \neq O$, $B \neq O$, τότε είναι πάντοτε και $AB \neq O$. **Σ** **Λ**

8. * Αν $AB = O$ και $B \neq O$ τότε ο Α είναι μη αντιστρέψιμος. **Σ** **Λ**

9. * Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται. **Σ** **Λ**

0. * Ο πίνακας A^{-1} έχει στοιχεία τους αντίστροφους αριθμούς των στοιχείων του Α. **Σ** **Λ**

1. * Υπάρχει $θ \in R$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} ημθ & 0 \\ 0 & συνθ \end{bmatrix}$ να είναι μοναδιαίος. **Σ** **Λ**

2. * Υπάρχει $x \in R$ ώστε οι πίνακες:
$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ x & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ να είναι ίσοι. **Σ** **Λ**

3. * Αν $I_ν$ ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης ν τότε $I_ν A = A$ για οποιονδήποτε πίνακα Α διάστασης ν x κ. **Σ** **Λ**

---
[*] Όπου γράφεται ΑΒ υποτίθεται ότι ορίζεται το γινόμενο των πινάκων Α, Β.

4. * Αν Α = Β και ορίζονται τα γινόμενα ΑΓ, ΒΓ, θα είναι ΑΓ = ΒΓ. **Σ** **Λ**

5. * Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει ευθείες σε ευθείες. **Σ** **Λ**

6. * Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού ως προς την αρχή των αξόνων είναι ο $-I_2$. **Σ** **Λ**

7. * Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού στη συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

8. * Η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία y = x είναι ισομετρία. **Σ** **Λ**

9. * Η ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda \neq 0$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. **Σ** **Λ**

0. * Η παράλληλη μεταφορά είναι γραμμικός μετασχηματισμός. **Σ** **Λ**

1. * Η ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda \neq 0, 1$ είναι ισομετρία. **Σ** **Λ**

2. * Η παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία. **Σ** **Λ**

3. * Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός έχει ένα μόνο πίνακα μετασχηματισμού. **Σ** **Λ**

4. * Ο γραμμικός μετασχηματισμός $\begin{matrix} x' = x \\ y' = -x + y \end{matrix}$ έχει πίνακα τον $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

5. * Δεν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την αρχή των αξόνων στο σημείο (1, 0). **Σ** **Λ**

6. * Η στροφή με κέντρο Ο και γωνία $\theta = \frac{3\pi}{2}$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

7. * Στο γραμμικό μετασχηματισμό Τ : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

το μοναδιαίο διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ έχει εικόνα το $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

8. * Σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό Τ τα σημεία Α (0, 1) και Β (1, 2) απεικονίζονται στα Α΄ (0, 2) και Β΄ (1, 4) αντιστοίχως. Ο Τ είναι ισομετρία. **Σ** **Λ**

9. * Ο πίνακας της στροφής κατά γωνία θ = 135° είναι

$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

0. * Στη συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x το τρίγωνο με κορυφές Α (1, 1), Β (0, 1), Γ (1, 2) έχει εικόνα το Α΄Β΄Γ΄

με αντίστοιχο πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **Σ** **Λ**

1. * Αν ο κ είναι ακέραιος αριθμός η τιμή της ορίζουσας

$A = \begin{vmatrix} 1999 & \kappa \\ -2000 & 2001 \end{vmatrix}$ είναι άρτιος αριθμός. **Σ** **Λ**

2. * Αν το μη ομογενές σύστημα $\left.\begin{array}{r} x + 3y = \alpha \\ \frac{1}{3}x + y = \beta \end{array}\right\}$ δέχεται άπειρες λύσεις, τότε α = β. **Σ** **Λ**

3. * Το (0, 0) είναι λύση του συστήματος $\left.\begin{array}{r} \alpha x + \beta y = 0 \\ \kappa x + \lambda y = 0 \end{array}\right\}$. **Σ** **Λ**

4. * Το σύστημα $\left.\begin{array}{r}0x+0y=0\\0x+0y=5\end{array}\right\}$ είναι αόριστο. **Σ** **Λ**

5. * Το σύστημα $\left.\begin{array}{r}3x-\beta y=\alpha\\\beta x+3y=\gamma\end{array}\right\}$, α, β, γ ∈ R, έχει πάντα λύση. **Σ** **Λ**

6. * Έστω D, D_x, D_y, οι ορίζουσες του συστήματος

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1\\\alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2\end{array}\right\}$, με πραγματικούς συντελεστές. Τότε:

i) αν $D = D_x = D_y = 0$, το σύστημα είναι πάντα αόριστο **Σ** **Λ**

ii) αν $(D - 1)^2 + (2D - 2)^2 = 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση **Σ** **Λ**

iii) αν $D^2 + (D_x - 1)^2 = 0$, το σύστημα είναι αόριστο **Σ** **Λ**

iv) αν $|D|+|5-D_y|=0$, το σύστημα είναι αδύνατο **Σ** **Λ**

7. * Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο ζεύγη λύσεων. **Σ** **Λ**

8. * Αν $\alpha' \cdot \beta' \neq 0$ και η ορίζουσα D του συστήματος

$\left.\begin{array}{r}\alpha x+\beta y=\gamma\\\alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{array}\right\}$ είναι μηδέν, τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$. **Σ** **Λ**

9. * Αν $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, το σύστημα $\left.\begin{array}{r}\alpha_1 x+\beta_1 y=0\\\alpha_2 x+\beta_2 y=0\end{array}\right\}$ δέχεται άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

0. * Αν $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, το σύστημα $\left.\begin{array}{r}\alpha_1 x+\beta_1 y=0\\\alpha_2 x+\beta_2 y=8\end{array}\right\}$ δέχεται πάντα άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Αν οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ είναι ίσοι, τότε ο x ισούται με

Α. 0 **Β.** - 1 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** - 2

2. ***** Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} συνθ & 0 \\ 0 & ημθ \end{bmatrix}$ είναι μηδενικός, όταν

Α. $θ = 0$ **Β.** $θ = \frac{π}{2}$ **Γ.** $θ = π$

Δ. $θ = 2κπ$, $κ \in Z$ **Ε.** δεν υπάρχει τιμή του θ ώστε Α = Ο

3. ***** Δίνεται ο πίνακας $A = [α_{ij}]$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ με $α_{ij} = i^3 - 2j$. Από τους παρακάτω αριθμούς στοιχείο του πίνακα Α είναι ο αριθμός

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** 1 **Δ.** 6 **Ε.** - 2

4. ***** Ο πίνακας $\begin{bmatrix} x^3 & x - 1 \\ x^2 - 1 & 1 \end{bmatrix}$ γίνεται μοναδιαίος

Α. για μια τιμή του $x \in R$ **Β.** για δύο τιμές του $x \in R$

Γ. για τρεις τιμές του $x \in R$ **Δ.** για άπειρες τιμές του $x \in R$

Ε. για καμία τιμή του $x \in R$

5. ***** Για οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες Α, Β, **δεν** ισχύει πάντα η παρακάτω ισότητα

Α. $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$ **Β.** $(A^p)^q = A^{pq}$

Γ. $A^1 = A$ **Δ.** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ε. $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$

(όπου p, q θετικοί ακέραιοι αριθμοί)

6. ***** Αν Α = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και το γινόμενο ΑΒ είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε

ο πίνακας Β είναι διάστασης

Α. 2 x 2 **Β.** 2 x 3 **Γ.** 3 x 2 **Δ.** 3 x 3

Ε. κανένα από τα παραπάνω

7. ***** Ο πίνακας Α διάστασης ν x μ με ν ≠ μ έχει αντίστροφο πίνακα διάστασης

Α. μ x ν **Β.** ν x ν **Γ.** ν x μ

Δ. τον μοναδιαίο **Ε.** κανένα

8. ***** Ο πίνακας Α = $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται

Α. όταν μ = 0 και α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

Β. όταν μ = 0 και α = 0

Γ. όταν μ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και α ≠ 0

Δ. όταν μ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και α = 0

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

9. ***** Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο

Α. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **Β.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **Γ.** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Δ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **Ε.** δεν υπάρχει

10. ***** Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο

Α. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **Β.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **Γ.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Δ. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ **Ε.** δεν υπάρχει

11. ***** Ο πίνακας $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό

Α. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y

Γ. συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία y = x

Δ. στροφή κατά 90°

Ε. στροφή κατά 180°

12. ***** Σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό Τ με αντιστρέψιμο πίνακα, τα σημεία Α (1, 2), Β (-1, 0) έχουν εικόνες τα σημεία Α΄ (-1, 2), Β΄ (0, -1) αντιστοίχως. Η εικόνα της ευθείας ΑΒ έχει εξίσωση

Α. y = x + 1 **Β.** y = 3x + 1 **Γ.** y = - 3x - 1

Δ. y = x - 1 **Ε.** y = 1

13. ***** Αν ο μετασχηματισμός με πίνακα Μ = $\begin{bmatrix} συνx & ημx \\ -ημx & συνx \end{bmatrix}$ είναι στροφή με κέντρο Ο και γωνία x, τότε η x μπορεί να ισούται με

Α. θ **Β.** - θ **Γ.** 90° - θ **Δ.** 180° - θ **Ε.** 90° + θ

14. * Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ είναι συμμετρία ως προς την ευθεία

Α. y = - 1 **Β.** x = - 1 **Γ.** y = x **Δ.** y = - x **Ε.** y = 0

15. * Στο γραμμικό μετασχηματισμό που έχει πίνακα τον Μ και υπάρχει ο M^{-1} το σημείο Β΄ (1, - 1) έχει πρότυπο το Β (x, y) που οι συντεταγμένες του δίνονται από το γινόμενο των πινάκων

Α. $M\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **Β.** $M\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Γ.** $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δ. $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Ε.** $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. * Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix} -3x + 2y = \alpha \\ 6x - 4y = \kappa\alpha \end{matrix}\right\}$, $\alpha \in R^*$, έχει άπειρες λύσεις, το κ ισούται με

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** - 1

17. * Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix} 2x + \kappa y = 0 \\ 6x + 9y = 3 \end{matrix}\right\}$, $\kappa \in R$ είναι αδύνατο, το κ ισούται με

Α. 3 **Β.** - 3 **Γ.** 0

Δ. οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό **Ε.** 2

18. * Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix} \alpha x + 3y = -9 \\ 2x - y = 3 \end{matrix}\right\}$, $\alpha \in R$, επαληθεύεται για δύο ζεύγη τιμών των x, y, τότε το α ισούται με

Α. - 2 **Β.** 3 **Γ.** - 9 **Δ.** - 6 **Ε.** 0

19. ***** Έστω D, D_x, D_y, οι ορίζουσες του συστήματος $\left.\begin{array}{l}\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1\\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2\end{array}\right\}$, με πραγματικούς συντελεστές.

i) Αν $D_x + D_y = D$, $D \neq 0$ και x = y, τότε η λύση του συστήματος είναι

Α. (1, 1) **Β.** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **Γ.** (- 1, - 1) **Δ.** (0, 0) **Ε.** (- 2, - 2)

ii) Αν $D \neq 0$ και $D = D_x$, $D = 2D_y$, τότε η λύση του συστήματος είναι

Α. (1, 1) **Β.** $(1, \frac{1}{2})$ **Γ.** $(- 1, \frac{1}{2})$ **Δ.** $(1, - \frac{1}{2})$ **Ε.** (- 1, - 1)

iii) Αν $D^2 + |D_x - 5| = 0$, τότε για το σύστημα ισχύει

Α. έχει λύση το ζεύγος (5, 0)

Β. έχει λύση το ζεύγος (- 5, 0)

Γ. έχει άπειρες λύσεις

Δ. είναι αδύνατο

Ε. κανένα από τα παραπάνω

20. ***** Αν στο σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha_1 x + \beta_1 y = 0\\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 7\end{array}\right\}$, με πραγματικούς συντελεστές είναι $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$, τότε

Α. το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική (0, 0)

Β. το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Γ. το σύστημα είναι αδύνατο

Δ. το σύστημα έχει μία μόνο λύση διάφορη της μηδενικής

Ε. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ένα **μόνο** από τα παραπάνω για τη λύση του

21. ***** Το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha x - y = 0\\ x + \alpha y = 0\end{array}\right\}$, $\alpha \in R$, έχει λύση

Α. μόνο την (x, y) = (1, 1)

Β. μόνο την (x, y) = (0, 0)

Γ. άπειρες λύσεις

Δ. είναι αδύνατο

Ε. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ένα **μόνο** από τα παραπάνω για τη λύση του

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Αν $\alpha \neq 0$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, ώστε κάθε πίνακας της στήλης Α να αντιστοιχεί στον αντίστροφό του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	**1.** $\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$
	2. $\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Β. $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	**3.** $\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$
Γ. $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	**4.** $\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$
	5. $\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$
Δ. $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$	**6.** $\frac{1}{\alpha^2}\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

2. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μετασχηματισμός στροφής της στήλης Α να αντιστοιχεί στον πίνακα μετασχηματισμού της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$	**1.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Β. στροφή κατά π	
	3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Γ. στροφή κατά $\frac{3\pi}{2}$	**4.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Δ. στροφή κατά 2π	**5.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

3. * Με βάση το μετασχηματισμό $\left.\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 3x - y \end{aligned}\right\}$ να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε σημείο του καρτεσιανού επιπέδου της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α ***σημείο***	**Στήλη Β** ***εικόνα***
	1. (3, 1)
Α. (0, 0)	**2.** (1, 3)
Β. (1, 0)	**3.** (2, - 1)
Γ. (0, 1)	**4.** (2, - 3)
Δ. (1, 1)	**5.** (3, 2)
	6. (0, 0)

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

4. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε σύστημα της στήλης Α να αντιστοιχεί στη λύση του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α ***σύστημα***	**Στήλη Β** ***λύσεις συστήματος***
Α. $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$	**1.** αδύνατο
	2. (x, 5x - 1, 3x), x ∈ R
Β. $\begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x - 3y - 6z = 1 \end{cases}$	**3.** (2, 1, - 1)
	4. (9, 1, 1)
Γ. $\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$	**5.** (7, 4, - 1)
	6. (- 14λ, - 14λ, 14λ), λ ∈ R

Α	**Β**	**Γ**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

γραμμικός μετασχηματισμός	***εικόνα του i = (1, 0)***	***εικόνα του j = (0, 1)***	***πίνακας του μετασχηματισμού***
συμμετρία ως προς τον x΄x			
	(- 1, 0)	(0, 1)	
			$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
στροφή κατά γωνία $\frac{5\pi}{6}$			
	(0, 1)	(1, 0)	

2. ***** Για κάθε σύστημα της πρώτης στήλης να συμπληρώσετε το αντίστοιχο διπλανό κενό διάστημα με μία από τις παρακάτω φράσεις:

Α. *έχει μία λύση* **Β.** *έχει άπειρες λύσεις* **Γ.** *είναι αδύνατο*

α) $\begin{matrix} 0x + 0y = 2 \\ 0x + y = 0 \end{matrix}$ ....

β) $\begin{matrix} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}$ ....

γ) $\begin{matrix} 0x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}$ ....

δ) $\begin{matrix} x + 0y = 5 \\ 0x + y = 2 \end{matrix}$ ....

ε) $\begin{matrix} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}$ ....

3. ***** Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος

$$\left.\begin{matrix} \alpha x + \beta y = \gamma \\ 4x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{matrix}\right\} , \ \alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1, \in R,$$

ισχύουν κατά περίπτωση οι σχέσεις που αναγράφονται στη στήλη Α.
Να συμπληρώσετε τη στήλη Β με μία από τις παρακάτω φράσεις:

Α. *είναι αδύνατο* **Β.** *έχει άπειρες λύσεις* **Γ.** *έχει μία και μοναδική λύση*

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $D - 3 = 0$	
β) $\lvert D\rvert + \lvert D_x\rvert + \lvert D_y\rvert = 0$	
γ) $D = 0$ και $\lvert D_x\rvert + \lvert D_y\rvert \neq 0$	
δ) $\lvert D - 2\rvert = 0$	
ε) $D^2 + (D_y + 1)^2 = 0$	

4. * Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά διαστήματα με μια εξίσωση, έτσι ώ-στε να αληθεύει η πρόταση που ακολουθεί:

α) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα είναι αδύνατο*

β) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 7 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα έχει λύση το ζεύγος (x, y) = (- 2, 3)*

γ) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις*

δ) $\left.\begin{array}{l} 0x + 0y = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα είναι αδύνατο*

ε) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα έχει λύση ζεύγη αριθμών που είναι συντεταγμένες σημείων της ευθείας που είναι διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος Oxy.*

στ) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ *Το σύστημα έχει λύση ζεύγος αντίθετων αριθμών*

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Να βρείτε τον 2x2 πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τη σχέση: $\alpha_{ij} = i^2 - 3j$.

2. ****** Να εξετάσετε αν υπάρχουν x, y, z, $\omega \in R$, τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} x-1 & y+2 \\ z & \omega^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. ****** Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \ln x \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \ln^2 x & 10^y \\ 1 & 100 \end{bmatrix}$, με $x > 0$, να βρεθούν τα x, y ώστε ο πίνακας AB να είναι διαγώνιος.

4. ****** Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε:

α) Να βρείτε τα γινόμενα ΑΓ και ΒΓ.

β) Τι συμπέρασμα προκύπτει για την πρόταση “Αν ΑΓ = ΒΓ, τότε Α = Β”;

5. ****** Αν ΑΓ = ΒΓ και Γ αντιστρέψιμος πίνακας, να δείξετε ότι Α = Β.

6. ****** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$.

α) Να υπολογιστούν οι A^2, A^3.

β) Να βρεθεί ο A^{2000}.

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $A^{48} + A^{69} + A^{94} + A^{151}$.

7. ** Να βρεθεί για ποιες τιμές των x και y είναι ίσοι οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} \log x^3 + 2\log x & 3 & y^2 + 6 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & x \\ 2 & e^{x-5y} & -7 \end{bmatrix}$$

8. ** Να βρεθούν όλοι οι πίνακες της μορφής $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$, $x, y, z \in R$, τέτοιοι ώστε $X^2 + 3X + 2I = O$.

9. ** Αν $A = \begin{bmatrix} x^2+1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 2 & x^2+5x \end{bmatrix}$, να λυθεί η εξίσωση $A - B = O$.

10. ** Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι $x, y \in R$ ώστε οι πίνακες να αντιμετατίθενται.

11. ** Αν $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο $x \in R$ ώστε να ισχύει $A^3 = x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12. ** Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ και $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, να βρείτε τον $\Gamma = A - I$ και να δείξετε ότι $\Gamma^2 = O$.

13. ** Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \lambda & \kappa \end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι $AB = BA$.

14. ** Έστω ο πίνακας $A(x) = \begin{bmatrix} συνx & -ημx \\ ημx & συνx \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι:

α) $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) = A(x + y)$

β) $A(0) = I$

γ) $A^{-1}(x) = A(-x)$

δ) $A^{ν}(x) = A(νx)$, $ν \in N^*$

ε) Αν $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο B^{1999}.

στ) Να βρεθεί ο μικρότερος $ν \in N^*$, ώστε $B^{ν} = I$.

15. ** Αν $A(x) = \begin{bmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in R$, να αποδειχθεί ότι:

α) $A(x_1) \cdot A(x_2) = A(x_1 + x_2)$

β) $A(x) \cdot A(-x) = I_3$

16. ** Αν $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

α) Να αποδειχθεί ότι: i) $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$

ii) $A(x) \cdot A(-x) = A(0) = I_3$

iii) $(A(x) - I)^3 = O$

iv) $A(3x) - 3A(2x) + 3A(x) = I_3$

β) Να βρεθεί ο $A^{-1}(x)$.

17. ** Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$, οι αριθμοί w, y είναι αντίστροφοι και $A^2 = I$, να δειχθεί ότι $A^{2\nu+1} = \frac{1}{y}\begin{bmatrix} 0 & y^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

18. ** Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, να υπολογιστούν:

α) οι A^2, A^3

β) οι A^{1993}, A^{2000}, A^{2001}

γ) ο A^ν

δ) ο αντίστροφος του A^2 και ο αντίστροφος του A^{1997}.

19. ** Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$, για ποιες τιμές του x ισχύει $|A^2| = 2|A|$.

20. ** Δίνεται πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ με $A^2 = O$. Να δείξετε ότι:

α) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix}$.

β) Αν $M = \begin{bmatrix} 1+2^\kappa & 1 \\ -[1+2^{\kappa+1}(1+2^{\kappa-1})] & -(1+2^\kappa) \end{bmatrix}$, $\kappa \in N$ και $\nu \geq 2$, τότε $M^\nu = O$.

21. ** Να βρεθεί ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού που απεικονίζει κάθε σημείο του επιπέδου στην ευθεία y = x.

Παρατήρηση: *Προτείνεται η διδασκαλία των ασκήσεων 55, 56, 57, 58, 59, 60 της τεχνολογικής κατεύθυνσης.*

22. ** Να βρεθεί ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού κατά τον οποίο οι εικόνες των σημείων Α (1, 1) και Β (2, - 1) είναι το σημείο (6, 3).

23. ** Να εκφράσετε με γεωμετρικούς όρους τους μετασχηματισμούς που ορίζονται από τους παρακάτω πίνακες:

$$A = 0{,}5\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} συν50° & -συν40° \\ συν40° & συν50° \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} -συν120° & -ημ60° \\ ημ120° & συν60° \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ημθ & -συνθ \\ συνθ & ημθ \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} ημ(π+θ) & -συν(π+θ) \\ συν(π+θ) & ημ(π+θ) \end{bmatrix}$$

24. ** Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} λ & 0 \\ 0 & λ \end{bmatrix}$, $λ > 0$

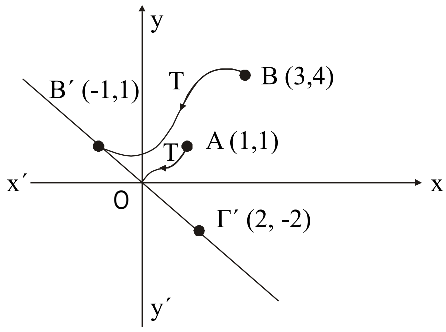
α) μετασχηματίζει την ευθεία ε σε ευθεία ε΄ παράλληλη με την ε.

β) κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄ τέτοιο ώστε: (Α΄Β΄) = λ · (ΑΒ).

25. ** Να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία Α (1, 0), Β (1, 1), Γ (1, 2) στα σημεία Α΄ (1, 2), Β΄ (1, 3), Γ΄ (1, 4) αντιστοίχως.

26. ** Αν $α^2 + β^2 \neq 0$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει την αρχή των αξόνων στο σημείο Γ (α, β).

7. ** Το διπλανό σχήμα μας δείχνει το γραμμικό μετασχηματισμό Τ που απεικονίζει τα σημεία Α, Β στα Ο, Β΄ αντιστοίχως. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:



α) Ο πίνακας του Τ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος δεν έχει αντίστροφο.

β) Η εξίσωση της ευθείας ΟΒ΄ είναι η $y = -x$ και κάθε σημείο του επιπέδου έχει εικόνα σημείο της ευθείας αυτής.

γ) Κάθε εσωτερικό σημείο της κυρτής γωνίας $x΄Oy$ έχει εικόνα ως προς το μετασχηματισμό Τ σημείο της ημιευθείας ΟΒ΄.

δ) Το σημείο Γ΄ (2, - 2) ανήκει στην ευθεία $y = -x$ και είναι εικόνα ως προς το μετασχηματισμό Τ κάθε σημείου της ευθείας ε : $y = x - 2$. Να σχεδιαστεί η ε.

28. ** Δίνεται η καμπύλη C : $y = 2x^2$. Να βρεθούν οι εικόνες της στους παρακάτω γραμμικούς μετασχηματισμούς και να παρασταθούν γραφικά.

α) συμμετρία ως προς τον x΄x

β) συμμετρία ως προς τον y΄y

γ) ομοιοθεσία με λόγο 2.

29. ** Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός T_1 με πίνακα $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

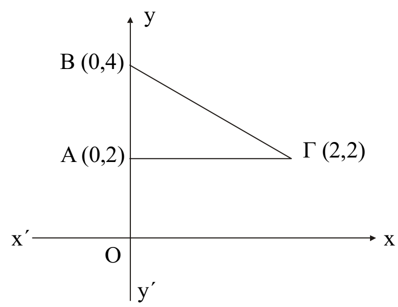
α) Να βρεθεί η εικόνα Α΄ του σημείου Α (2, 3).

β) Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό T_2 με πίνακα τον M^{-1}. Να βρεθεί στο T_2 η εικόνα του Α΄ του ερωτήματος (α). Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την παρατήρησή σας.

0. ** Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα έχει σχεδιαστεί το τρίγωνο ΑΒΓ.

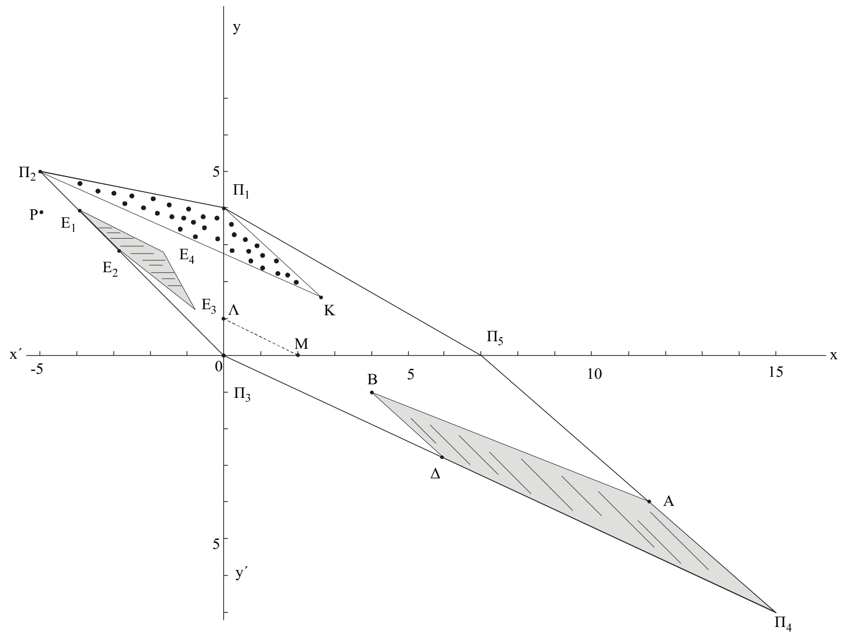
α) Να βρείτε την εικόνα Α΄Β΄Γ΄ του ΑΒΓ με βάση το μετασχηματισμό

$$T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



β) Αν το μοναδιαίο διάνυσμα έχει μήκος 1 cm και το σχέδιό μας έχει γίνει υπό κλίμακα 1 : 1000, να βρεθεί το εμβαδόν της πραγματικής εικόνας Α΄Β΄Γ΄.

31. ** Το παρακάτω σχήμα δίνει ένα εικονικό σχέδιο μιας βιομηχανικής εγκατάστασης. Όλα τα δηλούμενα με γράμματα σημεία σε αυτό έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Το πραγματικό σχέδιο προκύπτει με ένα γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία Λ και Μ στα Λ΄ (1, 2) και Μ΄ (2, 2) αντίστοιχα. Να γίνει πρόχειρη σχεδίαση αναπαράγοντας με όμοιο τρόπο τις αντίστοιχες σκιαγραφήσεις.



32. ** Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in R$ για τα οποία τα συστήματα:

$$\Sigma_1 = \begin{cases} (\lambda + 2)\,x - y = \mu + 3 \\ \mu x + 2y = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \Sigma_2 = \begin{cases} 3x + y = \lambda - \mu \\ (2\lambda - 1)\,x + (\mu + 1)\,y = 2 \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

33. ** Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το σύστημα $\begin{cases} (1 - \lambda)\,x - 2\lambda y = 2 \\ 2\lambda x + (\lambda - 1)\,y = \lambda - 4 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει $x_0 + y_0 \leq 1$.

34. ** Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ \lambda x + (\lambda - 1)\,y = 0 \end{cases}, \lambda \in R$

β) $\begin{cases} \lambda x + y + \omega = 0 \\ x + \lambda y + \omega = 0 \\ x + y + \lambda\omega = 0 \end{cases}, \lambda \in R$

γ) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \end{cases}, \lambda \in R$

35. ** Αν $\kappa - \lambda = \alpha\mu$, $\lambda - \mu = \beta\kappa$, $\mu - \kappa = \gamma\lambda$, όπου κ, λ, μ δεν είναι όλα μηδέν, να δείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma = 0$.

36. ** Αν $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, να βρεθούν οι $\lambda \in R$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχουν και μη μηδενικοί πίνακες B για τους οποίους ισχύει $AB = \lambda B$.

37. ** Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta^2 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Αν υπάρχει μοναδικό $\lambda \in R^*$ ώστε η εξίσωση $AX = \lambda X$ να έχει άπειρες λύσεις, να βρεθούν τα α, β, λ.

38. ** Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με $|A - I| = 4$ και $|A - 2I| = 8$, να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \delta = -1$ και $\alpha\delta - \beta\gamma = 2$

β) Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 3x \\ \gamma x + \delta y = 3y \end{cases}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

39. ** Να αποδειχθεί ότι αν τα συστήματα:

$\Sigma_1 = \begin{cases} (\kappa + 1)\, x + \lambda y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ και $\Sigma_2 = \begin{cases} (\lambda - 1)\, x + \kappa y = 3 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

είναι συγχρόνως αδύνατα, τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8\kappa + 3 & 0 \\ 4\kappa + 2\lambda - 1 & 0 & 4\lambda - 5 \\ 0 & 4\lambda^2 - 5\lambda & 1 \end{bmatrix}$$ είναι διαγώνιος.

40. ** Έστω D η ορίζουσα ενός 3x3 γραμμικού συστήματος με αγνώστους x, y, ω και $D^5 + 3D + 1 = 0$. Πόσες λύσεις έχει το σύστημα στις περιπτώσεις:

α) είναι μη ομογενές β) είναι ομογενές;

41. ** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$.

Αν το σύστημα $\begin{cases} |A|x - y - |A|z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + |A|y + z = 0 \end{cases}$

έχει και μη μηδενικές λύσεις, να δείξετε ότι:

α) $A^4 - I = 0$

β) ο πίνακας $B = A^{20} + (A^{-1})^{20} + 20I$ είναι διαγώνιος.

42. ** Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου κ, αν το σύστημα $\begin{cases} 2x - \kappa y = 3 \\ -\kappa x + 8y = -6 \end{cases}$

έχει μοναδική λύση την (ξ, η), η οποία επαληθεύει τη σχέση ξ + η > 1.

43. ** Ένα γραμμικό 2x2 σύστημα έχει λύση τη μηδενική. Να εξετάσετε αν αυτό είναι ομογενές.

44. ** Αν το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in R$, μηδενίζεται για τρεις διαφορετικές τιμές του x, τότε να δείξετε ότι είναι το μηδενικό.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\text{συν}x + \beta\text{ημ}x + \gamma x$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Αν τα σημεία (0, 0), $(\frac{\pi}{2}, 0)$ και (π, 0) ανήκουν στη γραφική παράσταση της f, να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$.

46. ** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in R$ για την οποία το σύστημα:

$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= \lambda \\ 2x + y &= 5 \\ x - 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$ είναι συμβιβαστό, καθώς και τη λύση του συστήματος.

47. ** Να λυθεί το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x + \lambda(y+z) = 0 \\ -2y + z = \lambda x \\ \lambda x + y = -z \end{aligned}\right\}$, $\lambda \in R$.

48. ** Να βρεθεί για ποια τιμή της παραμέτρου $\kappa \in R$ η λύση του συστήματος:

$\left.\begin{aligned} 2x + 5y = \kappa \\ (\kappa - 1)\,x + (2\kappa + 3)\,y = \kappa - 4 \end{aligned}\right\}$ επαληθεύει την εξίσωση $x = -2y$.

49. ** Οι α, β, γ ικανοποιούν τις σχέσεις $\alpha = \kappa\beta + \gamma + 1$, $\beta = \kappa\gamma + \alpha + 1$, $\gamma = \kappa\alpha + \beta + 1$ και $\alpha + \beta + \gamma < -1$. Να βρεθούν οι τιμές του θετικού ακεραίου κ.

50. ** Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 3 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το σύστημα ΑΧ = Ο έχει άπειρες λύσεις.

β) Να λυθεί το σύστημα ΑΧ = Β για τις διάφορες τιμές του λ.

51. ** Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{bmatrix}$.

Να λύσετε το σύστημα ΑΧ = Β για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου λ.

52. ****** Δίνεται το σύστημα $\left.\begin{aligned} x + e^{\alpha} y + z = 0 \\ x - e^{2} y + 2z + e^{\alpha} = 0 \\ 2x + e^{\alpha+2} y + 2z = 0 \end{aligned}\right\}$.

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in R$ έχει μοναδική λύση μια τριάδα αριθμών, οι ο-ποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο)

ΩΡΙΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Μονάδες 40

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} x^3 & x-1 \\ x^2-1 & 1 \end{bmatrix}$ γίνεται μοναδιαίος

Α. για μια τιμή του $x \in R$ **Β.** για δύο τιμές του $x \in R$

Γ. για τρεις τιμές του $x \in R$ **Δ.** για άπειρες τιμές του $x \in R$

Ε. για καμία τιμή του $x \in R$

2. Για οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες Α, Β, **δεν** ισχύει πάντα η παρακάτω ισότητα

Α. $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$ **Β.** $(A^p)^q = A^{pq}$

Γ. $A^1 = A$ **Δ.** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ε. $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$

(όπου p, q θετικοί ακέραιοι αριθμοί)

3. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και το γινόμενο ΑΒ είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε ο πίνακας Β είναι διάστασης

Α. 2 x 2 **Β.** 2 x 3 **Γ.** 3 x 2 **Δ.** 3 x 3

Ε. κανένα από τα παραπάνω

4. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται

Α. όταν $\mu = 0$ και α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

Β. όταν $\mu = 0$ και $\alpha = 0$

Γ. όταν μ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και $\alpha \neq 0$

Δ. όταν μ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και $\alpha = 0$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

5. Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο

Α. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **Β.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **Γ.** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Δ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **Ε.** δεν υπάρχει

6. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό

Α. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y

Γ. συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y = x$

Δ. στροφή κατά 90°

Ε. στροφή κατά 180°

7. Στο γραμμικό μετασχηματισμό που έχει πίνακα τον Μ και υπάρχει ο M^{-1} το σημείο Β΄ (1, - 1) έχει πρότυπο το Β (x, y) που οι συντεταγμένες του δίνονται από το γινόμενο των πινάκων

Α. $M\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ **Β.** $M\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ **Γ.** $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

Δ. $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ **Ε.** $M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

8. Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix}2x+\kappa y=0\\6x+9y=3\end{matrix}\right\}$, κ ∈ R, είναι αδύνατο, το κ ισούται με

Α. 3 **Β.** - 3 **Γ.** 0

Δ. οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό **Ε.** 2

9. Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+3y=-9\\2x-y=3\end{matrix}\right\}$, α ∈ R, επαληθεύεται για δύο ζεύγη τιμών των x, y, τότε το α ισούται με

Α. - 2 **Β.** 3 **Γ.** - 9 **Δ.** - 6 **Ε.** 0

10. Αν στο σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha_1 x+\beta_1 y=0\\\alpha_2 x+\beta_2 y=7\end{matrix}\right\}$ με πραγματικούς συντελεστές είναι $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$, τότε

Α. το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική (0, 0)

Β. το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Γ. το σύστημα είναι αδύνατο

Δ. το σύστημα έχει μία μόνο λύση διάφορη της μηδενικής

Ε. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ένα **μόνο** από τα παραπάνω για τη λύση του συστήματος

ΘΕΜΑ 2ο

Μονάδες 30

1. Δίνεται ο πίνακας Α = $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$.

α) Να υπολογιστούν οι A^2, A^3.

β) Να βρεθεί ο A^{2000}.

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $A^{48} + A^{69} + A^{94} + A^{151}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Μονάδες 30

1. Αν Α = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ και Β = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, να βρεθούν οι $\lambda \in R$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχουν και μη μηδενικοί πίνακες Β για τους οποίους ισχύει ΑΒ = λΒ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο: ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**
2.	**Λ**
3.	**Λ**
4.	**Σ**
5.	**Λ**
6.	**Λ**
7.	**Λ**
8.	**Σ**
9.	**Λ**
10.	**Λ**
11.	**Λ**
12.	**Σ**
13.	**Σ**
14.	**Σ**
15.	**Λ**

16.	**Σ**
17.	**Σ**
18.	**Σ**
19.	**Σ**
20.	**Λ**
21.	**Λ**
22.	**Σ**
23.	**Σ**
24.	**Λ**
25.	**Σ**
26.	**Σ**
27.	**Λ**
28.	**Λ**
29.	**Λ**
30.	**Λ**

31.	**Λ**
32.	**Λ**
33.	**Σ**
34.	**Λ**
35.	**Σ**
36. i)	**Λ**
36. ii)	**Σ**
36. iii)	**Λ**
36. iv)	**Σ**
37.	**Λ**
38.	**Σ**
39.	**Σ**
40.	**Λ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Γ**
2.	**Ε**
3.	**Δ**
4.	**Α**
5.	**Δ**
6.	**Β**
7.	**Ε**
8.	**Γ**

9.	**Δ**
10.	**Ε**
11.	**Β**
12.	**Γ**
13.	**Β**
14.	**Δ**
15.	**Ε**
16.	**Δ**

17.	**Α**
18.	**Δ**
19. i)	**Β**
19. ii)	**Β**
19. iii)	**Δ**
20.	**Ε**
21.	**Β**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

Α	3
Β	2
Γ	5
Δ	6

2.

Α	5
Β	3
Γ	6
Δ	2

3.

Α	6
Β	2
Γ	3
Δ	5

4.

Α	6
Β	1
Γ	2

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

2.

α	Γ
β	Β
γ	Γ
δ	Α
ε	Α

3.

α	Γ
β	Β
γ	Α
δ	Γ
ε	Α

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x = 1,\ y = 2 \\ \text{ή} \\ x = \frac{1}{e},\ y = 2 \end{pmatrix}$

4. **α)** $ΑΓ = Ο$, $ΒΓ = Ο$
β) Δεν ισχύει (ο Γ δεν είναι αντιστρέψιμος)

6. **α)** $A^2 = -I$, $A^3 = -A$ **β)** $A^{2000} = I$ **γ)** Ο

7. $x = 10$, $y = 2$

8. Βρίσκουμε $x = -1$ ή $x = -2$ και $z = -1$ ή $z = -2$ κ.λπ.

9. $x = -4$

10. $x = 1$, $y = 0$

11. $x = \frac{1}{2}$

14. ε) ο Β γράφεται $\begin{bmatrix} συν\frac{π}{3} & -ημ\frac{π}{3} \\ ημ\frac{π}{3} & συν\frac{π}{3} \end{bmatrix}$ και χρησιμοποιούμε το (δ).

στ) Ο $B^ν$ γράφεται $\begin{bmatrix} συν\frac{νπ}{3} & -ημ\frac{νπ}{3} \\ ημ\frac{νπ}{3} & συν\frac{νπ}{3} \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε $ν = 6$.

16. α) iv) Το α΄ μέλος γράφεται:

$A(3x) - 3A(2x) + 3A(x) + I_3 - I_3 = A^3(x) - 3A^2(x) + 3A(x) - I_3 + I_3 =$

$(A(x) - I_3)^3 + I_3 = O + I_3 = I_3$

17. Είναι $wy = 1$. Από την $A^2 = I$ βρίσκουμε: $A = \begin{bmatrix} 0 & y \\ \frac{1}{y} & 0 \end{bmatrix}$, $y \in R^*$

$A^{2ν+1} = (A^2)^ν \cdot A = A = \frac{1}{y}\begin{bmatrix} 0 & y^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

18. **α)** $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = I$

β) $A^{1993} = (A^3)^{664} \cdot A = I \cdot A = A$ κ.λπ.

γ) $A^\nu = \begin{cases} I, & \text{αν } \nu = 3\kappa \\ A, & \text{αν } \nu = 3\kappa + 1 \\ A^2, & \text{αν } \nu = 3\kappa + 2 \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{N}$

δ) $(A^2)^{-1} = A$, ισχύει $A^{1997} = A^2$ κ.λπ.

19. $x = 0$ ή $x = 2$

20. **β)** Χρησιμοποιούμε το α.

21. Θα ισχύει: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, βρίσκουμε $T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$.

22. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

23. **Α.** στροφή κατά 30° **Β.** στροφή κατά 45°

Γ. στροφή κατά 50° **Δ.** στροφή κατά 60°

Ε. στροφή κατά $\frac{\pi}{2} - \theta$ **Ζ.** στροφή κατά $\frac{\pi}{2} + \theta$

24. α) Έστω ε : y = αx + β, είναι $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha x + \beta \end{bmatrix}$ κ.λπ.

β) $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \alpha^2 (x_2 - x_1)^2} =$

$|x_2 - x_1| \sqrt{1+\alpha^2}$

$(A' B') = |x_2' - x_1'| \sqrt{1+\alpha^2} = |\lambda (x_2 - x_1)| \sqrt{1+\alpha^2} = |\lambda| (AB) = \lambda (AB)$

25. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

26. Έστω $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Άτοπο

27. β) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow y' = - x'$

γ) Έστω M (x, y), x < 0, y > 0 κ.λπ.

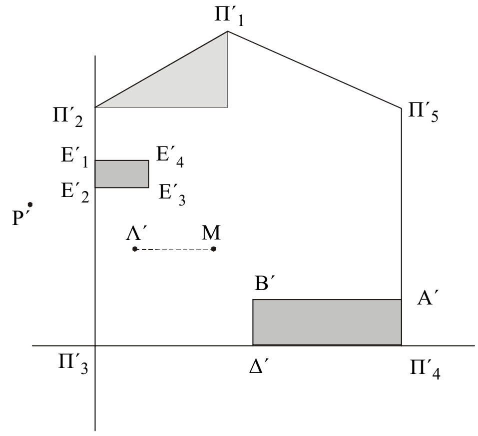
28. α) $y = - 2x^2$ **β)** $y = 2x^2$ **γ)** $y = x^2$

29. α) A΄ (7, 19) **β)** το A΄΄ ταυτίζεται με το A (2, 3)

Γιατί αν $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ τότε $M^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^{-1}M \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

30. α) A΄ ($\sqrt{3}$, - 1) B΄ (2$\sqrt{3}$, - 2) Γ΄ ($\sqrt{3}$ + 1, $\sqrt{3}$ - 1)

31. Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.



32. $\mu = -2$, $\lambda = -1$

35. Το σύστημα με αγνώστους τα κ, λ, μ είναι ομογενές και έχει και μη μηδενικές λύσεις άρα είναι $D = 0$ κ.λπ.

36. Το σύστημα $AB = \lambda B$ γράφεται $(A - \lambda I)\,B = O$ και επειδή έχει και μη μηδενικές λύσεις θα είναι $|A - \lambda I| = 0$. Βρίσκουμε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -6$.

37. $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\lambda = 2$

39. $\lambda = \frac{5}{4}$, $\kappa = -\frac{3}{8}$ κ.λπ.

40. **α)** Αν $D = 0$ προκύπτει άτοπον. Άρα $D \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β) Μόνο τη μηδενική.

41. Από το σύστημα βρίσκουμε $|A|^2 = 1$. Βρίσκουμε τον A^2 και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη προκύπτει $A^2 = I$ ή $A^2 = -I$. Άρα $A^4 = I$ κ.λπ.

42. $-4 < \kappa < -1$

43. Ναι

46. $\lambda = 10$, $(x, y) = (2, 1)$

47. Αν $\lambda \neq \pm 1$, τότε $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
Αν $\lambda = 1$, τότε $(x, y, z) = (-3z, 2z, z)$, $z \in R$
Αν $\lambda = -1$, τότε $(x, y, z) = (3z, 2z, z)$, $z \in R$

48. $\kappa = -1$

49. $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$

50. **α)** $\lambda = 1$
β) Για $\lambda = 1$, $(x, y, z) = (x, -1, 2 - x)$, $x \in R$. Για $\lambda \neq 1$ μοναδική λύση.

51. Για $\lambda = 1$, $(x, y) = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$. Για $\lambda = 2$, $(x, y) = (0, 4)$

52. $x = e^{\alpha}$, $y = 0$, $z = -e^{\alpha}$

Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$. **Σ** **Λ**

2. * Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $z = \kappa + \lambda i$ $\kappa, \lambda \in R$, τότε $Re(z) = \kappa$. **Σ** **Λ**

4. * Αν $z = x + (y - 1)i$ και $Im(z) = 0$, τότε $y = 1$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$. **Σ** **Λ**

6. * Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y. **Σ** **Λ**

7. * Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2003} = i$. **Σ** **Λ**

8. * Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

9. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζεται $z^{\circ} = 1$. **Σ** **Λ**

0. * Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x΄x είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \bar{z}_2$. **Σ** **Λ**

1. * Αν $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 \in C$, και $z_1 + z_2 = 2\alpha$, τότε $z_2 = \bar{z}_1$. **Σ** **Λ**

2. * Αν $Re(z) = 2$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 2$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $Im(z + i) = 8$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία $y = 8$. **Σ** **Λ**

4. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$. **Σ** **Λ**

5. * Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$. **Σ** **Λ**

6. * Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C. **Σ** **Λ**

7. * Αν $Re(z_1 z_2) = 0$ τότε ισχύει πάντα $Re(z_1) \cdot Re(z_2) = 0$. **Σ** **Λ**

8. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |\bar{z}|$. **Σ** **Λ**

9. * Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. **Σ** **Λ**

0. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία Α (z_1) και Β (z_2). **Σ** **Λ**

1. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο Κ (z_0) και ακτίνα ρ. **Σ** **Λ**

3. * Για το μιγαδικό αριθμό $z = 2\,(\sigma\upsilon\nu\,(3\pi) + i\eta\mu\,(3\pi))$ ισχύει $Arg\,(z) = 3\pi$. **Σ** **Λ**

4. * Αν $z = 3\,(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\,\frac{\pi}{4})$ τότε ένα όρισμα του z είναι το $\frac{29\pi}{4}$. **Σ** **Λ**

5. * Αν ένας μιγαδικός αριθμός πολλαπλασιαστεί επί i τότε η διανυσματική του ακτίνα στρέφεται κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$. **Σ** **Λ**

6. * Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$ είναι $z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, όπου $\rho = |z|$ και θ ένα όρισμά του. **Σ** **Λ**

7. * Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \rho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$, $\rho_1 > 0$ και $z_2 = \rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, $\rho_2 > 0$ ισχύει $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\,(\theta_1\theta_2) + \eta\mu\,(\theta_1\theta_2))$. **Σ** **Λ**

8. * Αν τα ορίσματα δύο μιγαδικών διαφέρουν κατά κπ, $\kappa \in Z$, τότε οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **Σ** **Λ**

9. * Το θεώρημα De Moivre ισχύει και για εκθέτη αρνητικό ακέραιο αριθμό. **Σ** **Λ**

0. * Ισχύει $(\text{συν } 12° + i\text{ημ}12°)^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **Σ** **Λ**

1. * Η εξίσωση $z^5 = 32$ έχει πέντε ρίζες, των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 2. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $z^3 + i = 0$ έχει μοναδική ρίζα τον $z_0 = i$. **Σ** **Λ**

3. * Οι εξισώσεις $x^ν = 1$ και $x^μ = 1$, $ν, μ \in N^*$ έχουν τουλάχιστον μια κοινή ρίζα. **Σ** **Λ**

4. * Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^ν = α$, $α \neq 0$ και $ν \in N^*$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου. **Σ** **Λ**

5. * Αν η εξίσωση $αx^3 + βx^2 + γx + δ = 0$, $α \neq 0$, έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε αυτή έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα. **Σ** **Λ**

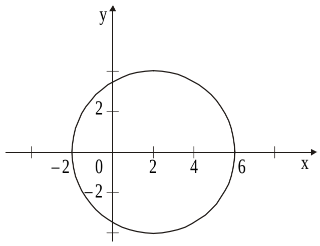
6. * Υπάρχει εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές 3ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς 2, 1 + i, 2 + i. **Σ** **Λ**

7. * Δύο ορίσματα ενός μιγαδικού αριθμού διαφέρουν κατά γωνία 2κπ με $κ \in Z$. **Σ** **Λ**

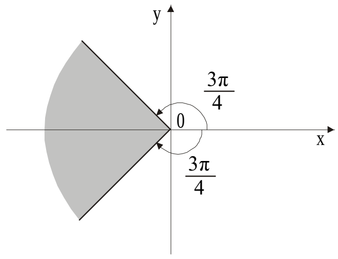
8. * Στο μιγαδικό επίπεδο η εικόνα του μιγαδικού αριθμού 2 + 3i είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $|z| = 4$. **Σ** **Λ**

9. * Όλα τα σημεία της ευθείας y = x στο μιγαδικό επίπεδο είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = α + αi$ με $α \in R$. **Σ** **Λ**

0. * Στο μιγαδικό επίπεδο του διπλανού σχήματος η εξίσωση του κύκλου είναι $|z - 2| = 4$. **Σ** **Λ**



1. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $\left|\text{Arg}(z) - \pi\right| < \dfrac{\pi}{4}$ έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο που απεικονίζονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του διπλανού σχήματος.



Σ **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ισότητα x + (y - 1) i = 3 + 4i ισχύει αν και μόνο αν

Α. x = 3 ή y = 5 **Β.** x = 3 και y = 4

Γ. x = 3 ή y = 4 **Δ.** x = 3 και y = 5 **Ε.** x + y = 7

2. * Αν $i^2 = -1$ και $\left[(i^2)^3\right]^{\kappa} = 1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι

Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 6 **Δ.** 2 **Ε.** 5

3. * Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 0

Δ. x = 0 **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.

4. * Οι εικόνες των μιγαδικών 2 + 3i και 3 + 2i στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία

Α. x = 2 **Β.** y = 3 **Γ.** y = x **Δ.** y = - x **Ε.** x = 0

5. ***** Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο

Α. $2 + i$ **Β.** $-2 + 2i$ **Γ.** $2 + 2i$ **Δ.** $-2 - 2i$ **Ε.** $-2 - i$

6. ***** Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας $2x + 3y - 1 = 0$, τότε ο z **δεν** μπορεί να είναι ο

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $1 - \frac{1}{3}i$ **Γ.** $5 - 3i$ **Δ.** $\frac{1}{3}i$ **Ε.** $1 + 2i$

7. ***** Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με

Α. $1 - i$ **Β.** $1 + i$ **Γ.** $-1 - i$ **Δ.** $-1 + i$ **Ε.** $2 + 2i$

8. ***** Αν $\nu \in N$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι σωστή η

Α. $i^{4\nu} = 1$ **Β.** $i^{4\nu+1} = -i$ **Γ.** $i^{4\nu+2} = -1$ **Δ.** $i^{\nu+4} = i^{\nu}$ **Ε.** $i^{4\nu+3} = -i$

9. ***** Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha\beta \neq 0$ και $\bar{z}$ ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;

Α. $z + \bar{z}$ πραγματικός αριθμός **Β.** $z - \bar{z}$ φανταστικός αριθμός

Γ. $z \cdot \bar{z}$ φανταστικός αριθμός **Δ.** $-\overline{\bar{z} \cdot z}$ πραγματικός αριθμός

Ε. $\overline{z + \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός

10. ***** Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά

Α. ως προς τον άξονα y΄y **Β.** ως προς τον άξονα x΄x

Γ. ως προς την ευθεία y = x **Δ.** ως προς την ευθεία y = - x

Ε. ως προς την αρχή των αξόνων

11. ***** Η εξίσωση $z^2 - 6z + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζα τον αριθμό

Α. i **Β.** 1 - i **Γ.** 1 + i **Δ.** 2 - i **Ε.** 3 + i

12. ***** Η εξίσωση $x^2 + \alpha x + 5 = 0$, $\alpha \in R$ μπορεί να έχει ρίζα τον

Α. - 3 + i **Β.** 2 - i **Γ.** 1 - i **Δ.** 3 - i **Ε.** - 3 - i

13. ***** Αν η εξίσωση $z^2 - \kappa z + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in Z$ έχει ρίζα τον 2 + i τότε ισχύει

Α. $\kappa = 6$ και $\lambda = 5$ **Β.** $\kappa = 4$ και $\lambda = 1$ **Γ.** $\kappa = 3$ και $\lambda = 4$

Δ. $\kappa = 4$ και $\lambda = 5$ **Ε.** $\kappa = 5$ και $\lambda = 4$

14. ***** Αν z = x + yi ποια από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι πάντα σωστή;

Α. $|z| = |\overline{z}|$ **Β.** $|z| = |-z|$ **Γ.** $|z|^2 = z^2$

Δ. $|z| = \sqrt{x^2 + (-y^2)}$ **Ε.** $|z^2| = |\overline{z}|^2$

15. ***** Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3i$ τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 14

16. ***** Αν $|\overline{z}_1| = 2$ και $|-z_2| = 5$ τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 10

17. ***** Αν z = 3 + yi και $|z|$ = 5, τότε μια τιμή του y είναι η

Α. 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** - 4 **Δ.** $\sqrt{3}$ **Ε.** 3

18. ***** Αν οι εικόνες δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι στο ίδιο τεταρτημόριο, ποια από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει;

Α. $z_1 = - z_2$ **Β.** $z_1 = \bar{z}_2$ **Γ.** $z_1 = - \bar{z}_2$

Δ. Im (z_1) + Im (z_2) = 0 **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

19. ***** Αν το σημείο P (x, y) είναι εικόνα του μιγαδικού z = x + yi στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 3|$ = 5, το P βρίσκεται πάνω σε

Α. ευθεία **Β.** έλλειψη **Γ.** κύκλο

Δ. παραβολή **Ε.** υπερβολή

20. ***** Η εξίσωση $|z - (1 + 2i)|$ = 4 παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

Α. κέντρο (- 1, 2) και ακτίνα 4 **Β.** κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 2

Γ. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 4 **Δ.** κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2

Ε. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

21. ***** Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 10. Από τους παρακάτω αριθμούς έχει εικόνα πάνω στον κύκλο ο μιγαδικός αριθμός

Α. $z = \sqrt{2} + 3i$ **Β.** $z = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$ **Γ.** $z = 2 - i\sqrt{8}$

Δ. z = 8 + 6i **Ε.** $z = \sqrt{2} + i\sqrt{8}$

22. ***** Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι

Α. ο άξονας y΄y

Β. η ευθεία y = x

Γ. ο άξονας x΄x

Δ. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)

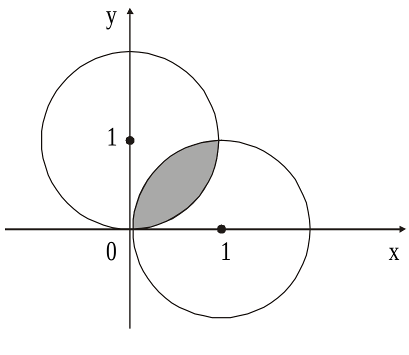
Ε. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

23. ***** Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2, 1) και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει

Α. $|z - (2 - i)| = 3$ **Β.** $|z - (1 + 2i)| = 3$

Γ. $|z - (2 + i)| = 9$ **Δ.** $|z - (2 + i)| = 3$ **Ε.** $|z + (2 + i)| = 3$

4. ***** Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ι-σχύει



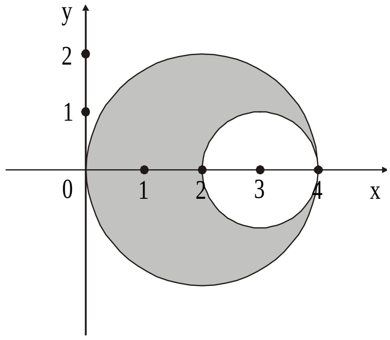
Α. $|z + 1| < 1$ και $|z + i| < 1$

Β. $|z - 1| < 1$ και $|z + i| < 1$

Γ. $|z - 1| > 1$ και $|z - i| > 1$

Δ. $|z - 1| < 1$ και $|z - i| < 1$ **Ε.** $|z + 1| < 1$ και $|z - i| < 1$

5. ***** Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



Α. $|z-2| < 2$ και $|z-3| < 1$

Β. $|z-2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Γ. $|z+2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Δ. $|z+2| < 2$ και $|z+3| > 1$ **Ε.** $|z-2| > 2$ και $|z-3| < 1$

26. ***** Αν η εξίσωση $|z-2| = |z-\kappa i|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y = x, ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 4

27. ***** Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z-z_1| = |z-z_2| = |z-z_3|$ με άγνωστο τον z είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 4 **Ε.** 0

28. ***** Για το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή η

Α. Το Arg (z) βρίσκεται στο διάστημα [0, 2π)

Β. Το Arg (z) είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z στο μιγαδικό επίπεδο με τον άξονα x΄x και παίρνει τιμές στο [0, 2π)

Γ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$ ο z έχει πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό

Δ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{2}$ ο z είναι πραγματικός αριθμός

Ε. Αν Arg (z) = $\frac{3\pi}{4}$ τότε Re (z) = - Im (z)

29. ***** Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha\beta \neq 0$ και Arg $(z) = \theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ τότε πάντοτε ισχύει

Α. $\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\varphi\theta$ **Β.** $\alpha\beta = \sigma\varphi\theta$ **Γ.** $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\theta$

Δ. $\alpha\beta = \varepsilon\varphi\theta$ **Ε.** $\alpha + \beta = \sigma\varphi\theta$

30. ***** Αν Arg $(z) = \frac{\pi}{4}$, η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση

Α. $y = x$ **Β.** $y = -x$ **Γ.** $y = 2x$ **Δ.** $y = -2x$ **Ε.** $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

31. ***** Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = -x$, τότε από τις παρακάτω γωνίες Arg (z) μπορεί να είναι η

Α. $\frac{\pi}{4}$ **Β.** $\frac{9\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{3\pi}{4}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{5\pi}{4}$

32. ***** Αν $z_1 = z_2$ όπου $z_1 = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $z_2 = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3})$, $\rho > 0$, τότε η γωνία θ **δεν** μπορεί να είναι

Α. 420° **Β.** 780° **Γ.** 1140° **Δ.** 1320° **Ε.** 1500°

33. ***** Το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 2\,(\sigma\upsilon\nu 30° + i\eta\mu 30°)$ και $z_2 = 7\,(\sigma\upsilon\nu 10° + i\eta\mu 10°)$ είναι

Α. $14\,(\sigma\upsilon\nu 300° + i\eta\mu 300°)$ **Β.** $9\,(\sigma\upsilon\nu 40° + i\eta\mu 40°)$

Γ. $14\,(\sigma\upsilon\nu 40° + i\eta\mu 40°)$ **Δ.** $9\,(\sigma\upsilon\nu 300° + i\eta\mu 300°)$

Ε. $2^7\,(\sigma\upsilon\nu 3° + i\eta\mu 3°)$

34. * Ο μιγαδικός αριθμός (συν12° + iημ12°)^5 ισούται με

Α. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Β.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Δ. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Ε.** με κανένα από τους προηγούμενους

35. * Αν $z = \frac{20\,(συν15° + iημ15°)}{5\,\,(συν3° + iημ3°)}$ τότε ο z ισούται

Α. 4 **Β.** 15 (συν5° + iημ5°)

Γ. 4 (συν12° + iημ12°) **Δ.** 4 (συν5° + iημ5°)

Ε. 15 (συν12° + iημ12°)

36. * Αν z = ρ (συν20° + iημ20°), ρ > 0, τότε το Arg ($\bar{z}$) ισούται με

Α. $(\frac{1}{20})°$ **Β.** 70° **Γ.** $(\frac{1}{70})°$ **Δ.** 160° **Ε.** 340°

37. * Αν Α, Β είναι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z και iz αντιστοίχως τότε η γωνία ΑΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων) ισούται με

Α. $\frac{3π}{2}$ **Β.** $\frac{2π}{3}$ **Γ.** π **Δ.** $\frac{5π}{6}$ **Ε.** $\frac{π}{2}$

38. * Αν z = συνθ + iημθ τότε ο $\frac{1}{z}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{συνθ} + i\,\frac{1}{ημθ}$ **Β.** $συν\,\frac{1}{θ} + iημ\,\frac{1}{θ}$ **Γ.** - συνθ - iημθ

Δ. συν (- θ) + iημ (- θ) **Ε.** - συνθ + iημθ

39. * Αν $z = συν\,\frac{π}{4} + iημ\,\frac{π}{4}$, ο z^{2000} ισούται με

Α. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 0 **Ε.** - i

40. ***** Αν P (x) πολυώνυμο τουλάχιστον 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και η εξίσωση P (x) = 0 έχει ρίζα τον αριθμό 2 - i, θα έχει οπωσδήποτε και τον

Α. $2 + i^{20}$ **Β.** $\frac{1}{2+i^{20}}$ **Γ.** $2 + i^{33}$ **Δ.** $\frac{1}{2 - i}$ **Ε.** $2 - i^4$

41. ***** Αν η εξίσωση $x^3 + \kappa x + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in R$, έχει ως λύση την $x = 2 + 5i$, τότε αποκλείεται να έχει λύση την

Α. $x = 5$ **Β.** $x = 2 - 5i$ **Γ.** $x = 0$ **Δ.** $x = 1 + i$ **Ε.** $x = - 3$

42. ***** Οι αριθμοί 2 + i, 3 - 5i, - 1 + 3i, 2 + 7i είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu \in N^*$, με πραγματικούς συντελεστές. Για το ν ισχύει

Α. $\nu = 4$ **Β.** $\nu = 6$ **Γ.** $4 < \nu < 8$

Δ. $\nu \geq 8$ **Ε.** $6 \leq \nu < 8$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Ο z είναι μιγαδικός αριθμός. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

z	Re (z)	Im (z)	- z	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$	$\lvert z \rvert$
- 2 + 3i						
- 2i						
- 5						
$\frac{1}{3i}$						

2. ***** Οι αριθμοί z_1, z_2 είναι μιγαδικοί. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

μιγαδικός αριθμός z	$z_1 = \sqrt{3} + i$	$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$	$z_1 \cdot z_2 = \dots$	$\frac{z_2}{z_1} = \dots$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \dots$
$\lvert z \rvert$					
Agr (z)					
τριγωνο-μετρική μορφή z					

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Αν $z = α + βi$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί στην ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\bar{\bar{z}}$	**1.** $2α$
Β. $z + \bar{z}$	**2.** $α^2 + β^2$
Γ. $z - \bar{z}$	**3.** $α + βi$
Δ. $z\bar{z}$	**4.** $α - βi$
	5. $2βi$
	6. $2α + i$

Α	Β	Γ	Δ

2. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχέση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. το πραγματικό μέρος του z είναι 2 **Β.** το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του **Γ.** το πραγματικό μέρος του z είναι αντίθετο του φανταστικού μέρους του	**1.** ο άξονας x΄x **2.** η ευθεία y = x **3.** η ευθεία y = - x **4.** η ευθεία x = 2 **5.** η ευθεία y = - 2

Α	**Β**	**Γ**

3. ***** Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ ($\frac{1}{2}$, 1), να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
μιγαδικός αριθμός	***σημείο στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $\frac{1}{\bar{z}}$	**1.** $(-\frac{1}{2}, 1)$
Β. $-\bar{z}$	**2.** $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
Γ. iz	**3.** $(\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$
	4. $(-1, \frac{1}{2})$
	5. $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

Α	**Β**	**Γ**

4. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε δύναμη του i που υπάρχει στη στήλη Α να αντιστοιχεί στην τιμή της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
δύναμη του i	
Α. i^{13} **Β.** i^{14} **Γ.** i^{15} **Δ.** i^{0}	**1.** $-i$ **2.** i **3.** -1 **4.** 0 **5.** 1 **6.** $2i$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

5. ***** Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε στοιχείο της στήλης Α να αντιστοιχεί στο ίσο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\left\|\frac{1}{z}\right\|$	**1.** 0
	2. 1
Β. $1 - \left\|z^{20}\right\|$	**3.** 2
	4. $\frac{1}{2}$
Γ. $\left\|\frac{(\bar{z})^{31}}{2\left\|-z^2\right\|}\right\|$	**5.** 4

Α	**Β**	**Γ**

6. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο της στήλης Α να αντιστοιχεί στη σχέση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο	***σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z***
Α. κύκλος κέντρου Κ (2, 1) και ακτίνας 3 **Β.** μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0), (0, - 1) **Γ.** κύκλος κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 3	**1.** $\lvert z+2+i \rvert = 3$ **2.** $\lvert z \rvert = 3$ **3.** $\lvert z-2-i \rvert = 3$ **4.** $\lvert z+2 \rvert = \lvert z-i \rvert$ **5.** $\lvert z-2 \rvert = \lvert z+i \rvert$

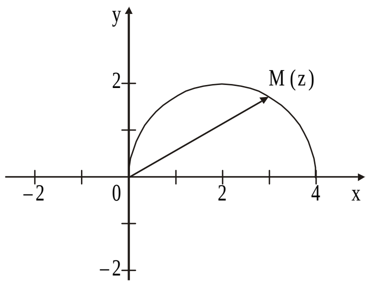
Α	**Β**	**Γ**

7. ***** Αν $z = x + yi$, $x, y \neq 0$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, διάφορος του μηδενός, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρικός τόπος του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $Re(z) = c$ **Β.** $Im(z) = c$ **Γ.** $Re(z) \cdot Im(z) = c$	**1.** $y = x + c$ **2.** $y = \frac{c}{x}$ **3.** $y = c$ **4.** $c \cdot x + y = 0$ **5.** $x = c$

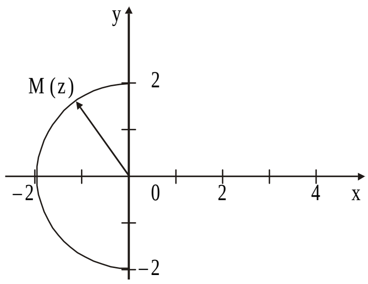
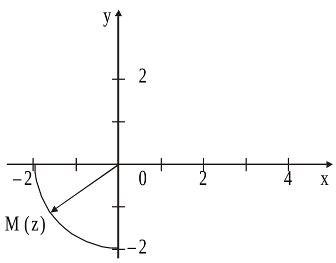
Α	**Β**	**Γ**

8. ***** Στα σχήματα της στήλης Α φαίνονται τόξα κύκλων στα οποία βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

<table>
<tr><th colspan="2">Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>Α.</td><td>
</td><td rowspan="3">1. $|z| = 2$, $\text{Im}(z) \le 0$ και $\text{Re}(z) \le 0$

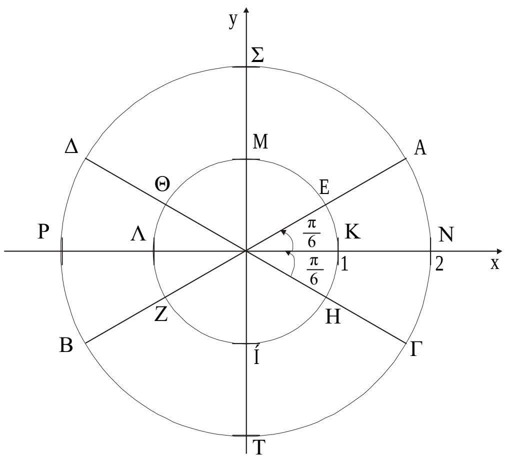
2. $|z - 2| = 2$ και $\text{Im}(z) \ge 0$

3. $|z| = 2$ και $\text{Re}(z) \le 0$

4. $|z + 2| = 2$ και $\text{Re}(z) < 0$</td></tr>
<tr><td>Β.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Γ.</td><td>
</td></tr>
</table>

Α	Β	Γ

9. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $z_1 = 2\left(συν\dfrac{\pi}{6} + iημ\dfrac{\pi}{6}\right)$ **2.** $z_2 = συν\dfrac{5\pi}{6} + iημ\dfrac{5\pi}{6}$ **3.** $z_3 = συν\dfrac{19\pi}{6} + iημ\dfrac{19\pi}{6}$ **4.** $z_4 = 2\left(συν\dfrac{\pi}{6} - iημ\dfrac{\pi}{6}\right)$	

1	**2**	**3**	**4**

10. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε η εικόνα κάθε μιγαδικού αριθμού, το όρισμα του οποίου φαίνεται στη στήλη Α να βρίσκεται στην ευθεία που ανήκει και γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z	***γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ **Β.** $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$	**1.** ο άξονας $x'x$ **2.** ο άξονας $y'y$ **3.** η ευθεία $y = x$ **4.** η ευθεία $y = -x$ **5.** η ευθεία $y = c$ (c σταθερός)

Α	**Β**	**Γ**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = - 2i + 2 - yi$ β) $y + 2i = 3 - (2 + i)\, x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$ δ) $(x^2 + 1)\, i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2 i$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

β) Να βρείτε τον z.

3. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)\, x - 3yi - (3i - 2)\, x + (4 - 2yi)$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $α + βi$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $Re\,(z) = 0$ ii) $Im\,(z) = 0$

iii) $Re\,(z) = Im\,(z)$ iv) $z = 0$

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\, x + (y - 1)\, i - 5$, $x, y \in R$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή $α + βi$.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x, αν $Im\,(z) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Re\,(z) = Im\,(z)$.

5. ** Δίνονται οι μιγαδικοί

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, $z_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}i$,

$z_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{27}i$, $z_5 = \frac{1}{16} + \frac{1}{54}i$, $+ \ldots$

Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων $w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + \ldots$

6. ** Να γράψετε στη μορφή $α + βi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z_1 = \dfrac{5 - 2i}{1 - 2i}$ β) $z_2 = \dfrac{i - 1}{i} - \dfrac{2}{(1 - i)^2}$

7. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i(-5i)$ β) $(2+i)(-i+3)$ γ) $\frac{3}{4i}$

δ) $\frac{1}{1-i}$ ε) $\frac{1-i}{-i+1}$ ζ) $\frac{(2+3i)(-i+1)}{1-2i}$

8. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $(2-3i)(4-5i)+7i-1$ β) $\frac{1-2i}{i+3}\cdot\frac{2i+1}{3i+1}$ γ) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

δ) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}$ ε) $(1-i)^{-3}$

9. ** Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{12+8i}{2-3i} + \frac{52+13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

10. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει: $(\alpha+\beta i)^2 = \frac{12+5i}{i}$.

11. ** Να υπολογιστεί το $x \in R$ ώστε να ισχύει: $1 + 2\sqrt{2}\,i = 3\,\frac{1+xi}{1-xi}$.

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί:
$z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)i$ να είναι συζυγείς.

13. ** Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -i$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\omega = \frac{z^3 - i}{z + i}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

14. ****** α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$.

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $\bar{z} = z^2$.

15. ****** Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$f(\nu) = \dfrac{1-i^{\nu+1}}{1-i}$.

16. ****** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $(1 + i)^{20\nu} = (1 - i)^{20\nu}$.

17. ****** α) Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του και αντιστρόφως.

β) Να δείξετε ότι αν $\omega = \dfrac{z}{z+i}$ και $\omega \in R$ τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.

18. ****** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \dfrac{z+8i}{z+6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $\text{Im}(w) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $\text{Re}(w) = 0$.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

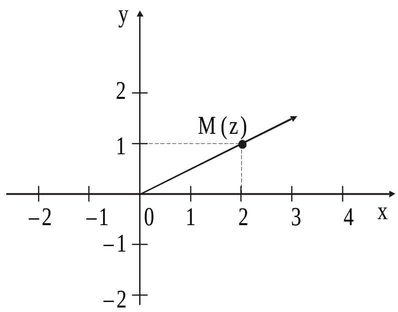
19. ****** Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

20. ****** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

21. ** Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \lambda + (\lambda - 1)\,i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = 4x + 1$, να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

2. ** Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα με το σημείο M_1 $(2z)$. Μετά να βρείτε τα σημεία M_2 $(2\bar{z})$, M_3 $(-2z)$ êáé M_4 $(-2\bar{z})$.
Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $M_1M_2M_3M_4$.



23. ** Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 που οι εικόνες τους βρίσκονται αντίστοιχα στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$.

24. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \dfrac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$

25. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \left(\dfrac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^{\nu}$, $\nu \in N$.

26. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.

27. ** Αν $z \in C$ και $|z+9| = 3\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.

28. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός ω.

α) Να δειχθεί ότι αν ω φανταστικός αριθμός, τότε $\omega = -\overline{\omega}$ και αντιστρόφως.

β) Με βάση το προηγούμενο ή με άλλο τρόπο δείξτε ότι αν ο αριθμός $\omega = \frac{z-1}{z+1}$, $z \neq -1$, είναι φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

29. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z αν ξέρουμε ότι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους του z είναι 3 και η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους του z είναι 4. Πού βρίσκονται οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

30. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

31. ** Να λυθεί στο C η εξίσωση: $z + |z+1| + i = 0$.

32. ** Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|1-z| > |z|$, δείξτε ότι $\text{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

33. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 2.

34. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο αν ο αριθμός $\frac{z+2i}{z+1}$ είναι πραγματικός.

35. ****** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:

$-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2$ (1)

$|\text{Im}(z)| \leq 2$ (2)

$|z| \geq 2$ (3)

Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.

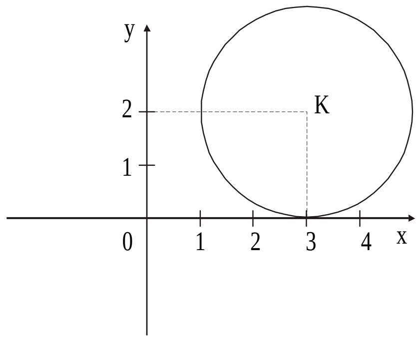
36. ****** Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z+1-i| = 3$

β) $|z-1-i| < 4$

γ) $1 < |z-1+i| < 2$

7. ****** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος εφάπτεται του άξονα των τετμημένων και είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε δύο που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

ii) $3x^2 + 2y^2 = 4$

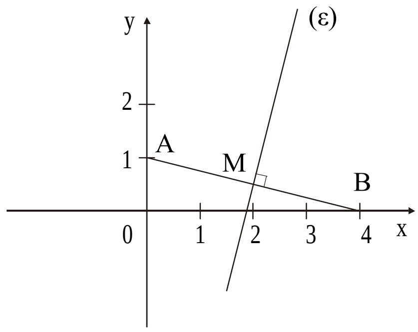
iii) $|z| - |3+2i| = 4$

iv) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

v) $|z-3-2i| = 2$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

8. ** Στο διπλανό σχήμα η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z = x + yi, x, y ∈ R στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε τρεις που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $x^2 - i = y^2 + 4$

ii) $|z - i| = |z - 4|$

iii) $|z - 1| - |z - 4| = 0$

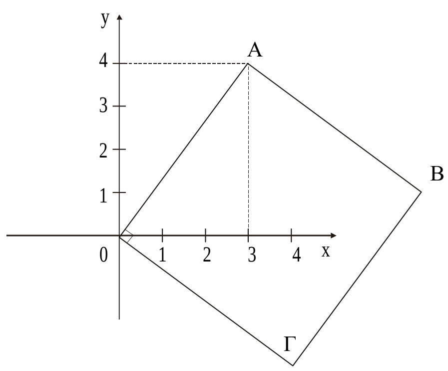
iv) $y = 4x - \dfrac{15}{2}$

v) Re (z) = 2Im (z)

vi) 8Re (z) = 15 + 2Im (z)

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

9. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο. Αν Α, Β και Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = x + yi$ και $z_3 = κ + λi$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο:



α) Να δειχθεί ότι 3κ + 4λ = 0.

β) Να βρεθούν οι z_2 και z_3.

40. ** Να γραφούν στην τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί:

α) $\dfrac{i - 1}{i} \cdot \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ β) $\dfrac{3}{2i}$ γ) $\dfrac{1}{συν\dfrac{4π}{3} - iημ\dfrac{4π}{3}}$

41. ** Να γραφούν στην τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z = -\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$ β) $z = -\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta$ γ) $z = \text{ημ}\theta + i\text{συν}\theta$

42. ** Αν $z_1 = \dfrac{1+5i}{3+2i}$ και $z_2 = -\sqrt{2}\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{\pi}{3}\right)$, να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί:

α) $z_1 z_2$ β) $\dfrac{z_1}{z_2}$

43. ** Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ισχύει: $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3\nu} = 1$.

44. ** Να δείξετε ότι: $(1 + i)^{\nu} + (1 - i)^{\nu} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\,\text{συν}\dfrac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

45. ** Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού:

$z = \dfrac{(\text{ημ}\theta - i\text{συν}\theta)^4}{(\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta)^3}$.

46. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + i$.

α) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

β) Αν ν θετικός ακέραιος να βρείτε τον $w = z^{\nu}$.

γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν ώστε ο w να είναι πραγματικός.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν ώστε ο w να είναι φανταστικός.

47. ** Στο μιγαδικό επίπεδο έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού z_1 και $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $z_2 = z_1 \cdot w$, όπου $w = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

α) Να γράψετε τον w στην τριγωνομετρική του μορφή.

β) Να δείξετε ότι $w^3 = -1$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο.

δ) Να δείξετε ότι $z_2^3 = -z_1^3$ και $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$.

48. ** Δίνεται ο μιγαδικός z = 1 - συνα + iημα, α ∈ [0, 2π).

α) Να δείξετε ότι $|z| = 2ημ\,\frac{α}{2}$ και $\text{Arg}\,(z) = \frac{π - α}{2}$.

β) Να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ο αριθμός ω = 1 + συνθ + iημθ.

γ) Να βρεθεί ο $ω = (1 + συν\,\frac{10π}{9} + iημ\,\frac{10π}{9})^{18}$.

49. ** Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $\text{Arg}\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{π}{4}$.

50. ** Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$\text{Arg}\,(z - 1) = \frac{π}{4}$ και $|z| = 13$.

51. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

α) Να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε το πρωτεύον όρισμά τους.

γ) Να τους γράψετε σε μια σειρά ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο όρισμα.

δ) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

52. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\qquad$ $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad$ $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i$

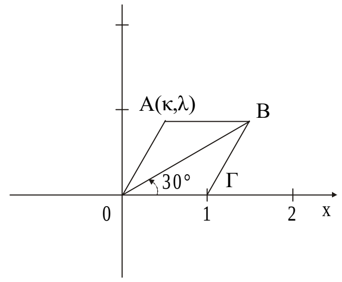
$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}\,i$ $\qquad$ $z_5 = 3 - 3\sqrt{3}\,i$

α) Να γράψετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή κ $(1 - \sqrt{3}\,i)$, $\kappa \in R$ και να τους τοποθετήσετε σε μια σειρά, ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο μέτρο.

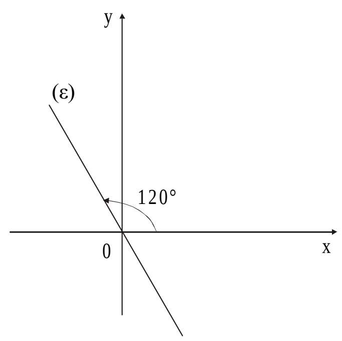
β) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3.

3. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν $z = \kappa + \lambda i$ να δειχθεί ότι: $\lambda\sqrt{3} = \kappa + 1$.



4. ** Η ευθεία (ε) είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Να επιλέξετε δύο από τις παρακάτω εξισώσεις που δίνουν σημεία της ευθείας (ε) που ανήκουν στο δεύτερο τεταρτημόριο

i) $\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ ii) $x^2 = y$

iii) $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ iv) $|z| = 1$ $\qquad$ v) $x + y\sqrt{3} = 0$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

55. ****** Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες των αριθμών:

α) $-8i$ β) $1+i$

56. ****** Να λυθεί στο σύνολο C η εξίσωση: $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$.

57. ****** Να λυθούν στο σύνολο C οι εξισώσεις:

α) $(z-2)^3 = 1$ β) $(z-1)^4 = 1$

58. ****** Αν w είναι μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας, να δείξετε ότι:

α) $1 + w + w^2 = 0$ β) $(1 + w)^3 = -1$

γ) $(1 + w^2)^2 = w^2$ δ) $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5) = 9$

59. ****** Αν w είναι μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας να δείξετε:

α) $w^2 = \overline{w}$ β) $(1 + w\overline{w} + w^2 + \overline{w}^2)(\overline{w} + w^2)^3 = 8$

γ) $(1 + w)^{2\nu+1} + (\overline{w})^{2\nu+4} = 0$

60. ****** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.

δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.

61. ****** Να βρεθεί για ποιες τιμές των α, β ∈ R το πολυώνυμο $f(x) = 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$ έχει παράγοντα το $x^2 + 1$.
Στη συνέχεια να βρεθούν όλες οι ρίζες του f (x).

62. ****** Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και το $x - i$ είναι παράγοντάς του, να αποδείξετε ότι το $x^2 + 1$ είναι παράγοντας του f (x). Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τα α, β, γ, δ γνωρίζοντας ακόμα ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = 10$.

63. ** Δίνεται η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

64. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z\,ημ\dfrac{β}{2}\,συν\dfrac{β}{2} + ημ^2\dfrac{β}{2} = 0$, όπου β πραγματική παράμετρος με $β \in [0, 2π]$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι

$ημ\dfrac{β}{2}\,συν\dfrac{β}{2} \pm iημ^2\dfrac{β}{2}$.

β) Να γράψετε τις ρίζες αυτές στην τριγωνομετρική τους μορφή.

65. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 + βz + γ = 0$, $z \in C$, με ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2. Να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί β και γ είναι πραγματικοί

β) η εξίσωση $z^2 + βz - γ = 0$ έχει ρίζες πραγματικές.

66. ** Αν $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8 = 0$:

α) να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$ και να γράψετε τις ρίζες της σε τριγωνομετρική μορφή.

β) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τις εικόνες των τριών ριζών του $P(z)$.

67. ** Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$, $z \in C$.

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα Α (1, 0) και Β (0, 3).

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).

δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

68. ** Αν z μιγαδικός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in N^*$ τότε:

α) Να δειχθεί ότι $f(4\lambda) + f(4\lambda + 1) + f(4\lambda + 2) + f(4\lambda + 3) = 0$, $\lambda \in N^*$.

β) Αν $|z| = \rho$ και Arg (z) = θ, να δειχθεί ότι:

$$f(4\lambda + 1) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right].$$

γ) Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{3}$ και $|z| = 2$, να σχεδιαστούν οι διανυσματικές ακτίνες των z και $f(4\lambda + 1)$ στο μιγαδικό επίπεδο και να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών 0, z και $f(4\lambda + 1)$.

69. ** Αν z μιγαδικός αριθμός με $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, τότε:

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z - 2| = 2$.

β) Να δειχθεί ότι αν για τον z ισχύει Im (z) = 1, τότε Re (z) = $2 + \sqrt{3}$ ή Re (z) = $2 - \sqrt{3}$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση 4ου βαθμού που θα έχει ρίζες τους αριθμούς ± 1 και τους μιγαδικούς του ερωτήματος (β).

70. ** Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντιστοίχως $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 1$ και Arg (w + 1) = $\frac{\pi}{4}$. Να δειχθεί ότι:

α) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος C με κέντρο K (0, 1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

β) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση y = x + 1.

γ) η ευθεία (ε) του ερωτήματος (β) τέμνει τον κύκλο C του ερωτήματος (α) σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά.

δ) αν t_1, t_2 είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι τομές των (ε) και C, τότε ισχύει: $|t_1 + t_2|^{3\nu} + |t_1 - t_2|^{2\nu} = 2^{3\nu+1}$.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο)

ΩΡΙΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Μονάδες 40

1. Η ισότητα $x + (y - 1)\,i = 3 + 4i$ ισχύει αν και μόνο αν

Α. $x = 3$ ή $y = 5$ **Β.** $x = 3$ και $y = 4$
Γ. $x = 3$ ή $y = 4$ **Δ.** $x = 3$ και $y = 5$ **Ε.** $x + y = 7$

2. Αν $i^2 = -1$ και $\left[(i^2)^3\right]^{\kappa} = 1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι

Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 6 **Ε.** 5

3. Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

Α. $y = x$ **Β.** $y = -x$ **Γ.** $y = 0$
Δ. $x = 0$ **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.

4. Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)\,i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με

Α. $1 - i$ **Β.** $-1 + i$ **Γ.** $-1 - i$ **Δ.** $1 + i$ **Ε.** $2 + 2i$

5. Η εξίσωση $x^2 + \alpha x + 5 = 0$, $\alpha \in R$ μπορεί να έχει ρίζα τον

Α. $-3 + i$ **Β.** $2 - i$ **Γ.** $1 - i$ **Δ.** $3 - i$ **Ε.** $-3 - i$

6. Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3i$ τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 14

7. Αν $z = 3 + yi$, $y \in R$, και $|z| = 5$, τότε μια τιμή του y είναι η

Α. 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** - 4 **Δ.** $\sqrt{3}$ **Ε.** 3

8. Η εξίσωση $|z - (1 + 2i)| = 4$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

Α. κέντρο (- 1, 2) και ακτίνα 4

Β. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 2

Γ. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 4

Δ. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2

Ε. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

9. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι

Α. ο άξονας y΄y

Β. η ευθεία y = x

Γ. ο άξονας x΄x

Δ. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)

Ε. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

10. Για το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή η

Α. Το Arg (z) βρίσκεται στο διάστημα [0, 2π)

Β. Το Arg (z) είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z στο μιγαδικό επίπεδο με τον άξονα x΄x και παίρνει τιμές στο [0, 2π)

Γ. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ ο z έχει πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό

Δ. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ ο z είναι πραγματικός αριθμός

Ε. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ τότε $\text{Re}(z) = -\text{Im}(z)$

ΘΕΜΑ 2ο

Μονάδες 60

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = x + yi, x, y ∈ R.

α) Να γράψετε στη μορφή α + βi τον μιγαδικό $w = \dfrac{z+8i}{z+6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Im (w) = 0.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re (w) = 0.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**
2.	**Λ**
3.	**Σ**
4.	**Σ**
5.	**Σ**
6.	**Σ**
7.	**Λ**
8.	**Λ**
9.	**Σ**
10.	**Σ**
11.	**Σ**
12.	**Σ**
13.	**Λ**
14.	**Σ**

15.	**Σ**
16.	**Σ**
17.	**Λ**
18.	**Σ**
19.	**Λ**
20.	**Σ**
21.	**Λ**
22.	**Σ**
23.	**Λ**
24.	**Λ**
25.	**Σ**
26.	**Σ**
27.	**Λ**
28.	**Σ**

29.	**Σ**
30.	**Σ**
31.	**Σ**
32.	**Λ**
33.	**Σ**
34.	**Σ**
35.	**Σ**
36.	**Λ**
37.	**Σ**
38.	**Σ**
39.	**Σ**
40.	**Σ**
41.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ	15.	Β	29.	Γ
2.	Δ	16.	Β	30.	Α
3.	Δ	17.	Γ	31.	Γ
4.	Γ	18.	Ε	32.	Δ
5.	Β	19.	Γ	33.	Γ
6.	Ε	20.	Ε	34.	Ε
7.	Δ	21.	Δ	35.	Γ
8.	Β	22.	Δ	36.	Ε
9.	Γ	23.	Δ	37.	Ε
10.	Β	24.	Δ	38.	Δ
11.	Ε	25.	Β	39.	Β
12.	Β	26.	Γ	40.	Γ
13.	Δ	27.	Γ	41.	Δ
14.	Γ	28.	Δ	42	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

Α	3
Β	1
Γ	5
Δ	2

2.

Α	4
Β	2
Γ	3

3.

Α	5
Β	1
Γ	4

4.

Α	2
Β	3
Γ	1
Δ	5

5.

Α	2
Β	1
Γ	4

6.

Α	3
Β	5
Γ	2

7.

Α	5
Β	3
Γ	2

8.

Α	2
Β	3
Γ	1

9.

1	Α
2	Θ
3	Ζ
4	Γ

10.

Α	2
Β	3
Γ	4

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

5. $w = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...) + i\,(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} + ...) = 2 + \frac{3}{2}\,i$

6. $z_1 = \frac{9}{5} + \frac{8}{5}\,i,\ \ z_2 = 1$

9. $\alpha = 1,\ \ \beta = 0$

10. $(\alpha = 3,\ \beta = -2)$ ή $(\alpha = -3,\ \beta = 2)$

11. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. $x = 1,\ \ y = 5$

13. Έστω $z = \lambda i$, βρίσκουμε $\omega = -(\lambda^2 - \lambda + 1) < 0$

14. **α)** $z = \sqrt{2} + i$ ή $z = -\sqrt{2} + i$

β) $z = 0$ ή $z = 1$ ή $z = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. Αν $\nu = 4\kappa$, $A = 1$

$\nu = 4\kappa + 1$, $A = 1 + i$

$\nu = 4\kappa + 2$, $A = i$

$\nu = 4\kappa + 3$, $A = 0$

16. Η δοθείσα γράφεται $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20\nu} = 1$ κ.λπ.

18. **β)** $4x + 3y + 24 = 0$

γ) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

δ) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

19. **α)** $2 + i$ **β)** $\alpha = -4$, $\beta = 5$

20. -1, $1 + 2i$, $1 - 2i$

21. $\lambda = -\frac{2}{3}$

22. Ε = 32 τ.μ.

23. $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 + 3i$

24. **α)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $\sqrt{26}$

25. **α)** $\frac{1}{2}$ **β)** 3^{ν}

26. $z = \frac{3}{4} + i$

29. $3 + 4i$, $-3 + 4i$, $3 - 4i$, $-3 - 4i$

κύκλος Κ (0, 0), R = 5

30. Έστω $z = x + yi$. Βρίσκουμε $x = \frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. $2x + y + 2 = 0$

36. **α)** $K(-1, 1)$, $R = 3$ **β)** $K(1, 1)$, $R < 4$ **γ)** $K(1, -1)$, $1 < R < 2$

37. iv, v

38. ii, iv, vi

39. $z_2 = 7 + i$, $z_3 = 4 - 3i$

43. Ο μιγαδικός γράφεται: $\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)^{3\nu}$ κ.λπ.

44. Γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς $1 + i$, $1 - i$ σε τριγωνομετρική μορφή κ.λπ.

45. Εκφράζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε τριγωνομετρική μορφή κ.λπ.

46. **α)** $z = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$ **β)** $z^\nu = 2^\nu\left(\text{συν}\frac{\nu\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{\nu\pi}{6}\right)$

γ) $\nu = 6$ **δ)** $\nu = 3$

47. **α)** $w = \text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}$

β) $w^3 = \text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi = -1$

γ) Το ΟΑΒ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $\frac{\pi}{3}$

δ) $z_2^3 = \left[\rho\left(\text{συν}\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right)\right]^3 = \rho^3\left(\text{συν}(\pi + 3\theta) + i\text{ημ}(\pi + 3\theta)\right) =$

$= \rho^3(-\text{συν}3\theta - i\text{ημ}3\theta) = -\rho^3(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^3 = -z_1^3$

48. Ο μιγαδικός αριθμός z γράφεται $z = 2ημ\frac{α}{2}\left(ημ\frac{α}{2} + iσυν\frac{α}{2}\right)$ κ.λπ.

49. $(x + 1)^2 + y^2 = 2,\ x < 0$

50. $z = \frac{1+\sqrt{337}}{2} + \frac{-1+\sqrt{337}}{2}i$

53. $z_B = z_A + z_Γ$ άρα $x + yi = κ + λi + 1$ και $\frac{y}{x} = εφ30°$ κ.λπ.

54. i, iii

58. Είναι $w^3 = 1$ κ.λπ.

59. **γ)** Είναι $1 + w = -w^2$ και $\overline{w} = w^2$ κ.λπ.

60. **α)** $P(z) = z^2(z - 3) + 4(z - 3) = (z^2 + 4)(z - 3) = (z^2 - 4i^2)(z - 3) =$
$= (z - 2i)(z + 2i)(z - 3)$
δ) ισοσκελές, $E = 6$ τ.μ.

61. $α = 9,\ β = 2$

62. Αφού το f (x) έχει παράγοντα το x - i θα έχει ρίζα το i. Βρίσκουμε $α = γ,\ β = δ$ κ.λπ.

63. Προφανής λύση η $z_1 = 1$ κ.λπ. Βρίσκουμε $z_2 = -2 + i\sqrt{3}$, $z3 = -2 - i\sqrt{3}$

64. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα κ.λπ.

65. α) Αφού οι ρίζες είναι συζυγείς θα έχουν άθροισμα και γινόμενο πραγματικό αριθμό.

β) $\Delta = \beta^2 + 4\gamma > 0$, διότι το γ είναι το γινόμενο των συζυγών μιγαδικών.

66. α) $z_1 = -2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ **β)** $x^2 + y^2 = 4$

67. δ) Η εικόνα του z είναι το σημείο τομής της (ε) και της κάθετης προς αυτήν που διέρχεται από το Ο (0, 0). Βρίσκουμε $z = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$.

68. β) $f(4\lambda + 1) = i^{4\lambda+1} z = iz = \left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \rho\,(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) =$

$$= \rho\left(\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$

γ) Ε = 2 τ.μ.

69. β) Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x = 0$ θέτουμε $y = 1$ και βρίσκουμε $x = 2 + \sqrt{3}$ ή $x = 2 - \sqrt{3}$.

70. α) $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ **β)** $y = x + 1$

γ) Σημεία τομής Α (1, 2), Β (-1, 0). (ΑΒ) = 2ρ **δ)** $t_1 = 1 + 2i$, $t_2 = -1$

ΜΕΡΟΣ Β΄: ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 1ο

Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Αν Α = Ν - {0, 1}, τότε η αντιστοιχία $f : A \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ αν το x είναι πρώτος αριθμός} \\ 1, \text{ αν το x είναι σύνθετος αριθμός} \end{cases}$$

είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

2. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. **Σ** **Λ**

3. * Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in R$, ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. **Σ** **Λ**

4. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

5. * Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x μπορούν να βρεθούν, αν θέσουμε όπου $y = 0$ και λύσουμε την εξίσωση. **Σ** **Λ**

6. * Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in R$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$. **Σ** **Λ**

7. * Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία. **Σ** **Λ**

8. ** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in R$, τότε οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. **Σ** **Λ**

9. * Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x \neq 0$, είναι σταθερή. **Σ** **Λ**

0. * Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο. **Σ** **Λ**

1. * Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R. **Σ** **Λ**

2. ** Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Αν ο λόγος $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι θετικός για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

3. ** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση - f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

4. ** Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. **Σ** **Λ**

5. ** Αν μια περιττή συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_0, τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$. **Σ** **Λ**

6. ** Αν μια άρτια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0, τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακροτάτου στο σημείο $-x_0$. **Σ** **Λ**

7. * Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε είναι 1 - 1. **Σ** **Λ**

8. * Αν μια συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε είναι πάντοτε περιττή. **Σ** **Λ**

9. * Η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in N^*$ είναι:

i) άρτια, αν ο ν είναι άρτιος **Σ** **Λ**

ii) περιττή, αν ο ν είναι περιττός. **Σ** **Λ**

0. ****** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε ισχύουν:

i) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f **Σ** **Λ**

ii) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$. **Σ** **Λ**

1. ***** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε κάθε κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των C_f και C_f^{-1} ανήκει στην ευθεία y = x. **Σ** **Λ**

2. ***** Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της. **Σ** **Λ**

3. ***** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το R τότε ισχύει ότι:

i) $fog = f \cdot g$ **Σ** **Λ**

ii) $fog = gof$ **Σ** **Λ**

4. ****** Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και μια συνάρτηση I, για την οποία ισχύει $I(x) = x$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε ισχύει $(Iof)(x) = (foI)(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. **Σ** **Λ**

5. ****** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο R, τότε η συνάρτηση gof είναι:

i) γνησίως αύξουσα, αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας **Σ** **Λ**

ii) γνησίως φθίνουσα, αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. **Σ** **Λ**

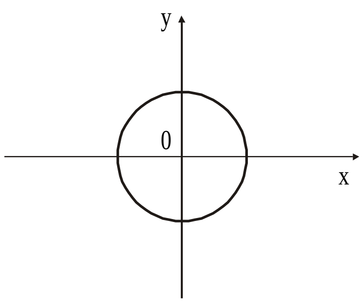
6. ****** Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ. **Σ** **Λ**

7. ***** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1 - 1 στο R, τότε και η συνάρτηση gof είναι 1 - 1 στο R. **Σ** **Λ**

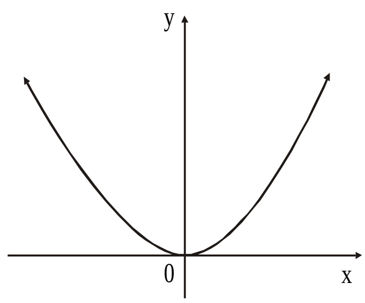
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Από τα παρακάτω διαγράμματα, γραφική παράσταση συνάρτησης είναι το διάγραμμα

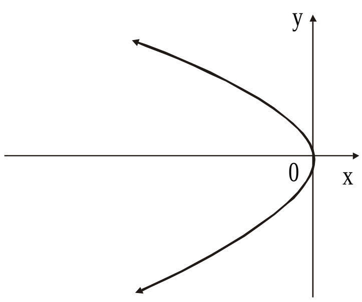
Α.



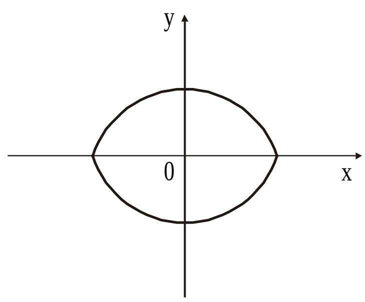
Β.



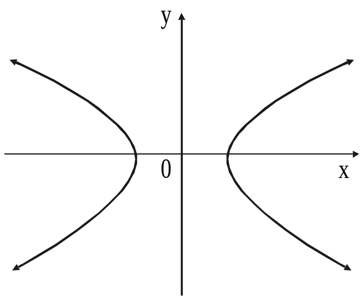
Γ.



Δ.

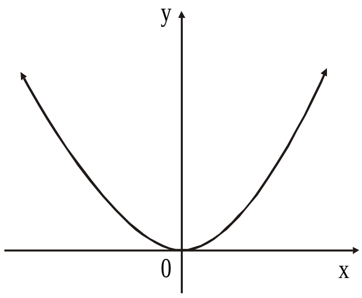


Ε.

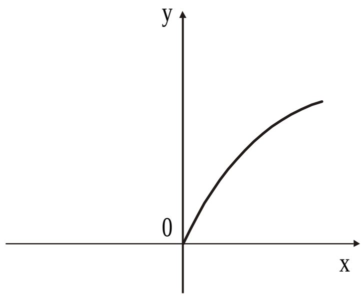


2. ***** Από τα παρακάτω διαγράμματα **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης το διάγραμμα

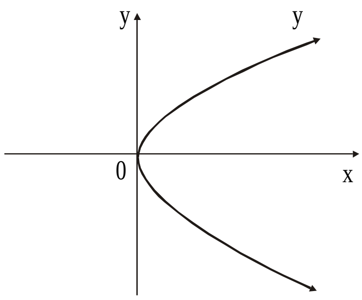
Α.



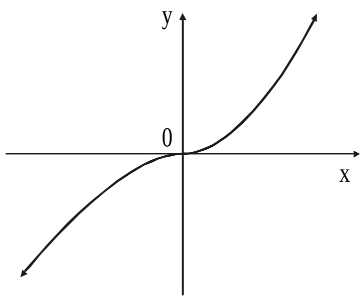
Β.



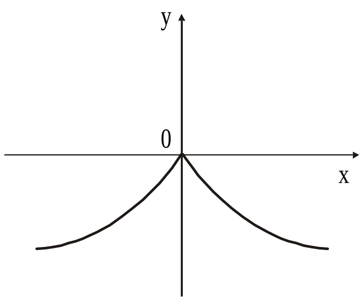
Γ.



Δ.



Ε.



3. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 4}$ είναι το σύνολο

Α. R - {- 2, 2} **Β.** R **Γ.** R - {- 2}

Δ. [2, + ∞) **Ε.** R - {2}

4. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(9 - x^2)$ είναι το σύνολο

Α. $R - \{-3, 3\}$ **Β.** $R - \{3\}$ **Γ.** $[3, +\infty)$

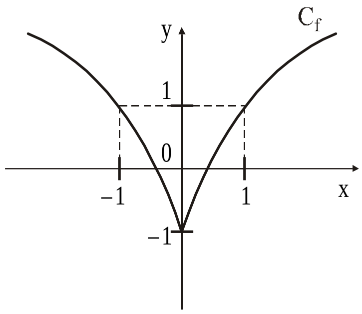
Δ. $(-3, 3)$ **Ε.** $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

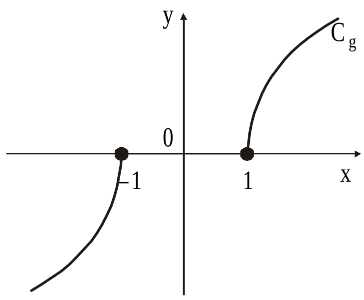
5. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(2x - 1)$ είναι το σύνολο

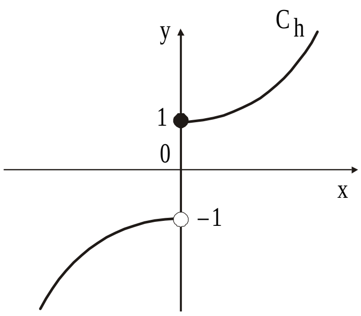
Α. R **Β.** $(-\infty, \frac{1}{2})$ **Γ.** $[\frac{1}{2}, +\infty)$

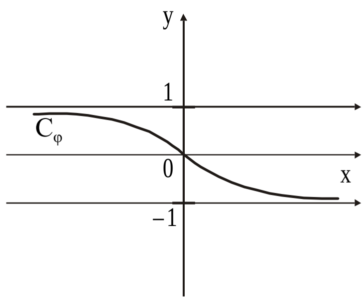
Δ. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ **Ε.** $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

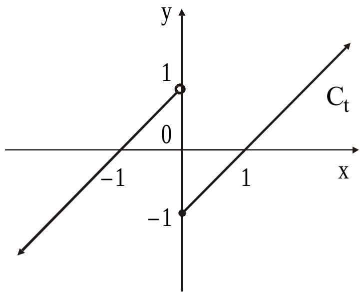
6. * Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε συναρτήσεων: f, g, h, φ, t.











Το διάστημα (- 1, 1) είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης

Α. f **Β.** g **Γ.** h **Δ.** φ **Ε.** t

7. * Αν $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, τότε το $f(3)$ είναι ίσο με

Α. - 3 **Β.** - 27 **Γ.** 27 **Δ.** 0 **Ε.** 81

8. * Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε ισχύει ότι

Α. $f(x) = x + |x|$ **Β.** $f(x) = |x| - x$

Γ. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ **Δ.** $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2}$ **Ε.** $f(x) = |x|$

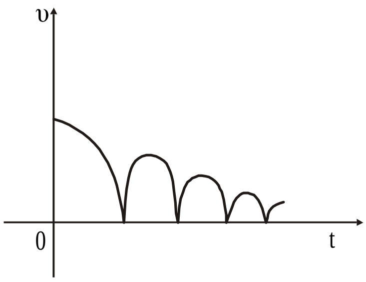
9. * Αν $f(x) = x^3$ και $\alpha \neq \beta$, τότε το $\dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$ είναι

Α. $(\alpha + \beta)^2$ **Β.** $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ **Γ.** $\alpha^2 + \beta^2$

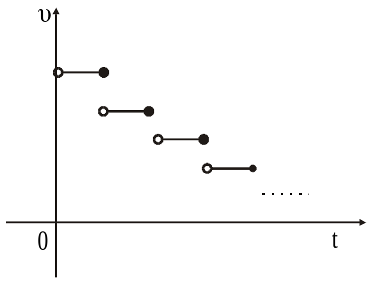
Δ. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ **Ε.** $3\alpha^2$

10. * Μια μπάλα αφήνεται από ένα ύψος h και αναπηδά στο έδαφος. Η ταχύτητα κατά την κάθοδό της έχει μέτρο $\upsilon = g \cdot t$ ενώ κατά την άνοδο έχει μέτρο $\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t$, όπου t η χρονική διάρκεια της αντίστοιχης κίνησης. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα εκφράζει το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας, κάθε χρονική στιγμή t;

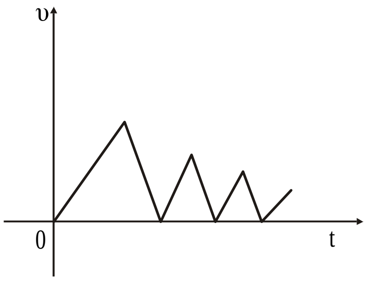
Α.



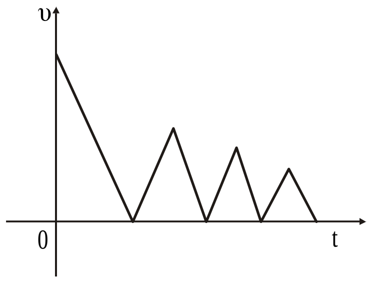
Β.



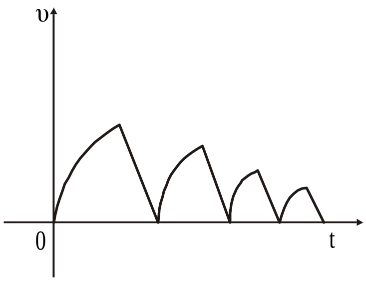
Γ.



Δ.

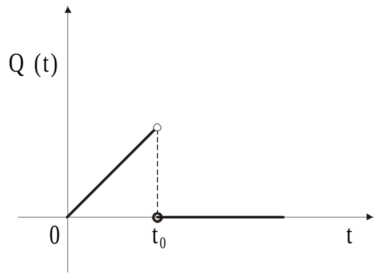


Ε.

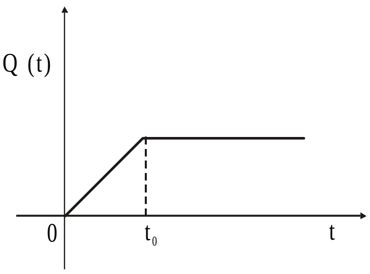


11. ***** Αρχίζουμε να φουσκώνουμε ένα άδειο μπαλόνι με σταθερή παροχή αέρα. Τη χρονική στιγμή t_0 το μπαλόνι σκάει. Η μορφή της καμπύλης της συνάρτησης που εκφράζει την ποσότητα Q (t) του αέρα στο μπαλόνι συναρτήσει του χρόνου t είναι

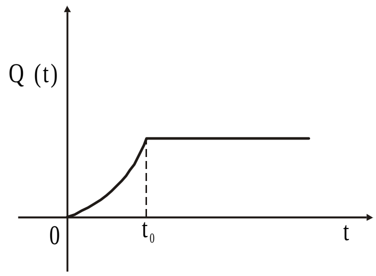
Α.



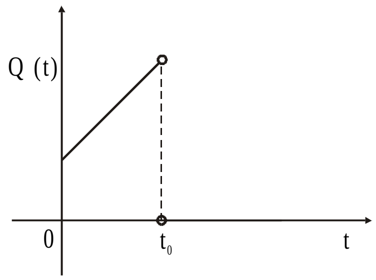
Β.



Γ.



Δ.



Ε. κανένα από τα προηγούμενα

12. ***** Το σύνολο των σημείων που η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ τέμνει τον άξονα x΄x είναι

Α. {- 1, 1} **Β.** {1} **Γ.** {- 1, 1, 3} **Δ.** {- 1, - 3, 1} **Ε.** {1, 3}

13. ***** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+2}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$

και οι παρακάτω προτάσεις:

I. $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ **II.** $f(3) = g(3)$ **III.** $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$

Τότε ισχύει

Α. μόνο η I **Β.** μόνο η II **Γ.** μόνο οι I και II

Δ. μόνο η III **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

14. * Αν η πολυωνυμική εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1, 3, τότε η εξίσωση $f(3x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς

Α. 1, -3 **Β.** $\frac{1}{3}$, -1 **Γ.** $-\frac{1}{3}$, 1 **Δ.** -2, 6 **Ε.** 2, - 6

15. * Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y, της C_f με τύπο $f(x) = 1 - 2^x$ έχει τύπο

Α. $g(x) = 1 + 2^x$ **Β.** $g(x) = 1 - 2^{-x}$ **Γ.** $g(x) = 2^x - 1$

Δ. $g(x) = \ln(x - 1)$ **Ε.** $g(x) = \ln(1 - x)$

16. * Η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα x΄x είναι η

Α. $y = f(-x)$ **Β.** $y = -f(x)$ **Γ.** $y = |f(x)|$

Δ. $y = 2f(x)$ **Ε.** $y = -f(-x)$

17. * Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα x΄x είναι

Α. 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

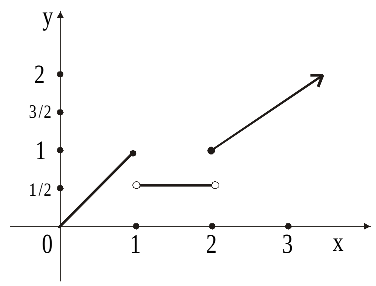
18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + κx^2 + λx - 5$. Αν $f(1) = 8$ και $f(-1) = 4$, η τιμή της παράστασης $κ + 2λ$ είναι ίση με

Α. 0 **Β.** 8 **Γ.** 13 **Δ.** - 11 **Ε.** 11

19. ***** Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \alpha x}$, $\alpha < 0$, έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

Α. $x > 0$ **Β.** $x < -1$ **Γ.** $-1 \le x \le 0$ **Δ.** $x < \alpha$ **Ε.** $x > -1$

0. ***** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι



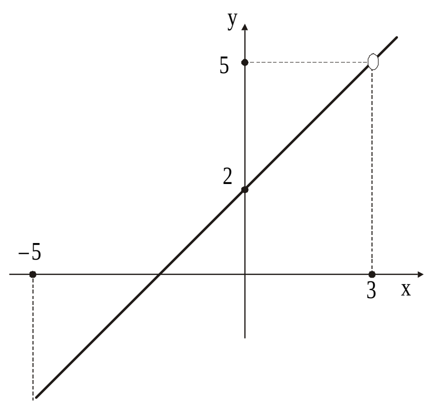
Α. $f(x) = \dfrac{x}{2}$, αν $x \in [0, +\infty)$

Β. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$ **Δ.** $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ x - \dfrac{3}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

1. ***** Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Ο τύπος της συνάρτησης αυτής μπορεί να είναι



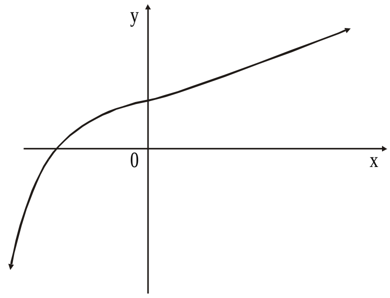
Α. $f(x) = x + 2$

Β. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Γ. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

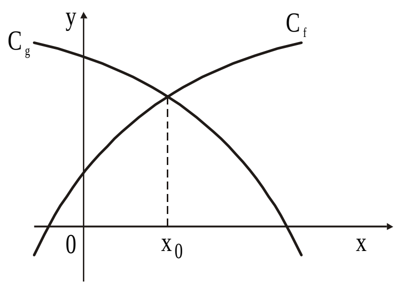
Δ. $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 5}$ **Ε.** κανένας από αυτούς

2. ***** Η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f στο R, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει



Α. δύο τουλάχιστον ρίζες
Β. μία μόνο ρίζα
Γ. καμία ρίζα
Δ. περισσότερες από δύο ρίζες
Ε. μία ρίζα θετική

3. ***** Για τις συναρτήσεις f και g που οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα, είναι **λάθος** ο ισχυρισμός



Α. f (x) > g (x) για κάθε x ∈ R
Β. f (x) < g (x) αν x < x_0
Γ. f (x) > g (x) αν x > x_0
Δ. f (x_0) = g (x_0)
Ε. η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

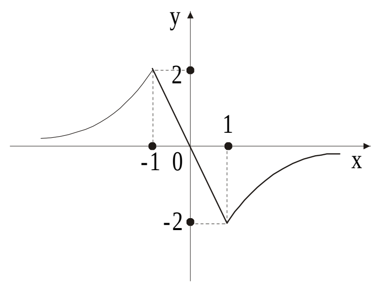
24. ***** Η μονοτονία μιας συνάρτησης f φαίνεται στον πίνακα.

x	0	1	2	+ ∞
f (x)	- ∞ ↗	f (1) = 0 ↘	f (2) = - 1 ↗	+ ∞

Τότε **δεν** ισχύει ότι

Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα (0, + ∞)
Β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (0, 1] και [2, + ∞)
Γ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2]
Δ. Η f έχει μέγιστο το 0 και ελάχιστο το - 1
Ε. Είναι f (x) < 0 όταν 0 < x < 1

5. ***** Για τη συνάρτηση f, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, **δεν** ισχύει ότι:



Α. Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R

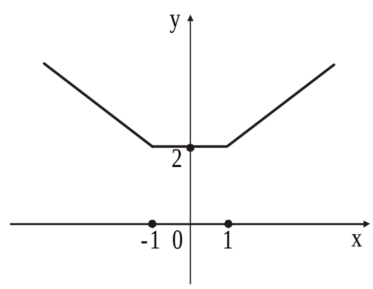
Β. Έχει σύνολο τιμών το διάστημα [- 2, 2]

Γ. Είναι περιττή

Δ. Έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2

Ε. Είναι γνησίως μονότονη στο R

6. ***** Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Από τις παρακάτω προτάσεις **λανθασμένη** είναι η



Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R

Β. Η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα [2, + ∞)

Γ. Η f είναι άρτια

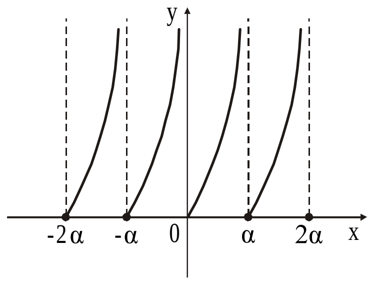
Δ. Η f είναι 1 - 1

Ε. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (- ∞, - 1], σταθερή στο διάστημα [-1, 1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, + ∞)

27. ***** Η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x - 1|$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει μέγιστη τιμή όταν το x είναι ίσο με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** $\frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\frac{3\pi}{2}$ **Ε.** 2

8. ***** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το R. Από τις παρακάτω προτάσεις να βρείτε αυτήν η οποία είναι **λάθος.**



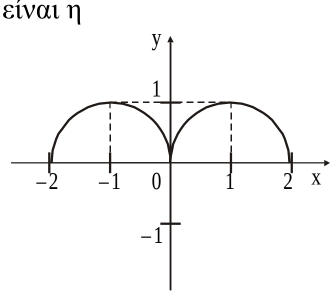
Α. Η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής (κα, (κ + 1) α) (κ ακέραιος)

Β. Η f είναι περιοδική **Γ.** Η f δεν είναι 1 -1

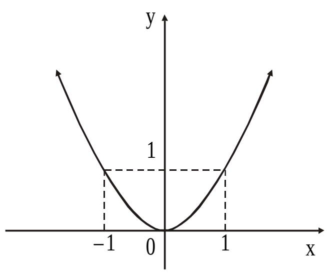
Δ. Η f είναι άρτια **Ε.** Ισχύει f (x) ≥ 0 για κάθε x του πεδίου ορισμού της

29. ***** Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις γραφική παράσταση συνάρτησης 1 - 1 είναι η

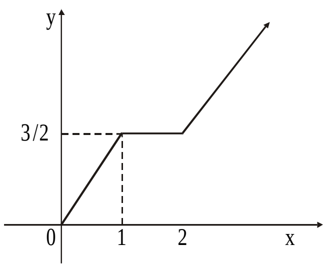
Α.



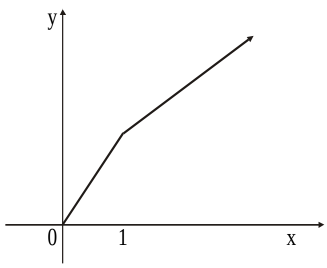
Β.



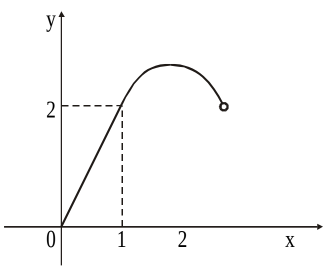
Γ.



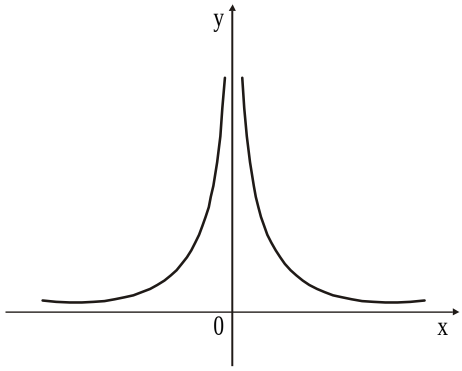
Δ.



Ε.



0. ***** Για τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει ότι



Α. είναι 1 - 1

Β. είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Γ. αντιστρέφεται

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

31. ***** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία αντιστρέφεται. Τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές

Α. ως προς την ευθεία $y = x$ **Β.** ως προς την ευθεία $y = 2x$

Γ. ως προς τον άξονα y΄y **Δ.** ως προς την αρχή των αξόνων

Ε. ως προς τον άξονα x΄x

32. ***** Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την

Α. $g(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ **Β.** $h(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$

Γ. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln x$ **Δ.** $\sigma(x) = \sqrt{\ln x}$ **Ε.** $t(x) = \ln(2 - x)$

33. ***** Από τις παρακάτω συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη η συνάρτηση

Α. $y = ημx,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **Β.** $y = x^3 + 1$

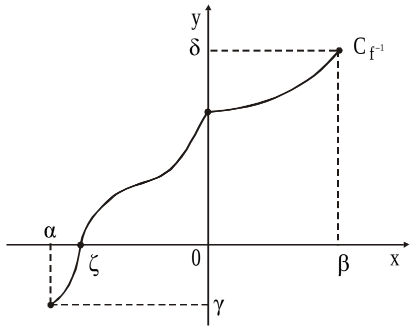
Γ. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **Δ.** $y = \frac{2}{3}e^x$ **Ε.** $y = \ln(x - 3),\ x > 3$

34. ***** Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f, τότε το $g(f(x))$ είναι ίσο με

Α. 1 **Β.** $g(x) \cdot f(x)$ **Γ.** $\frac{1}{x}$

Δ. x **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

5. ****** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f. Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός



Α. πεδίο ορισμού της f είναι το [γ, δ]

Β. σύνολο τιμών της f είναι το [α, β]

Γ. $f^{-1}(\zeta) = 0$ **Δ.** $f(0) = \zeta$

Ε. Η f έχει ελάχιστο το α για x = 0

36. ***** Αν $f(x) = \alpha x^2$ με $D_f = [0, +\infty)$ και $\alpha > 0$, τότε

Α. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\alpha x^2}$, $D_{f^{-1}} = R^*$

Β. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Γ. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\alpha}}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Δ. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \sqrt{\alpha x}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Ε. Η f δεν αντιστρέφεται

37. ***** Αν $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ με $x > -1$, τότε η f^{-1} έχει τύπο

Α. $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ **Β.** $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ **Γ.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

Δ. $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x+1}$ **Ε.** $f^{-1}(x) = (x+1)^3$

38. ***** Αν $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 7$ και $g(x) = 7$, τότε η συνάρτηση gof έχει τύπο

Α. $7x^4 - 28x^3 - 21x + 49$ **Β.** $x^2 - 4x - 14$ **Γ.** 289

Δ. 7 **Ε.** $(x^2 - 7)^2$

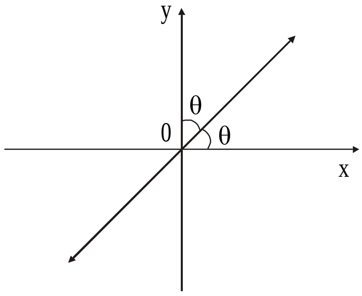
39. ***** Αν f (x) = lnx και g (x) = 16 - x^2, τότε το πεδίο ορισμού της fog είναι

Α. (- ∞, 4] **Β.** [- 4, 4] **Γ.** (- ∞, 4) ∪ (4, + ∞)

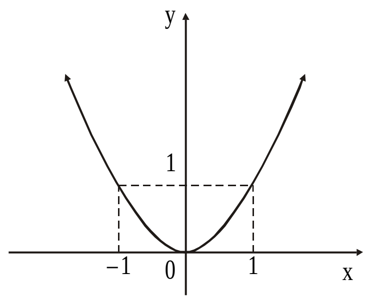
Δ. (- 4, 4) **Ε.** (0, 4)

40. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις h (x) = x, g (x) = x^2. Αν f = goh, τότε η γραφική παράσταση της f είναι

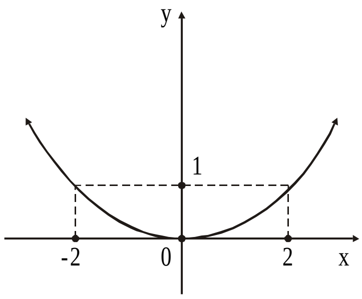
Α.



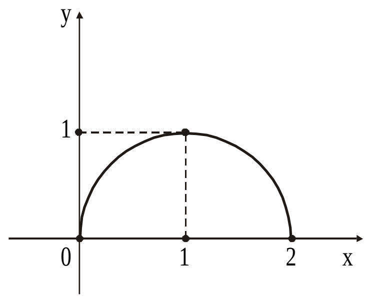
Β.



Γ.



Δ.



Ε. καμία από αυτές

41. ***** Δίνεται η συνάρτηση g (x) = $\sqrt{x^2+9}$. Τότε ισχύει ότι

Α. Dg = [- 9, +∞]

Β. Dg = R

Γ. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x

Δ. Η g είναι περιττή

Ε. Έχει σύνολο τιμών το R

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Δίνονται οι συναρτήσεις f (x) = $\sqrt{7 - x}$ και g (x) = $\sqrt{x - 3}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στο πεδίο ορισμού της που γράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. f	**α.** R
2. g	**β.** (- ∞, 7]
3. f + g	**γ.** [3, 7]
4. f - g	**δ.** (3, 7]
5. f · g	**ε.** [3, 7)
6. $\frac{f}{g}$	**ζ.** (3, 7)
7. $\frac{g}{f}$	**η.** [3, + ∞)

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5	6	7

2. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα και μόνο στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

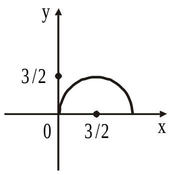
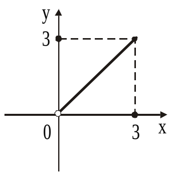
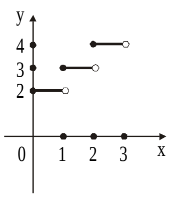
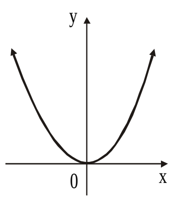
Στήλη Α	**Στήλη Β**
	α. $\frac{x^2+2}{x^2-2}$
1. $f(2x)$	**β.** $\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$
2. $2f(x)$	**γ.** $\frac{2(x+2)}{x-2}$
3. $f(x^2)$	**δ.** $\frac{x+1}{x-1}$
4. $[f(x)]^2$	**ε.** $\frac{2x+4}{2x-4}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

3. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

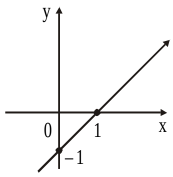
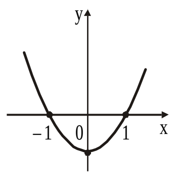
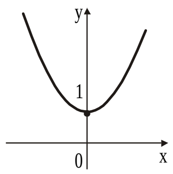
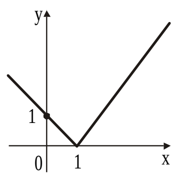
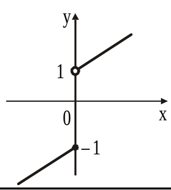
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $D_f = R$ **β.** $D_f = R - \{0\}$ **γ.** $D_f = [0, 3]$
2. 	**δ.** $D_f = (0, 3]$ **ε.** $D_f = [0, 3)$
3. 	**ζ.** $D_f = (0, 3)$ **η.** $D_f = [0, +\infty)$
4. 	

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

4. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στη γραφική της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

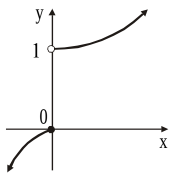
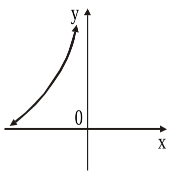
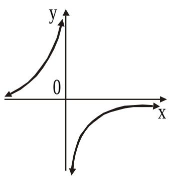
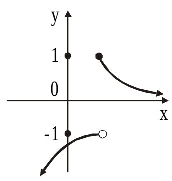
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = x^2 - 1$	**α.** 
2. $f(x) = x - 1$	**β.** 
3. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$	**γ.** 
4. $f(x) = \lvert x-1 \rvert$	**δ.** 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

5. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το σύνολο τιμών της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

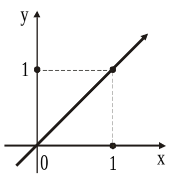
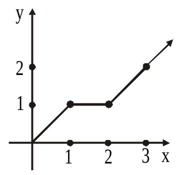
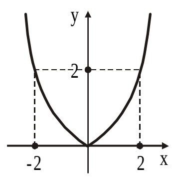
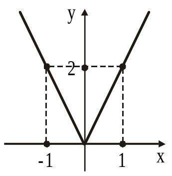
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
	β. R
	γ. $(0, +\infty)$
2. 	**δ.** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
	ε. $(-1, 1]$
3. 	**ζ.** $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$
	η. $(-\infty, -1) \cup (0, 1]$
4. 	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

6. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τον τύπο της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

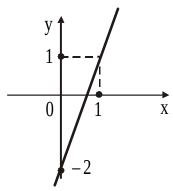
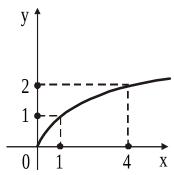
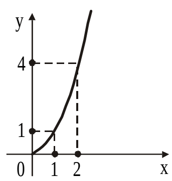
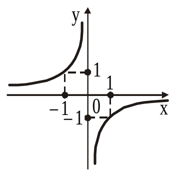
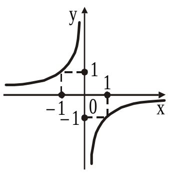
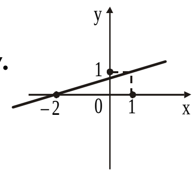
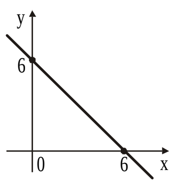
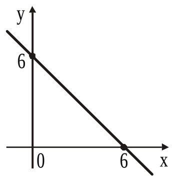
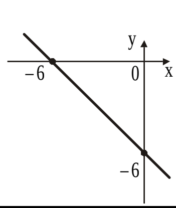
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $f(x) = x$
	β. $f(x) = 2\lvert x\rvert$
2. 	**γ.** $f(x) = \lvert x+1\rvert$
	δ. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ x-1, & x \ge 2 \end{cases}$
3. 	**ε.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
4. 	**ζ.** $f(x) = x^2$
	η. $f(x) = \frac{2}{\lvert x\rvert}$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

7. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

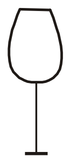
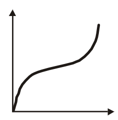
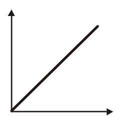
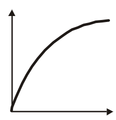
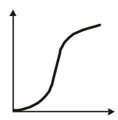
Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** 
2. 	**β.** 
3. 	**γ.** 
4. 	**δ.** 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

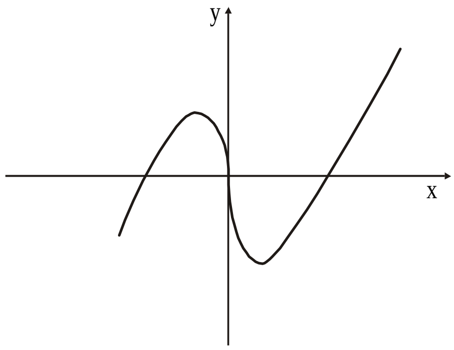
8. ***** Στην πρώτη σειρά του παρακάτω πίνακα Ι βρίσκονται τέσσερα ποτήρια τα οποία γεμίζουμε με σταθερή παροχή με νερό. Στη δεύτερη σειρά υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις του ύψους του νερού σε κάθε δοχείο συναρτήσει του χρόνου. Αντιστοιχίστε στο κάθε ποτήρι το κατάλληλο διάγραμμα συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι			
 **1.**	 **2.**	 **3.**	 **4.**
 **α.**	 **β.**	 **γ.**	 **δ.**

Πίνακας ΙΙ			
1.	**2.**	**3.**	**4.**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Στο ίδιο σχήμα να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

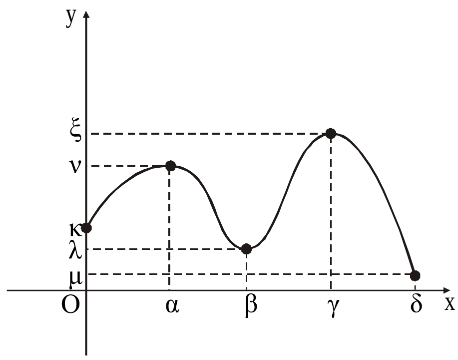


α) - f (x) β) $|f(x)|$ γ) 2f (x)

2. * Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, η g περιττή και h = gof, φ = fog, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

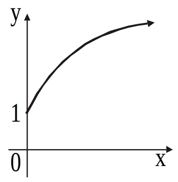
x	**f (x)**	**g (x)**	**h (x)**	**φ (x)**
- 3	0	0		
- 2	2	2		
- 1	2	2		
0	0	0		
1				
2				
3				

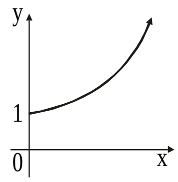
3. ***** Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος, να συμπληρώσετε στον πίνακα το είδος μονοτονίας (αν είναι γνησίως μονότονη) και το είδος των ακροτάτων σε καθένα από τα διαστήματα που ζητούνται:

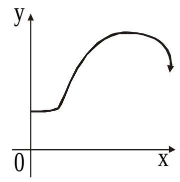


Διάστημα	***Μονοτονία***	***Μέγιστο***	***Ελάχιστο***
[0, α]			
[α, β]			
[0, γ]			
[β, γ]			
[γ, δ]			
[α, γ]			

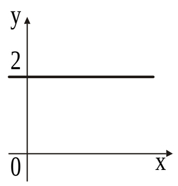
4. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση να συμπληρώσετε: το κατάλληλο είδος μονοτονίας (αν είναι μονότονη) ή τη φράση “όχι μονότονη”.

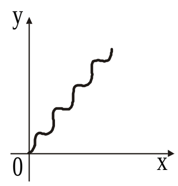


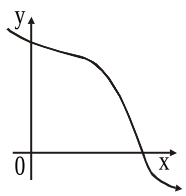




………………………… ………………………… …………………………

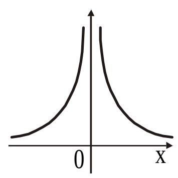


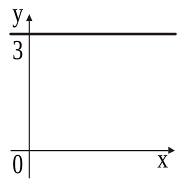


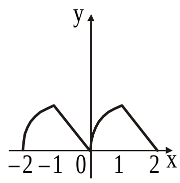


………………………… ………………………… …………………………

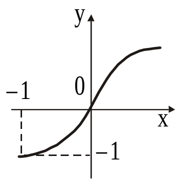
5. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την ιδιότητα: “άρτια”, “περιττή”, “ούτε άρτια, ούτε περιττή”.

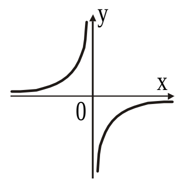


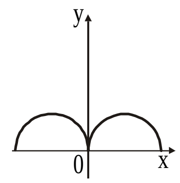




………………………… ………………………… …………………………

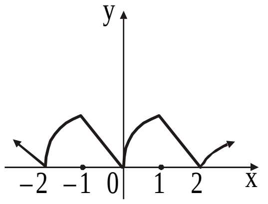


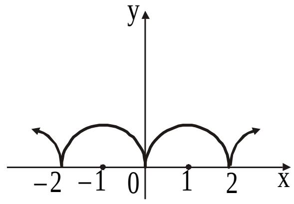




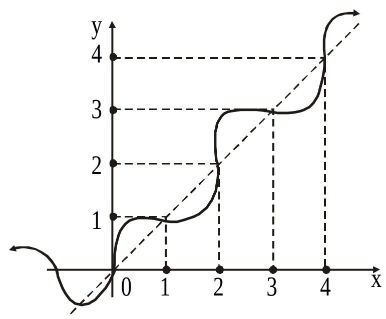
………………………… ………………………… …………………………

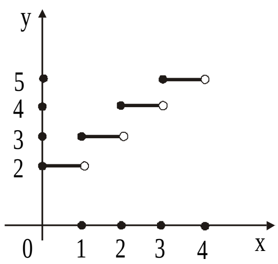
6. ***** Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την ιδιότητα: "περιοδική" ή "μη περιοδική".





....

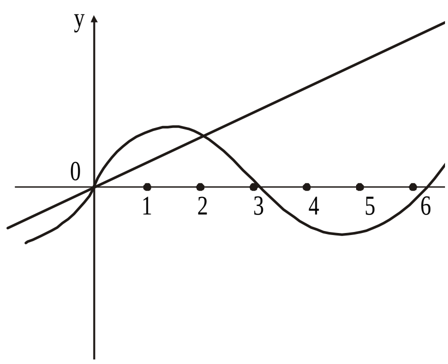




....

7. ***** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}x$ και $g(x) = ημx$.

Να βρείτε στο ίδιο σχήμα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



Ερωτήσεις διάταξης

1. ****** Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με f γνησίως φθίνουσα στο R και g γνησίως αύξουσα στο R. Επιπλέον ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in$ R.
   Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:
   $$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),\ g(x_1),\ g(x_2),\ g(x_3),\ g(x_4)$$

2. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις:
   α) $f(x) = \sqrt{x - 2}$, **β)** $g(x) = \ln(x - 2)$,
   γ) $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-4}}$, **δ)** $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x}}$

   Να τις τοποθετήσετε σε μια σειρά ώστε το πεδίο ορισμού καθεμιάς να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της επόμενης.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε τις τιμές $f(t)$, $f(xt)$, $f(x + h)$, $x, t, h \in R$.

2. ****** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}}$

β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x - 2} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{|x - 2| - 1} + \dfrac{1}{|3x - 8| - |x|}$

δ) $f(x) = \dfrac{5}{|x - 3| - 1}$

ε) $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log\dfrac{x + 3}{3 - x}$

στ) $f(x) = \dfrac{συνx}{2ημx - 1} + \dfrac{1}{εφx - 1}$, $x \in [0, 2π]$

ζ) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$	$f_2(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	$f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$
$f_4(x) = x\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$	$f_5(x) = \ln e^{x+1}$	$f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$	$f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 1}}$	$f_5(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$f_6(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{2x^2 + 2\alpha x + \alpha}{2(x^2 - 1)}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

β) Για ποια τιμή του α ισχύει $f = g$;

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α) $f + g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

8. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

9. ** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1]. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$ β) $f(x - 4)$ γ) $f(\ln x)$

10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει

$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

11. ** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το f (2).

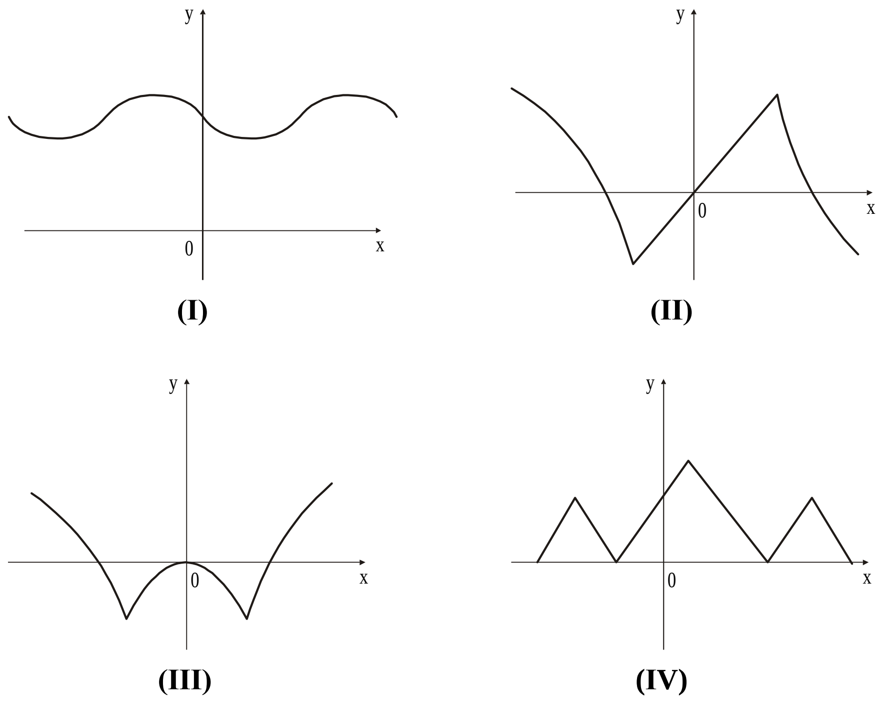
12. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 19x - 7$, $x \in (-3, 5)$.

α) Να βρείτε τη διαφορά f (x) - f (4).

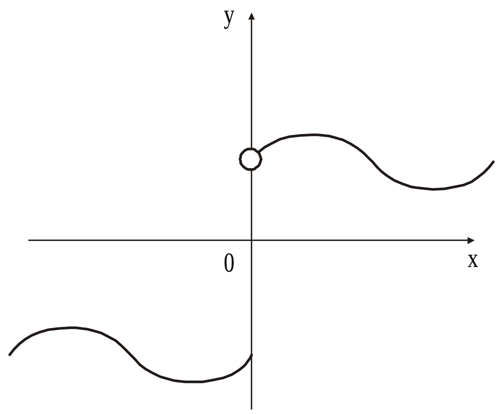
β) Να βρείτε τον αριθμό Μ > 0 τέτοιο ώστε $|f(x) - f(4)| \leq M \cdot |x - 4|$ για κάθε $x \in (-3, 5)$.

13. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f είναι άρτια, όταν για κάθε $x \in D_f$, ισχύει $-x \in D_f$ και $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in D_f$, ενώ είναι περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν άρτια ή περιττή συνάρτηση ή δεν παριστάνουν άρτια ούτε περιττή.



(I) (II) (III) (IV)



(V)

β) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$ είναι άρτια.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο για $x = x_0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -x_0$.

14. ****** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -\alpha]$.

15. ****** α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

16. ****** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

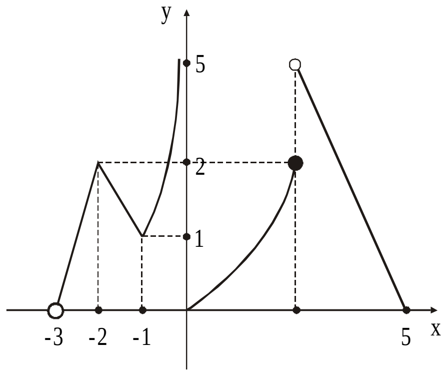
7. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από αυτό να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) το σύνολο τιμών της f

γ) το διάστημα και το είδος μονοτονίας της f

δ) τα ακρότατα της f



ε) τον τύπο της f, αν είναι γνωστό ότι:

στο διάστημα [- 1, 0) είναι υπερβολή της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ και

στο διάστημα [0, 2) είναι παραβολή της μορφής $y = \alpha x^2$.

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$

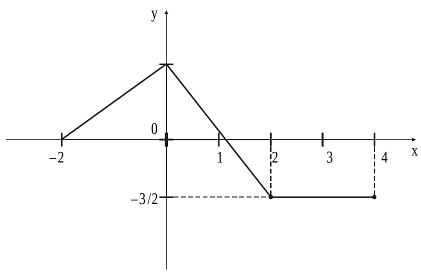
β) $f_2(x) = 2f(x)$

γ) $f_3(x) = -f(x)$

δ) $f_4(x) = |f(x)|$

9. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [2, 4]. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $g(x) = f(x) + 1$



β) $h(x) = -f(x)$ γ) $\varphi(x) = |f(x)|$.

20. ** α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = x^{2\nu}$, ν θετικός ακέραιος.

β) Ομοίως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^{2\nu+1}$, ν θετικός ακέραιος.

21. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις 2f, f^2 και $\frac{f}{f}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

22. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

- $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$
- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \\ (x-2\kappa)^2, & x \in [2\kappa-1, 2\kappa+1] \\ (x+2\kappa)^2, & x \in [-2\kappa-1, -2\kappa+1] \end{cases} \quad , \text{ κ θετικός ακέραιος}$$

στο διάστημα [- 3, 5]. Τι παρατηρείτε;

23. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

24. ****** Ποια καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = f(f(f(x)))$, αν $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

25. ****** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.

26. ****** Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx + β$, η οποία ως γνωστόν ονομάζεται και γραμμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Το ίδιο και για το γινόμενο.

27. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων fof και gog.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

28. ****** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει $(fof)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f.

29. ****** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx + β$, $α \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$ β) $f = -f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$

($c \neq 0$, σταθερά)

30. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

31. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $Δ = (0, +\infty)$.

Α. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $fog = h$.

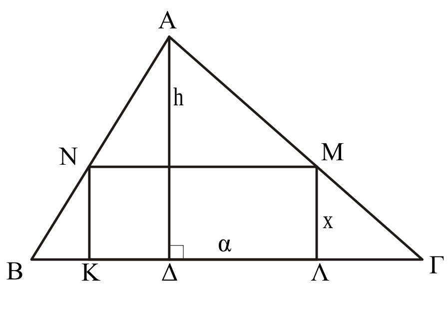
β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $φof = h$.

Β. α) Να βρείτε τις f^{-1}, g^{-1} h^{-1} (αντίστροφες των f, g, h).

β) Να βρείτε τις $f^{-1}og^{-1}$ και $g^{-1}of^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1}of^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

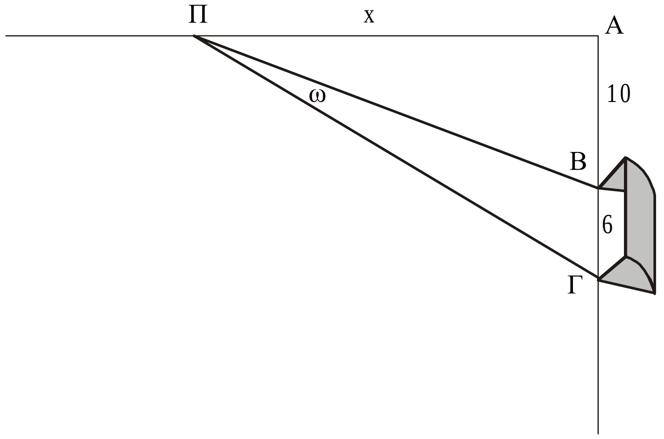
2. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α και ύψος ΑΔ = h. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο ΑΒΓ, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

33. ** Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα ΒΓ κινούμενος πάνω στην ευθεία ΠΑ. Αν ΑΒ = 10 και ΒΓ = 6:



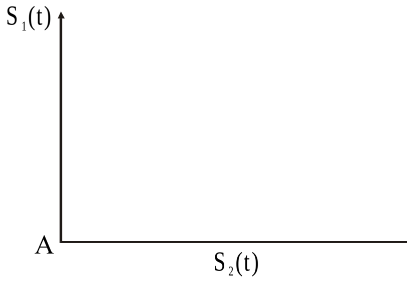
α) να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών ΑΠΒ και ΑΠΓ ως συνάρτηση της απόστασης ΠΑ = x

β) να υπολογίσετε την εφω ως συνάρτηση του x

γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να "σουτάρει" ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

Δίνεται ότι εφ (α - β) = $\dfrac{\text{εφα} - \text{εφβ}}{1 + \text{εφα} \cdot \text{εφβ}}$.

4. ** Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με σταθερή ταχύτητα $υ_2$ = 80 km/h.



α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ σαν συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;

35. ****** Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές:

$\frac{1}{2}$ s, 1 s, 2 s, 3 s, $\frac{7}{2}$ s, 4 s.

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9}$ m;

δ) Να βρείτε το λόγο $\upsilon(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

36. ****** Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$. Το ημερήσιο κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες μονάδες “εύρο” για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος Κ ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

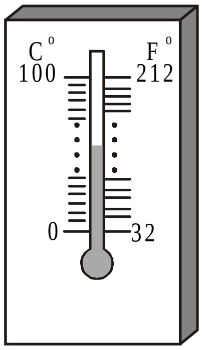
β) Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια “εύρο”;

37. ****** Το εισιτήριο του τρένου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

8. ****** Στο θερμόμετρο του σχήματος μπορούμε να έχουμε τη θερμοκρασία ενός χώρου σε βαθμούς Κελσίου (C), αλλά και σε βαθμούς Φαρενάιτ (F). Θεωρούμε δεδομένο ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές της θερμοκρασίας σε C με τις τιμές σε F είναι γραμμική (η γραφική της παράσταση είναι ευθεία).



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς C σε βαθμούς F.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς F σε βαθμούς C.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό και στις δύο κλίμακες.

39. ****** Σε πείραμα σχετικό με την εκπαίδευση των ζώων, χρησιμοποιήθηκε ένας ποντικός, τον οποίο ανάγκασαν να διασχίσει πολλές φορές κάποιο λαβύρινθο σ' ένα εργαστήριο. Ο χρόνος σε λεπτά, που ο ποντικός χρειάζεται για να διασχίσει το λαβύρινθο, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 4 + \frac{14}{x}$, όπου x ο αριθμός των δοκιμών.

α) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο ποντικός κατά την 7η δοκιμή;

β) Από ποια δοκιμή και μετά θα χρειαστεί 5 λεπτά ή και λιγότερο;

γ) Θα μπορέσει ποτέ να κάνει λιγότερο από 4 λεπτά;

40. ****** Από μετρήσεις διαπιστώθηκε ότι η καρδιά της γυναίκας μπορεί να φθάσει τους 216 το πολύ σφυγμούς ανά λεπτό σε ηλικία 5 ετών και τους 196 το πολύ σε ηλικία 25 ετών. Αν ο μέγιστος αριθμός των σφυγμών ως συνάρτηση της ηλικίας είναι της μορφής $y = αx + β$, τότε:

α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

β) να υπολογίσετε το μέγιστο αριθμό των σφυγμών ανά λεπτό στα 37 χρόνια μιας γυναίκας.

41. ** Σε x έτη από τώρα, ο πληθυσμός μιας κοινότητας θα είναι

$f(x) = 20 - \dfrac{6}{x+1}$ χιλιάδες. Να βρείτε:

α) πόσος θα είναι ο πληθυσμός σε 7 χρόνια από τώρα

β) πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός κατά τη διάρκεια του 7ου χρόνου

γ) τι θα συμβεί, αν το x αυξάνεται "απεριόριστα";

42. ** Για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ο τύπος που δίνει το μήκος ℓ μιας μεταλλικής ράβδου, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t °F, είναι:

$$\ell - \ell_0 = \alpha t_0 (t - t_0)$$

όπου: ℓ_0 είναι το αρχικό μήκος της ράβδου σε θερμοκρασία t_0 °F και
α σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου.

α) Αν το αρχικό μήκος της ράβδου είναι 100 cm σε θερμοκρασία 60 °F και $\alpha = 10^{-5}$, να γράψετε την εξίσωση που δίνει το μήκος ℓ της ράβδου ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t °F.

β) Σε ποια θερμοκρασία το μήκος της ράβδου είναι ίσο με 100, 012 cm;

43. ** Σε τρεις ασθενείς έχει δοθεί αντιπυρετικό φάρμακο και οι θερμοκρασίες τους σε βαθμούς C, ως συναρτήσεις του χρόνου σε ώρες, δίνονται από τους παρακάτω τύπους, οι οποίοι ισχύουν μέχρι την αποκατάσταση της φυσιολογικής θερμοκρασίας:

$f_1(x) = 40 - \dfrac{3}{2}x$ $\qquad$ $f_2(x) = 39 - x$ $\qquad$ $f_3(x) = 38 - \dfrac{1}{2}x$

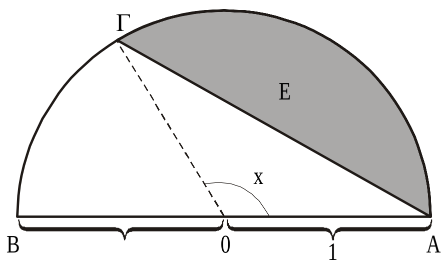
Σε τέταρτο ασθενή έχει δοθεί διαφορετικό αντιπυρετικό, και η συνάρτηση της θερμοκρασίας του ως προς το χρόνο είναι η: $f_4(x) = f_1^{-1}(x) + 12$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή x, κατά την οποία οι θερμοκρασίες των τριών πρώτων ασθενών συμπίπτουν.

β) Ποιο αντιπυρετικό είναι πιο αποτελεσματικό έως τη δεδομένη αυτή στιγμή;

4. ****** α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση της γωνίας x rad όπου $0 \le x \le \pi$ το εμβαδόν Ε του διπλανού κυκλικού τμήματος.

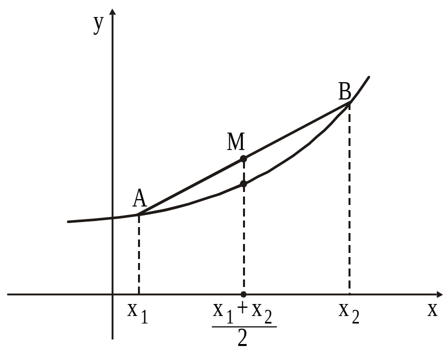
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του μεικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας x rad, όπου $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$.



5. ****** α) Το μέσο Μ μιας χορδής ΑΒ της καμπύλης μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας ανισότητας την παραπάνω πρόταση.

β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

γ) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x) = e^x$.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο

Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Σ**
2.	**Σ**
3.	**Σ**
4.	**Λ**
5.	**Σ**
6.	**Λ**
7.	**Σ**
8.	**Σ**
9.	**Λ**
10.	**Σ**

11.	**Σ**
12.	**Σ**
13.	**Σ**
14.	**Λ**
15.	**Σ**
16.	**Σ**
17.	**Λ**
18.	**Λ**
19. i)	**Σ**
19. ii)	**Σ**

20. i)	**Σ**
20. ii)	**Σ**
21.	**Σ**
22.	**Λ**
23. i)	**Λ**
23. ii)	**Λ**
24.	**Σ**
25. i)	**Σ**
25. ii)	**Σ**
26.	**Σ**
27.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β
2.	Γ
3.	Β
4.	Δ
5.	Δ
6.	Δ
7.	Δ
8.	Γ
9.	Β
10.	Γ
11.	Α
12.	Γ
13.	Γ
14.	Γ

15.	Β
16.	Β
17.	Ε
18.	Γ
19.	Γ
20.	Γ
21.	Γ
22.	Β
23.	Α
24.	Δ
25.	Ε
26.	Δ
27.	Δ
28.	Δ

29.	Δ
30.	Δ
31.	Α
32.	Β
33.	Γ
34.	Δ
35.	Ε
36.	Γ
37.	Β
38.	Δ
39.	Δ
40.	Β
41.	Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	η
3	γ
4	γ
5	γ
6	δ
7	ε

2.

1	δ
2	γ
3	α
4	β

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α

4.

1	β
2	α
3	ε
4	δ

5.

1	ζ
2	γ
3	α
4	η

6.

1	α
2	δ
3	ε
4	β

7.

1	γ
2	α
3	β
4	δ

8.

1	γ
2	δ
3	β
4	α

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) < g(x_4) < f(x_4) < f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$

2. h, φ, g, f

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

3. **α)** f_2, f_5 **β)** $(1, +\infty)$

4. **α)** $D_1 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ $D_2 = [1, +\infty)$ $D_3 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

$D_4 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $D_5 = D_4$ $D_6 = [1, +\infty)$

β) δεν υπάρχουν

γ) $D_6 = (1, +\infty)$

5. **α)** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1, 1\}$ **β)** $\alpha = 2$

6. $D_f \cap D_g = (0, +\infty)$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} \ell nx + 2x + 1, & 0 < x \le 2 \\ \sqrt{x} + \ell nx, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x} - 2x + 3, & x \ge 3 \end{cases}$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για τις άλλες

7. **α)** $D_f = (-1, 1)$ **β)** Ιδιότητες λογαρίθμων

8. **α)** $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ **β)** $y = x^{\frac{1}{\ell nx}} \Leftrightarrow \ell ny = \frac{1}{\ell nx}\ell nx = 1 \Leftrightarrow y = e$

9. **α)** $[-1, 1]$ **β)** $[4, 5]$**γ)** $[1, e]$

10. **α)** Να θέσετε $x = y = 0$.

β) Να θέσετε όπου y το x και μετά όπου y το - x.

γ) Να διακρίνετε περιπτώσεις.

11. Να θέσετε όπου x το 2 και μετά όπου x το $\frac{1}{2}$

12. $f(x) - f(4) = (x - 4)(4x^2 + 9x + 55)$, $|x| < 5$ και

$$|4x^2 + 9x + 55| \leq 4|x|^2 + 9|x| + 55 \leq 200$$

$$|f(x) - f(4)| \leq 200\,|x - 4|$$

13. **α)** Τίποτα - περιττή - άρτια - τίποτα - περιττή

β) $g(-x) = f(-x) + f(x)$

γ) $f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(x_0) \Leftrightarrow f(-x) \geq -f(-x_0)$

14. Αν $-\beta \leq x_1 < x_2 < -\alpha$, τότε $\alpha \leq -x_2 < -x_1 \leq \beta$, $f(-x_2) < f(-x_1)$

$-f(x_2) < -f(x_1)$, άρα $f(x_2) > f(x_1)$.

16. Να κάνετε χρήση του ορισμού

17. $$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & -3 < x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}, & -2 < x \leq -1 \\ -\dfrac{1}{x}, & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{25}{3}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

18. **α)** Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Διπλασιασμός των τιμών της f

γ) Συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x

δ) Τα τμήματα της C_f πάνω από τον άξονα x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν.

19. **α)** Μετατόπιση κατά 1 προς τα πάνω

β) Συμμετρική της f ως προς τον άξονα y΄y

γ) Τα τμήματα κάτω από τον άξονα x΄x ανεβαίνουν συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, επάνω.

20. **α)** (0, 0) (1, 1) (- 1, 1)

β) (0, 0) (1, 1) (- 1, - 1)

22. Είναι περιοδική

23. **α)** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1\}$

β) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$, $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

γ) $(gof)(x) = \dfrac{2 - x}{x}$, ενώ $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

δ) δεν είναι ίσες.

24. y = x εκτός των O (0, 0) και A (1, 1)

25. $x^x = e^{x \cdot \ell nx}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x \cdot \ell nx$

26. Θεωρείστε $f_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1$, $f_2(x) = \alpha_2 x + \beta_2$

27. **α)** με χρήση του ορισμού **β)** με χρήση του (α) **γ)** με χρήση του (β)

28. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ …

29. **α)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$ άρα $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $\beta = -\frac{\beta}{\alpha}$ w, κτλ.

β), γ) ομοίως

30. Να γράψετε τη συνάρτηση f σε δύο κλάδους

31. **Α. α)** $g(x) = x + 2$, $D_g = \Delta$ **β)** $\varphi(x) = \frac{x}{1+2x}$, $D_\varphi = \Delta$

Β. α) $f^{-1} = f$ $g^{-1} = x + 2$ $x \in (2, +\infty)$ $h^{-1} = \frac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \frac{1}{2})$

β) $(f^{-1}og^{-1})(x) = \frac{1}{x-2}$ $x \in (2, +\infty)$ $(g^{-1}of^{-1})(x) = \frac{1-2x}{x}$ $x \in (0, \frac{1}{2})$

γ) είναι διαφορετικές

32. **α)** Χρησιμοποιήστε αναλογίες, οπότε $L = 2\alpha + 2(1 - \frac{\alpha}{h})x$

β) $E = \alpha(1 - \frac{x}{h})x$

33. **α)** $\frac{10}{x}$, $\frac{16}{x}$ **β)** $\varepsilon\varphi\omega = \frac{6x}{x^2+160}$

γ) $y = \frac{6x}{x^2+100} \Rightarrow yx^2 - 6x + 160y = 0$, άρα πρέπει $y^2 \le \frac{9}{160}$, άρα $y^2 = \frac{9}{160}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{2y} = \sqrt{160}$ m $\approx 12{,}6$ m

34. **α)** $s = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2}$, δηλαδή $s = 100t$.

Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα 100 km/h

β) $AM = \frac{s}{2} = 50t$

γ) $180 = \frac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}$ και για $t = 4$ $\sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90$, οπότε $x \approx 67$

Ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 13 km/h περίπου.

35. **β)** 20 m **γ)** $\frac{4}{3}$ s, $\frac{8}{3}$ s **δ)** 10 - 5t

36. **α)** $K(t) = 15 + 800t - 40t^2$, $t \in Z$, $0 \le t \le 10$

β) $0 \le t \le 8$

37. Συνάρτηση σταθερή σε καθέναν από τους τρεις κλάδους της.

38. **α)** $y = \alpha x + \beta$ για τα ζεύγη (0, 32), (100, 212)

β) Αντίστροφη σχέση της προηγούμενης

γ) Να θεωρήσετε σύστημα

39. **α)** $f(7) = \frac{14}{7} + 4 = 6$ min **β)** Από τη 14η δοκιμή

γ) Όχι, αφού πρέπει $4 + \frac{14}{x} < 4$, με $x > 0$

40. $f(x) = -x + 221$, $f(37) = 184$

41. **α)** $f(7) = 19.250$ **β)** $f(7) - f(6) = 250$ **γ)** όχι πάνω από 20.000

42. **α)** $\ell = 0{,}0006t + 99{,}964$ **β)** 80 °F

43. **α)** $39 - x = 40 - \frac{3}{2}x$ άρα $x = 2$ ώρες

β) $f_1^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{80}{3}$, $f_4(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{116}{3}$, $f_4(2) = \frac{112}{3} \approx 37{,}3\ °C$

άρα περισσότερο αποτελεσματικό είναι το πρώτο αντιπυρετικό

44. **α)** $E(x) = \frac{1}{2}(x - ημx)$, $0 \le x \le π$

β) $H(x) = \frac{π}{2} - E(x)$

45. $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

II. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. ***** Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, έναν πραγματικό αριθμό ℓ. Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της. **Σ** **Λ**

2. ***** Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f, όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0, συμπίπτουν πάντοτε. **Σ** **Λ**

3. ***** Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. **Σ** **Λ**

4. ***** Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό. **Σ** **Λ**

5. ***** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, τότε υπάρχει συνάρτηση φ με $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ και $f(x) = \ell + \varphi(x)$. **Σ** **Λ**

6. ****** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0. **Σ** **Λ**

7. ****** Αν για τις συναρτήσεις $f, g : A \to R$ υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$, τότε πάντοτε

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ **Σ** **Λ**

8. ****** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x|}{x} - 1$.

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. **Σ** **Λ**

9. ****** Μια συνάρτηση f έχει στο $x_0 = 2004$ όριο το - 2004. Τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές για κάποια x κοντά στο 2004. **Σ** **Λ**

0. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$, $\ell \neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. **Σ** **Λ**

1. * Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι θετικός αριθμός, τότε η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο x_0. **Σ** **Λ**

2. * Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0. Τότε ισχύει πάντοτε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. **Σ** **Λ**

3. ** Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = \gamma$. **Σ** **Λ**

4. * Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} = 1$ με $\alpha \neq 0, 1$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3\ell$. **Σ** **Λ**

6. * Αν $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x} + e^{-x}$, για κάθε $x \in R$, τότε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **Σ** **Λ**

7. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $g(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε πάντα ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$. **Σ** **Λ**

8. * Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. **Σ** **Λ**

9. * Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. **Σ** **Λ**

0. * Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$. **Σ** **Λ**

1. ** Αν η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. **Σ** **Λ**

2. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση f (x) = 0 δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in$ (α, β) ώστε f (ξ) < 0, τότε θα ισχύει f (x) < 0 για κάθε $x \in$ (α, β). **Σ** **Λ**

3. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές f (x_1), f (x_2) με x_1, $x_2 \in$ [α, β], τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των f (x_1) και f (x_2). **Σ** **Λ**

4. ****** Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο R, ισχύει f (x_1) = 1 και f (x_2) = 4, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε f (x_0) = e. **Σ** **Λ**

5. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f (α), f (β)]. **Σ** **Λ**

6. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f (β), f (α)]. **Σ** **Λ**

7. ****** Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με f (α) ≠ f (β), παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f (α) και f (β). **Σ** **Λ**

8. ****** Αν $(1 - x)(1 + 5x) \le f(x) \le (3x + 1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0. **Σ** **Λ**

9. ***** Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞), τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x))$. **Σ** **Λ**

0. ****** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν η f είναι 1 - 1 στο [α, β], τότε είναι και γνησίως μονότονη στο [α, β]. **Σ** **Λ**

1. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με f $(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του f (x_0). **Σ** **Λ**

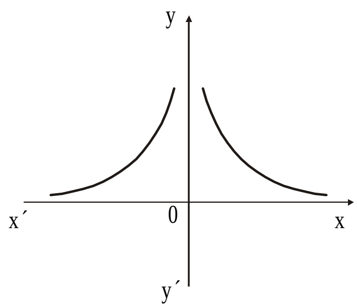
2. ****** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο f (Δ). **Σ** **Λ**

3. ***** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1 - 1 στο Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο f (Δ). **Σ** **Λ**

4. ***** Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. **Σ** **Λ**

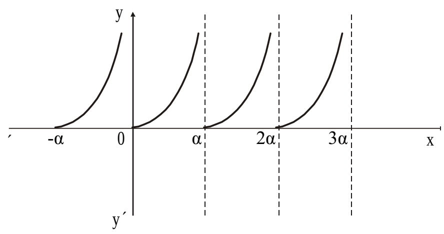
5. ***** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο R - {1}. **Σ** **Λ**

6. ***** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι συνεχής στο D_f.



Σ **Λ**

7. ***** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι συνεχής.



Σ **Λ**

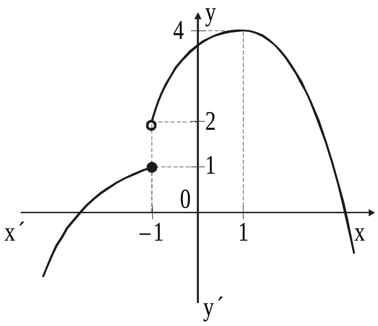
8. ****** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g **δεν** είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

9. ****** Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση f + g **δεν** είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

0. ****** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, τότε **λάθος** είναι

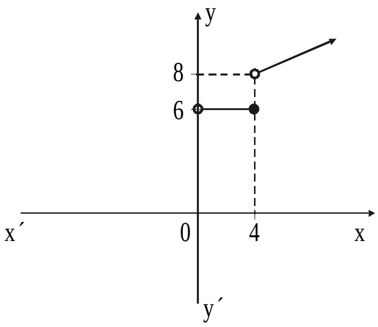


Α. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ **Β.** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$

Γ. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$ **Δ.** $f(-1) = 2$

Ε. $f(1) = 4$

2. ***** Για τη συνάρτηση f του σχήματος, ισχύει



Α. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 6$ **Β.** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$

Γ. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

Δ. υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Ε. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

3. ***** Αν $f(x) \leq g(x)$ με $x \in (1, 3)$ και οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο 2, τότε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) > \lim\limits_{x \to 2} g(x)$ **Β.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) > 0$ και $\lim\limits_{x \to 2} g(x) < 0$

Γ. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 2} g(x)$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \geq \lim\limits_{x \to 2} g(x)$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

4. ***** Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ με $x \in (0, 2)$ και $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$, τότε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$ **Β.** $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - g(x)] = 3$

Γ. $\lim\limits_{x \to 1} [h(x) - f(x)] = 3$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

5. ***** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε πάντοτε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ **Β.** $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Γ. για το όριο της συνάρτησης $f \cdot g$ στο x_0 έχουμε απροσδιόριστη μορφή

Δ. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] > 0$ **Ε.** $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] < 0$

6. ***** Από τις παρακάτω ισότητες να βρείτε αυτήν που είναι **λάθος**

Α. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ **Β.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 3}{x^2} = -\infty$ **Γ.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{x} = +\infty$

Δ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - συν^2 x} = +\infty$ **Ε.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx}{x^3} = +\infty$

7. ***** Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & αν\ x \neq 1 \\ 5, & αν\ x = 1 \end{cases}$, δίνεται ο πίνακας τιμών:

x	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,05	1,1
f (x)	2,8	2,9	2,95	2,99	2,999	$\to \quad \leftarrow$	3,001	3,01	3,05	3,1

Τότε **λάθος** είναι

Α. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

Β. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 1

Δ. $f(1) = 5$

Ε. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f έχει όριο στο 2 τον αριθμό 5

8. ***** Αν $f(x) = \dfrac{\pi x}{2x - 1}$, τότε το $\lim\limits_{x \to +\infty}$ συν (f (x)) είναι ίσο με

Α. 1 **Β.** $\dfrac{\pi}{2}$ **Γ.** 0 **Δ.** - 1 **Ε.** $\dfrac{1}{2}$

9. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$. Τότε ισχύει

Α. η f δεν είναι συνεχής στο 3

Β. η f είναι συνεχής στο 3

Γ. η f για x > 3 είναι γνησίως φθίνουσα

Δ. δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Ε. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

10. ***** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R η οποία είναι συνεχής και 1 - 1. Τότε η f

Α. είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα

Β. δεν μπορεί να είναι άρτια

Γ. είναι πάντοτε περιττή

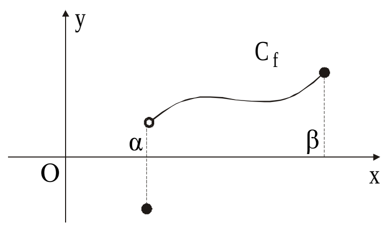
Δ. $f(1) = f(-1)$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

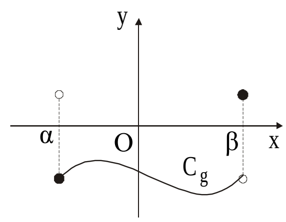
11. ***** Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon\varphi(\pi x)}{x}, & x \neq 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, τότε το κ είναι ίσο με

Α. 1 **Β.** 0 **Γ.** π **Δ.** $\dfrac{\pi}{2}$ **Ε.** - π

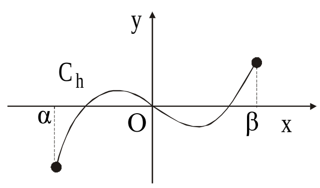
12. ***** Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων f, g, h, φ, t.



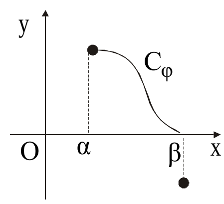
(α)



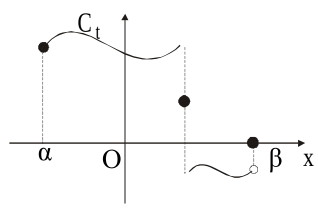
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Τότε οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [α, β] ισχύουν για την περίπτωση

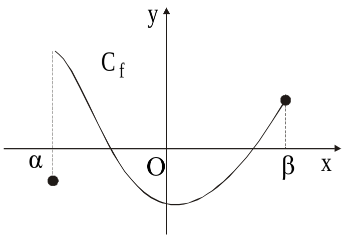
Α. της συνάρτησης f　　　　**Β.** της συνάρτησης g

Γ. της συνάρτησης h　　　　**Δ.** της συνάρτησης φ

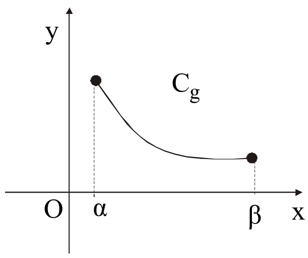
Ε. της συνάρτησης t

13. ***** Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h, φ, t. Για ποια από τις συναρτήσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα [α, β];

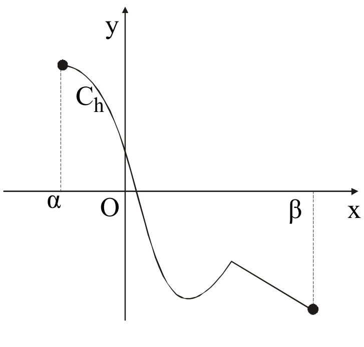
Α.



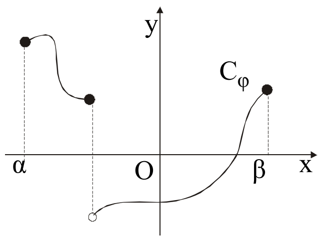
Β.



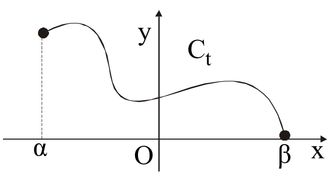
Γ.



Δ.



Ε.



14. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε από τις παρακάτω προτάσεις σωστή είναι πάντοτε η

Α. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

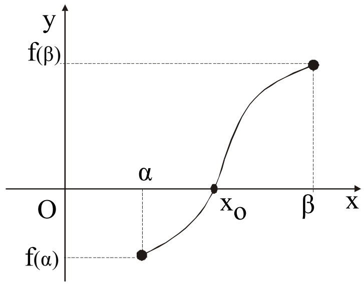
Β. δεν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$

Γ. η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β]

Δ. η C_f δεν τέμνει ποτέ τον άξονα y΄y

Ε. καμία από τις προηγούμενες προτάσεις

5. * Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει



Α. περισσότερες από μία ρίζες

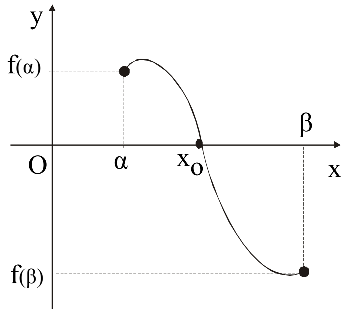
Β. καμία ρίζα

Γ. μόνο μία ρίζα

Δ. δύο ρίζες

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

6. * Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει



Α. δύο ρίζες

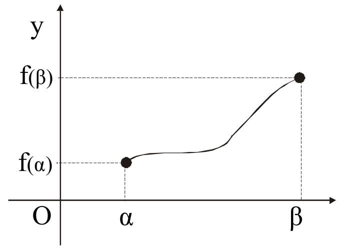
Β. καμία ρίζα

Γ. περισσότερες από μία ρίζες

Δ. μόνο μία ρίζα

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

7. ***** Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι



Α. (f (α), f (β)) **Β.** [f (α), f (β)]

Γ. (f (β), f (α)) **Δ.** [f (β), f (α)]

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

18. ***** Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$ και οι προτάσεις:

Ι. υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **ΙΙ.** η f ορίζεται στο 2

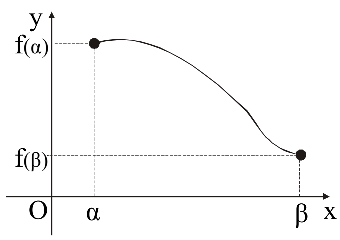
ΙΙΙ. η f είναι συνεχής στο 2.

Τότε αληθεύουν

Α. μόνο η Ι **Β.** μόνο η ΙΙ **Γ.** μόνο η Ι ή η ΙΙ

Δ. καμία από τις τρεις **Ε.** η ΙΙΙ

9. ***** Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι

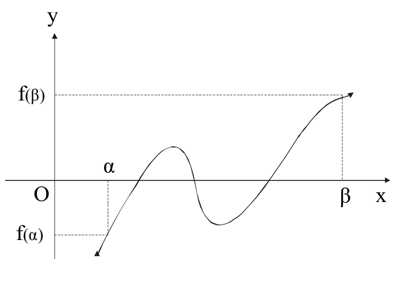


Α. (f (α), f (β)) **Β.** [f (α), f (β)]

Γ. (f (β), f (α)) **Δ.** [f (β), f (α)]

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

0. ***** Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει



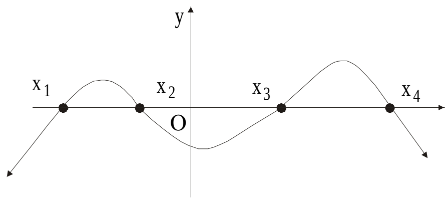
Α. καμία ρίζα

Β. ακριβώς τρεις ρίζες

Γ. μόνο μία ρίζα

Δ. το πολύ μία ρίζα **Ε.** τουλάχιστον τέσσερις ρίζες

1. * Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα, τότε **δεν** ισχύει ότι



Α. στο διάστημα (x_1, x_2) η $f(x) > 0$

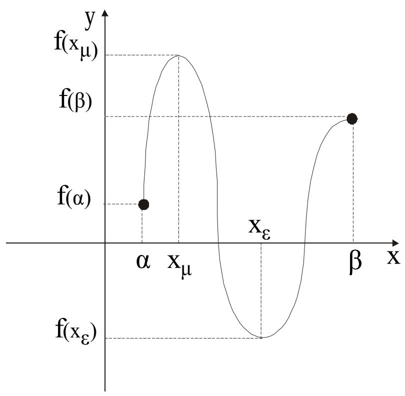
Β. στο διάστημα (x_2, x_3) η $f(x) < 0$

Γ. στο διάστημα (x_3, x_4) η $f(x) > 0$

Δ. στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$ και $(x_4, +\infty)$ η $f(x) < 0$

Ε. στο διάστημα (x_2, x_4) η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες

2. * Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι



Α. $[f(\alpha), f(\beta)]$ **Β.** $(f(x_\varepsilon), f(x_\mu))$

Γ. $[f(\beta), f(\alpha)]$ **Δ.** $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

23. * Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι

Α. $[f(\alpha), f(\beta)]$ **Β.** $[f(\beta), f(\alpha)]$ **Γ.** $[\beta, \alpha]$

Δ. $(f(\beta), f(\alpha))$ **Ε.** το R

24. * Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και οι προτάσεις:

Ι. f συνεχής **ΙΙ.** f άρτια **ΙΙΙ.** f γνησίως μονότονη

Η αντίστροφη της f υπάρχει, όταν ισχύει

Α. η Ι **Β.** η ΙΙ **Γ.** οι Ι και ΙΙ **Δ.** η ΙΙΙ

Ε. η Ι ή η ΙΙ

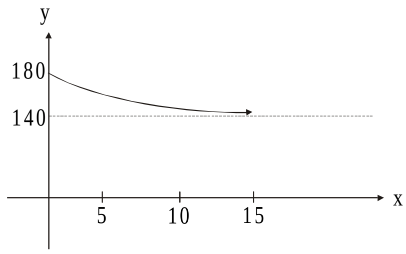
25. * Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$. Τότε **λάθος** είναι

Α. $f(-1) > 0$ **Β.** $f(1) < 0$

Γ. η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$

Δ. υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$ **Ε.** $f(-1) \cdot f(1) > 0$

6. * Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f. Τότε ισχύει



Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 180$

Β. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 140$

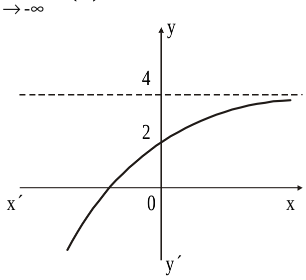
Γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 140$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

Ε. η f δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

27. * Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4 - 2e^{-x}$ ισχύει

Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **Β.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Γ. η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα



Δ. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

28. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ell n(-x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$. Τότε

Α. η f δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$

Β. η f δεν είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

Γ. η f δεν είναι συνεχής στο 0 **Δ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Ε. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

29. ***** Το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+1}{(4-x)(4+x)}$ είναι ίσο με

Α. - 16 **Β.** - 4 **Γ.** 1 **Δ.** + ∞ **Ε.** - ∞

30. ***** Αν $f(x) \le x^3 + 1$ για $x < -4$, τότε το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (αν υπάρχει) είναι ίσο με

Α. + ∞ **Β.** - ∞ **Γ.** 0 **Δ.** - 1 **Ε.** - 12

31. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{4x^2+7}$. Η τιμή $f(10^{2004})$ προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τον αριθμό

Α. 1,4 **Β.** 10^4 **Γ.** 0,75 **Δ.** 0,25 **Ε.** $\dfrac{1}{7}$

32. ***** Από τις παρακάτω ισότητες **λάθος** είναι η

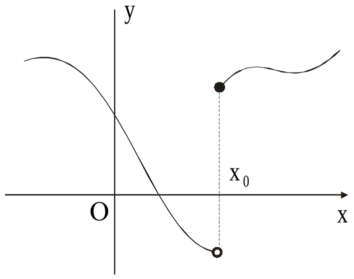
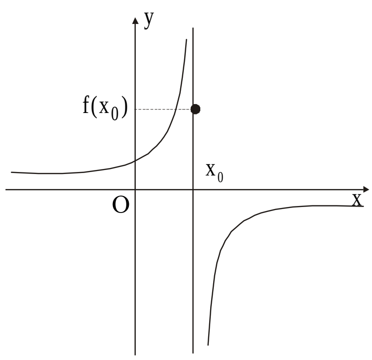
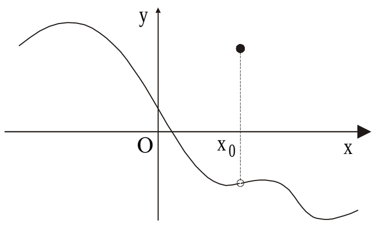
Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} συν\dfrac{1}{x} = 1$ **Β.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{συνx}{x} = 0$ **Γ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$

Δ. $\lim\limits_{x \to +\infty} ημ\dfrac{1}{x} = 0$ **Ε.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\, εφ\dfrac{1}{x} = 0$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ****** Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, ώστε σε κάθε γραφική παράσταση από τη στήλη Α του πίνακα Ι να αντιστοιχούν οι σχέσεις που ισχύουν από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

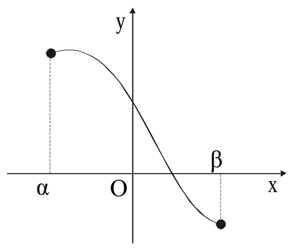
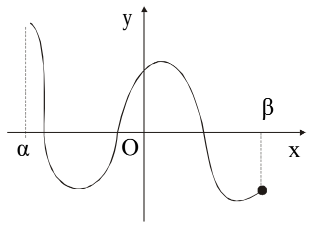
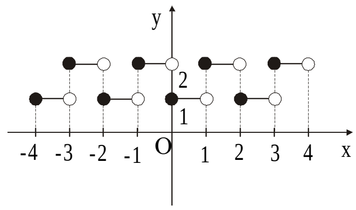
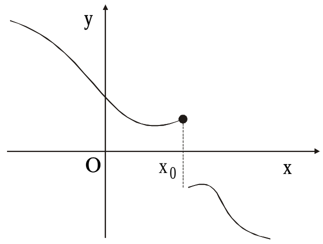
Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
	β. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
2. 	**γ.** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
	δ. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
	ε. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$
3. 	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

2. ****** Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη Α με μία μόνο ιδιότητα που περιγράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

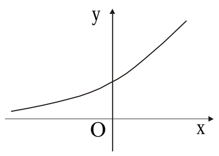
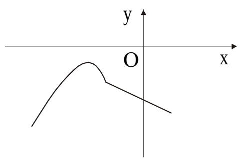
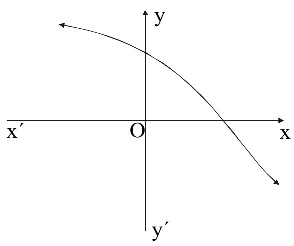
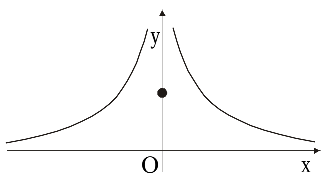
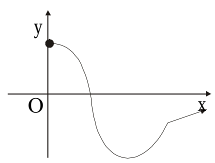
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** περιοδική
	β. άρτια
2. 	**γ.** “1 - 1” και συνεχής στο [α, β]
	δ. συνεχής στο (α, β]
3. 	**ε.** γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, x_0]$ και $(x_0, +\infty)$
	ζ. γνησίως αύξουσα
4. 	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

3. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη Α με την ιδιότητα ή το συμβολισμό που περιγράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

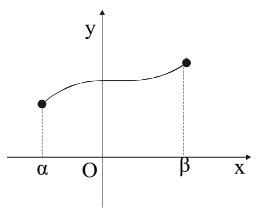
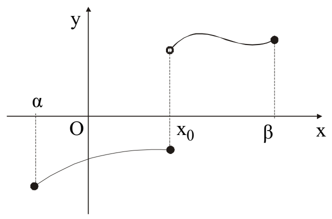
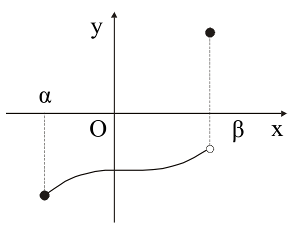
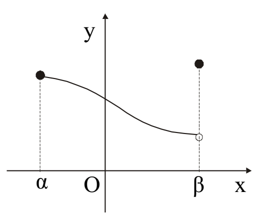
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** η f δεν είναι συνεχής στο 0
2. 	**β.** η f έχει πεδίο ορισμού το [0, + ∞)
	γ. η f είναι γνησίως αύξουσα
3. 	**δ.** f (x) < 0
	ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα
	ζ. η f είναι περιττή
4. 	**η.** f (- 1) = 0
5. 	

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**

4. ** Για τις συναρτήσεις που οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στη στήλη Α του πίνακα Ι, κάποια ή κάποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [α, β] δεν ισχύουν. Οι συνθήκες αυτές φαίνονται στη στήλη Β. Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** f (α) · f (β) < 0 **β.** f συνεχής στο x_0 **γ.** f συνεχής στο α **δ.** f (α)·f (β) < 0 και f συνεχής στο β **ε.** f συνεχής στο β
2. 	
3. 	
4. 	

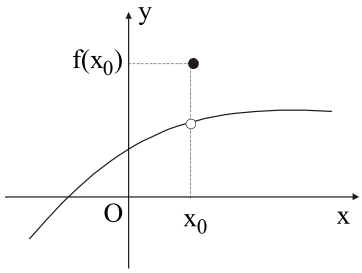
Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

5. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης της στήλης Α του πίνακα Ι, να αντιστοιχεί η σχέση που ισχύει από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

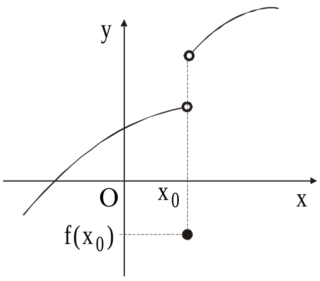
1. 

</td><td>

α. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

β. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

</td></tr>
<tr><td>

2. 

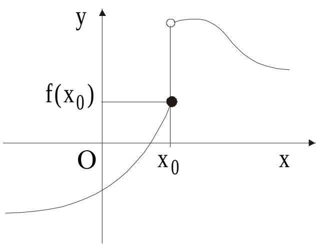
</td><td>

γ. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

δ. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

ε. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

</td></tr>
<tr><td>

3. 

</td><td></td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

6. ** Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
πεδίο ορισμού	***σύνολο τιμών***
1. $\Delta = [\alpha, \beta]$ **2.** $\Delta = [\alpha, \beta)$ **3.** $\Delta = (\alpha, \beta]$ **4.** $\Delta = (\alpha, \beta)$	**α.** $(\lim\limits_{x \to \beta} f(x), \lim\limits_{x \to \alpha} f(x))$ **β.** $[f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta} f(x))$ **γ.** $(\lim\limits_{x \to \beta} f(x), f(\alpha)]$ **δ.** $[f(\beta), f(\alpha)]$ **ε.** $[f(\beta), \lim\limits_{x \to \alpha} f(x))$ **ζ.** $(\lim\limits_{x \to \alpha} f(x), f(\beta)]$

Πίνακας ΙΙ

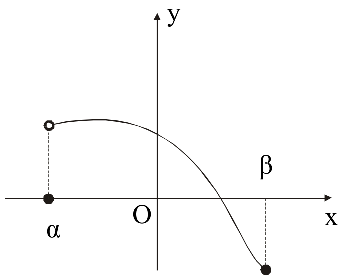
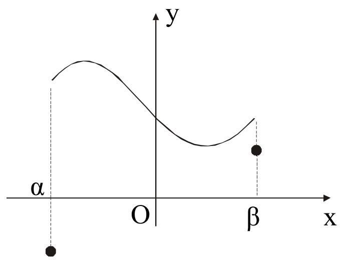
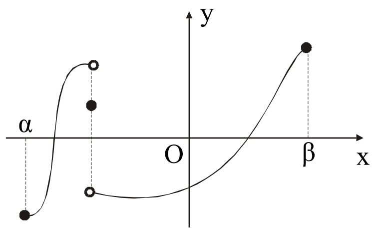
1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ****** Στη στήλη Α σημειώνεται μία απροσδιόριστη μορφή. Στη στήλη Β δίνεται ένα παράδειγμα που αναφέρεται σ' αυτήν τη μορφή. Συμπληρώστε τη στήλη Γ με ένα άλλο παράδειγμα που να δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα από αυτό που έχει δοθεί.

Στήλη Α ***μορφή***	**Στήλη Β** ***παράδειγμα που δίνεται***	**Στήλη Γ** ***παράδειγμα που ζητείται***
$\frac{0}{0}$	$f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = x + 1$ $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -1} g(x) = 0$ $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$	
$\frac{\infty}{\infty}$	$f(x) = 2x + 1$ $g(x) = x + 3$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$	
$0 \cdot \infty$	$f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{x^4}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$	

2. ****** Να συμπληρώσετε δίπλα σε κάθε γραφική παράσταση ποια ή ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύουν. Σε ποιες περιπτώσεις (παρότι δεν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις) η εξίσωση f (x) = 0 έχει λύση;

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Αν κ, λ, μ, ν, ξ είναι τα όρια στο $x_0 = 1$ των συναρτήσεων f, g, h, φ, s αντιστοίχως και ισχύει:

$$h(x) \le g(x) \le f(x) \le s(x) \le \varphi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

να διατάξετε τους αριθμούς κ, λ, μ, ν, ξ από το μικρότερο (ή ίσο) προς το μεγαλύτερο.

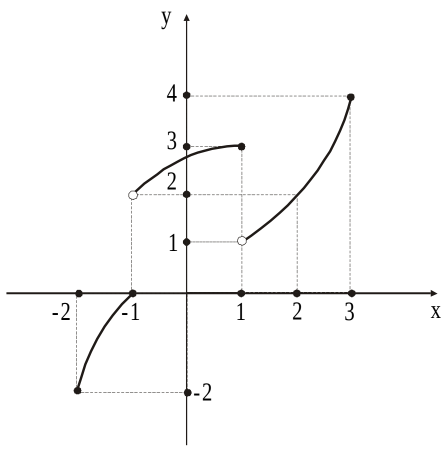
2. ***** Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R, συνεχείς και ισχύει: f γνησίως αύξουσα, g γνησίως φθίνουσα και f (2) = g (2). Να διατάξετε σε μία σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις παρακάτω διαφορές:

α) f (e) - g (e) **β)** f (π) - g (π) **γ)** f (0) - g (0)

δ) f (2) - g (2) **ε)** f (3) - g (3)

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ στ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

2. **Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

3. ** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$.

4. ** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\text{συν}x} \right)$.

5. ** Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\text{ημ}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \text{συν}x} \right)$

6. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -6$ και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 10$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(h(x))^2}$ β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3f(x) - 4[g(x)]^2}{g(x) + 2f(x)}$

7. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ell n(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

8. ** Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + ... + \eta\mu\nu x}{x} = 28$.

9. ** Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot ... \cdot \eta\mu\nu x}{x^\nu} = 120$.

10. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + \eta\mu \dfrac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}.$$ Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$

11. ** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) της $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x-1)(x+2)}$ στο $x_0 = -2$

β) της $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{|x + 1|}$ στο $x_0 = -1$

12. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq -1 \\ 4x - 5 & x < -1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f, g, gof στο $x_0 = -1$.

13. ****** α) Να δείξετε ότι : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (1) αν και μόνο αν

$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$ (2)

β) Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ισχύει η σχέση

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x \in$ R:

i) να βρείτε το $f(0)$

ii) αν η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το R.

14. ****** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

15. ****** Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in$ R, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

16. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$f(x) = \sqrt{x - 1}$ και $g(x) = \sqrt{4 - x}$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

β) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 2$.

γ) Να εξετάσετε αν οι fog και gof είναι και αυτές συνεχείς στο $x_0 = 2$.

17. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

γ) Να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1}.

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

β) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

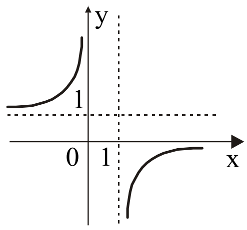
γ) Υπάρχει τιμή του α για την οποία η f να είναι συνεχής;

19. ** Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι συνεχής:

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in$ R ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

0. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)}$;

21. ** Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση $(x + 1)\,2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (- 1, 0)

β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (- 1, 1).

22. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ell nx + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

23. ** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) = x και g (x) = συν2x τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

24. ** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0, 8] για την οποία ισχύουν ότι f (0) = 1, f (2) = - 2, f (4) = 2, f (6) = - 4 και f (8) = 1.

α) Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα x΄x στο (0, 8).

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα [0, 2] και [4, 6] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [2, 4] και [6, 8], τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση f (x) = 0.

25. ** Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (-1, 1).

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

26. ** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{\nu+1} - 2x + 1$, $\nu \in N^*$.

α) Να αποδείξετε ότι το P (x) διαιρείται με το x - 1.

β) Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

γ) Αν Q (x) το παραπάνω πηλίκο, να αποδείξετε ότι το Q (x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

δ) Να δικαιολογήσετε ότι και το P (x) έχει την ίδια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

27. **** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [0, α] με f (0) = f (α).

α) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f(\frac{\alpha}{2} + x)$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\alpha}{2})$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(\frac{\alpha}{2} + x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\alpha}{2})$.

28. **** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει μία μόνο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (με τη σειρά που δίνονται): [0, 1], $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

β) Να παραστήσετε τα διαστήματα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Να περιγράψετε, με βάση το (β), μια διαδικασία (αλγόριθμο) μέσω της οποίας μπορούμε να προσεγγίσουμε μια ρίζα ενός πολυωνύμου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$. Να βρείτε τη ρίζα με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού (με υπέρβαση). Να κάνετε χρήση υπολογιστή τσέπης.

29. **** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$$

30. **** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$.

β) Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο διάστημα $(1, \frac{3}{2})$, ενώ ο $\sqrt{3}$ στο διάστημα $(\frac{3}{2}, 2)$.

31. **** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

32. ** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το [α, β], τότε

α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β) να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

33. ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \gamma \in R$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \delta \in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο έ-νας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ell n x_0 = 1$.

34. ** Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

35. ** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 10] και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες το 3 και το 7.

α) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 0$ με $x_0 < 3$, να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x < 3$.

β) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) < 0$ με x_0 τέτοιο ώστε $3 < x_0 < 7$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε x: $3 < x < 7$.

36. ** Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου (Μύτικας, 2.917 μ.) γίνεται συνήθως από τη θέση “Πριόνια” και διαρκεί για ένα μέσο ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει από τα “Πριόνια” στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση από τον “Μύτικα” και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα “Πριόνια”. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

37. ****** Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε λέγοντας χορδή της f εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα ανήκουν στη γραφική παράσταση της f. Έστω ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [0, 1] και με f (0) = f (1) = 0.

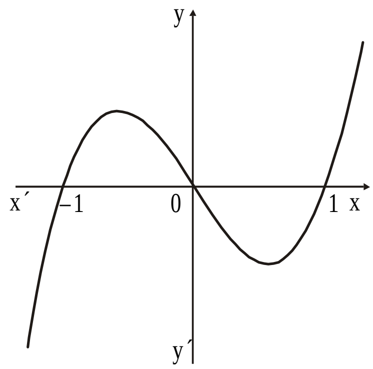
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{\nu}$, όπου $\nu = 1, 2, 3, 4, \dots$

38. ****** Προεκτείνουμε την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου προς το Α και έστω Μ τυχόν σημείο στην προέκταση. Από το Μ φέρνουμε την εφαπτομένη στον κύκλο και έστω Τ το σημείο επαφής. Από το Τ φέρνουμε την κάθετο στην ΟΑ και έστω Ν το ίχνος της καθέτου. Αν το Μ κινείται προς το Α, να δείξετε ότι ο λόγος $\frac{\text{ΑΝ}}{\text{ΑΜ}}$ τείνει στο 1.

39. ****** Από σημείο Μ φέρνουμε τις εφαπτόμενες σε έναν κύκλο (O, R) και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Η εφαπτομένη στο μέσον Ε του τόξου ΑΒ τέμνει τις ΜΑ και ΜΒ στα Γ και Δ. Να δείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\frac{(\text{ΜΑΒ})}{(\text{ΜΓΔ})}$ τείνει στο 4, καθώς το Μ κινείται προς το Ε.

0. ****** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα όρια:



α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

41. ****** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}$, αν $\mu \in R$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu)$, αν $\lambda, \mu \in R$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}$, αν $\alpha > 0$ δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$, αν $\alpha > 0$

42. ****** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

β) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu^{\rho} \frac{1}{x})$ με $\rho \in N^*$ και $\rho \geq 2$

43. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell n\left(\dfrac{x^2+\kappa^2}{x}\right)$, $\kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ell nx > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ell nx)$.

44. ** Να βρείτε ένα κατάλληλο ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ισχύει:

α) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5$.

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 20$.

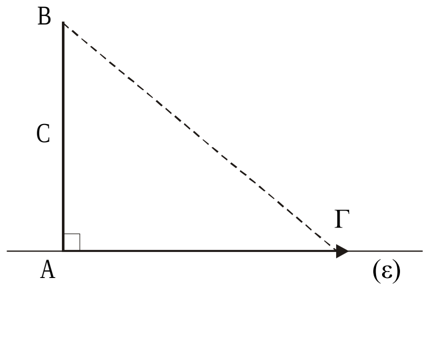
γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 2$.

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.

ζ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

5. ** Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το Α επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ΒΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.

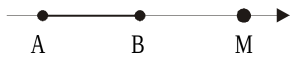


46. ** Αν $f(x) = \ell n \dfrac{x-3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

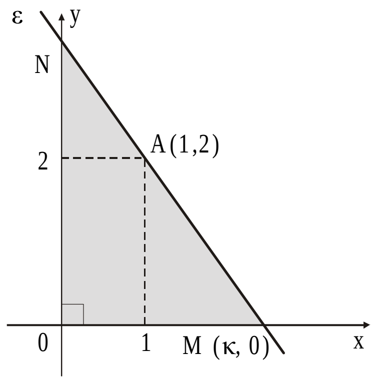
7. ** Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και στην προέκτασή του προς το Β παίρνουμε σημείο Μ. Να βρείτε το όριο του λόγου $\dfrac{AM}{BM}$, καθώς το Μ απομακρύνεται στο άπειρο.



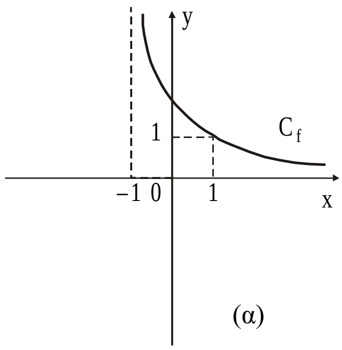
8. ** Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α (1, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy στα Μ και Ν αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου Μ.

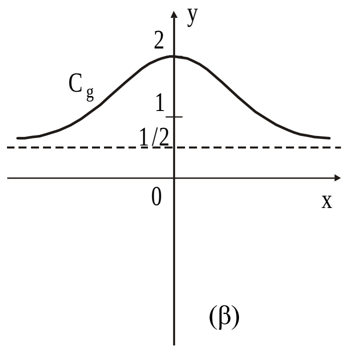
β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \to +\infty$ και όταν $\kappa \to 1$.



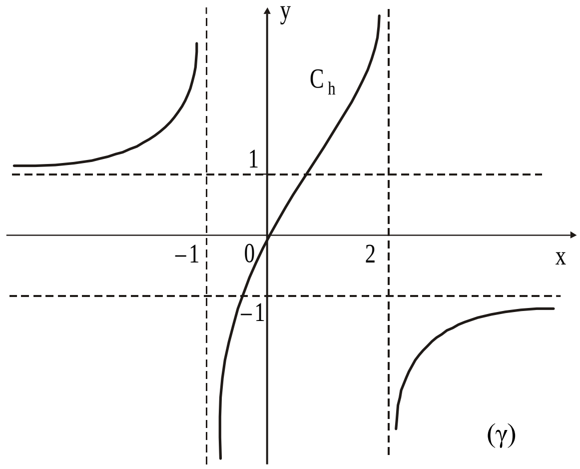
49. ** Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



(α)



(β)

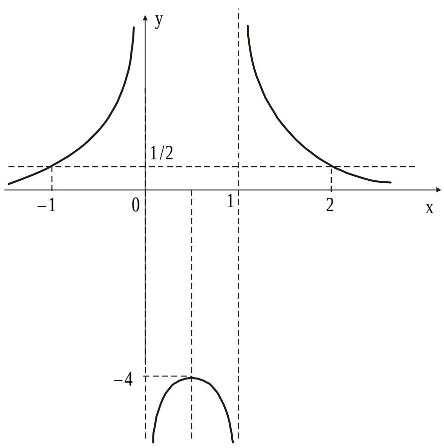


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

β) Να βρείτε τα όρια:

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

0. ** Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f.

β) Να βρεθούν τα όρια:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

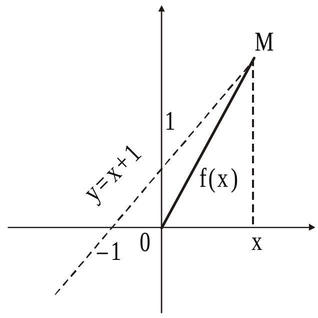
γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω να προσδιορίσετε τις οριακές τιμές της $\dfrac{1}{f}$ στα σημεία του ερωτήματος (β).

δ) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ξέρετε ότι είναι ένας από τους παρακάτω:

$f_1(x) = \dfrac{2x+1}{6x+5}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{2\left|x^2-1\right|}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$

ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση y = x + 1 και το σημείο της Μ με τετμημένη x. Η απόσταση από το σημείο Ο δίνεται από τη συνάρτηση f (x) = (ΟΜ) για κάθε $x \in R$.



α) Για ποια τιμή του x ισχύει f (x) = 1;

β) Για ποια τιμή του x η απόσταση γίνεται ελάχιστη;

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ και να εξηγήσετε τα αποτελέσματα γεωμετρικά (στο σχήμα).

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

52. ** Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \dfrac{16x+36}{2x+3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \dfrac{12}{2x+3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

53. ** Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα υ μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t, δίνεται από τη σχέση:

$$υ(t) = κ(1 - e^{-t})$$

όπου κ μια θετική σταθερά.

α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση υ όταν $t \geq 0$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} υ(t)$.

γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ.

54. ** Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2{,}718$).

β) Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ) Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ) Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

55. ** Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηριδίων αναπτύσσεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$P(t) = 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ χιλιάδες βακτηρίδια}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή της δημιουργίας της).

Πέντε ημέρες μετά εισάγεται στο περιβάλλον της καλλιέργειας ένα φάρμακο που έχει ως αποτέλεσμα η ανάπτυξη του πληθυσμού να γίνεται πλέον σύμφωνα με τον τύπο:

$$P(t) = 6\left(\frac{t+5}{t^2+12t+45}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{χιλιάδες βακτηρίδια}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες αμέσως μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να δίνει τον πληθυσμό της καλλιέργειας τις 10 πρώτες ημέρες από τη δημιουργία της.

β) Να βρείτε τον πληθυσμό σε κλάσματα του δευτερολέπτου πριν τη χορήγηση του φαρμάκου.

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της κλάσματα του δευτερολέπτου μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση του (α) ερωτήματος είναι συνεχής (στο πεδίο ορισμού της).

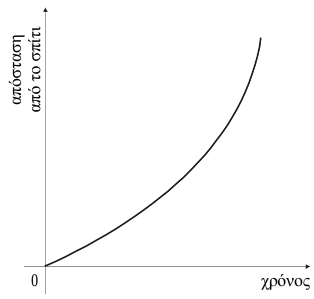
56. ****** Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός N (t) των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$N(t) = M\,(1 - e^{-0,5t})$$

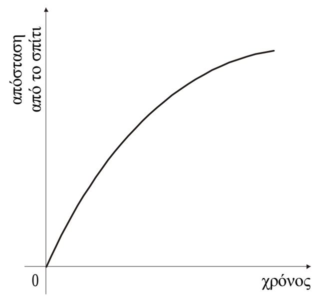
όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Πώς το σκέφτηκε αυτό;

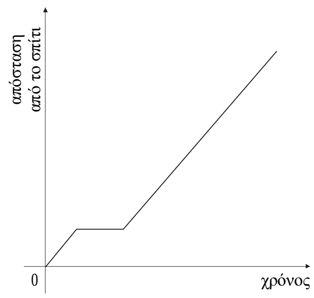
57. ****** Δίνονται τα διαγράμματα:



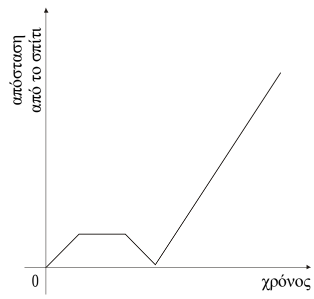
Διάγραμμα I



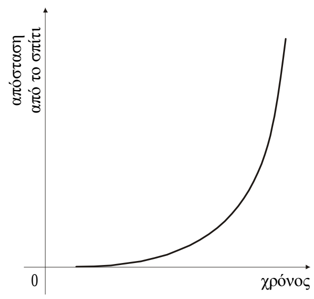
Διάγραμμα II



Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

και οι αφηγήσεις τριών μαθητών:

Μαθητής Α: Το πρωί ξεκίνησα στην αρχή με αργό ρυθμό για το σχολείο, όταν όμως κατάλαβα ότι επρόκειτο να αργήσω επιτάχυνα.

Μαθητής Β: Πήγαινα κανονικά μέχρι τη στιγμή που κλατάρισε ένα λάστιχο του ποδηλάτου μου. Το επισκεύασα επί τόπου και συνέχισα με την ίδια ταχύτητα.

Μαθητής Γ: Δεν είχα απομακρυνθεί πολύ, όταν θυμήθηκα ότι είχα αφήσει στο σπίτι το τετράδιο των Μαθηματικών. Αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω να το πάρω και μετά ξεκίνησα πάλι για το σχολείο.

α) Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αφήγηση το διάγραμμα που της ταιριάζει:

Αφήγηση	Α	Β	Γ
Διάγραμμα			

β) Γράψτε από μια αφήγηση που να ταιριάζει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Μαθητής Δ:

(Διάγραμμα …)

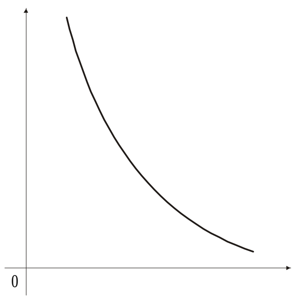
Μαθητής Ε:

(Διάγραμμα ……)

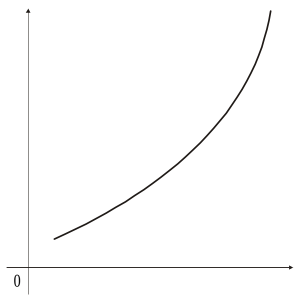
58. ****** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών των συναρτήσεων:

x	**f (x)**	**g (x)**	**h (x)**	**φ (x)**	**σ (x)**
1	23	23	23	33	33
2	24	27	25	32	29
3	26	30	27	30	26
4	29	32	29	27	24
5	33	33	33	23	23

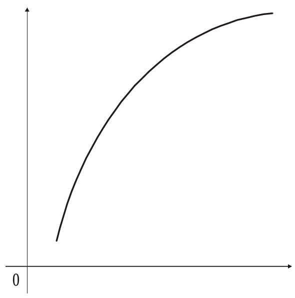
και τα διαγράμματα:



Διάγραμμα I



Διάγραμμα II



Διάγραμμα III

α) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάγραμμα την κατάλληλη από τις παραπάνω συναρτήσεις συμπληρώνοντας τον πίνακα:

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση			

β) Να φτιάξετε ένα σχεδιάγραμμα για καθεμιά από τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

59. ****** Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f (- 1) = - 1, f (1) = 1, f συνεχής στο διάστημα (-1, 1), αλλά να μην υπάρχει αριθμός γ μεταξύ του - 1 και του 1 με f (γ) = 0.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΙΙ. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Λ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Σ
14.	Λ

15.	Σ
16.	Σ
17.	Λ
18.	Σ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Λ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ
26.	Σ

27.	Λ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34.	Λ
35.	Σ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ
39.	Λ
40.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Γ
3.	Γ
4.	Δ
5.	Γ
6.	Γ
7.	Ε
8.	Γ
9.	Β
10.	Β
11.	Γ

12.	Γ
13.	Γ
14.	Ε
15.	Γ
16.	Δ
17.	Β
18.	Ε
19.	Δ
20.	Β
21.	Ε
22.	Δ

23.	Β
24.	Δ
25.	Ε
26.	Γ
27.	Γ
28.	Γ
29.	Β
30.	Β
31.	Δ
32.	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	γ
2	ε
3	β

2.

1	γ
2	δ
3	α
4	ε

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α
5	β

4.

1	α
2	β
3	ε
4	δ

5.

1	β
2	ε
3	α

6.

1	δ
2	γ
3	ε
4	α

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\mu \leq \lambda \leq \kappa \leq \xi \leq \nu$

2. γ, δ, α, ε, β.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** - 2 **β)** 0 **γ)** 2 **δ)** 3 **ε)** 1
στ) 2 **ζ)** 4

2. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. - 1

4. 0

5. $\frac{1}{2}$

6. **α)** $\frac{1}{10}$ **β)** - 66

7. $\alpha = 1, \quad \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$

8. $1 + 2 + \ldots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 28$ άρα $\nu = 7$

9. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \nu = 120 \Rightarrow \nu = 5$

10. **α)** $\alpha = 1$ **β)** $-\frac{\pi}{4}$

11. πλευρικά όρια

13. **α)** Θέτουμε $x - x_0 = h$ **β)** $f(0) = 0$ και χρήση του (α)

14. **α)** $D_f = (0, e)$ **β)** στο 0^+ το $+\infty$, στο e^- το $-\infty$

δ) R

18. α) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 2$ **γ)** όχι

20. **α)** $+\infty, -\infty, 2, 2$ **β)** 0

21. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x + 1) \cdot 2^{x+1} - 1$

22. $f(x) = \ell nx + e^x$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

23. $h(x) = συν2x - x$

24. **α)** τέσσερις τουλάχιστον φορές στα (0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 8)

β) τέσσερις ρίζες

25. **α)** $f(x) = κ^2 (x^2 - 1) + λ^2 x (x - 1) + μ^2 x (x + 1), \ x \neq 0, -1, 1$

β) Να κάνετε χρήση των τύπων $ρ_1 + ρ_2$ και $ρ_1 \cdot ρ_2$.

26. $P(x) = x(x^ν - 1) - (x - 1) = (x - 1)$ $Q(x)$ με $Q(0) = -1$, $Q(1) = ν$

28. **β)** Βρίσκουμε κάθε φορά το μέσον του διαστήματος και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε κάθε υποδιάστημα.

29. $h(x) = 3f(x) - f(α) - f(β) - f\left(\frac{α+β}{2}\right)$

30. **β)** $y = 2 \in [1, 225]$, $x^2 = 2$ άρα ο $x = \sqrt{2} \in (1, 1{,}5)$.

Όμοια $3 \in (2{,}25, 4)$ άρα $\sqrt{3} \in (1{,}5, 2)$.

31. **α)** $D_f = [2, 6]$ **δ)** $f(A) = [-2, 2]$

ε) $\frac{3}{2} \in f(A)$ και f γνησίως αύξουσα στο [2, 6]

33. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ με $g(x) = f(x) + e^{x+1} + \ell n x - 1$

35. **α)** Αν υπάρχει $x_1 < 3$ ώστε $f(x_1) < 0$ τότε άτοπο από το θεώρημα Bolzano.

Ομοίως αν $f(x_1) > 0$ με $3 < x_1 < 7$.

36. Έστω f (t), g (t) οι συναρτήσεις που εκφράζουν τη θέση του ορειβάτη κοντά στην ανάβαση και κατάβαση. Θεωρήστε $h(x) = f(t) - g(t)$ στο [6, 12].

37. **α)** $h(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x) \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$

β) $h(x) = f(x + \frac{1}{\nu}) - f(x) \quad x \in [0, \frac{\nu - 1}{\nu}]$ για $x = 0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu - 1}{\nu}$

38. $OT \perp TM$, φέρνουμε $AP \perp TM$. Τότε $AN = AP$.

Άρα $\frac{AN}{AM} = \frac{AP}{AM} = $ ημω $\quad \omega \to \frac{\pi}{2} \ \ldots$

39. $\frac{(MAB)}{(M\Gamma\Delta)} = \left(\frac{MN}{ME}\right)^2$ αλλά, από την προηγούμενη άσκηση (38), $\frac{EN}{EM} \to 1$,

άρα $\frac{EN}{EM} + 1 \to 2$, άρα $\frac{EM + EN}{EM} \to 2$.

40. **α)** $-\infty$ **β)** 0 **γ)** 0 **δ)** 0 **ε)** $+\infty$

41. **α)** Να διακρίνετε περιπτώσεις για $\mu < 0$ ή $\mu > 2$, $0 < \mu < 2$, $\mu = 2$, $\mu = 0$

β) για $\lambda = 1$, για $\lambda \neq 1$

γ) περιπτώσεις για $0 < \alpha < 2$, $\alpha < 2$, $\alpha = 2$

δ) για $0 < \alpha < 2$, $\alpha > 2$, $\alpha = 2$

42. **α)** 1 **β)** 0 **γ)** 0

43. **α)** $(0, +\infty)$ **β)** $+\infty$, $+\infty$ **γ)** 0

44. **α)** ημ5x, x **β)** $\frac{1}{x^2+1}$, $20x^2 + x + 1$ κ.ο.κ.

45. Αν ΑΓ = x, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty}$ (ΒΓ -ΑΓ) = $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+c^2} - x) = \ldots = 0$

47. Αν ΑΒ = α και ΑΜ = x τότε ΒΜ = x - α, $x \to +\infty$

48. Πρέπει $x > 1$. Η ευθεία ΑΜ : $2x - y(\kappa - 1) + 2\kappa = 0$.

Για $x = 0$, $y = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}$ και $E_{MON} = \frac{\kappa^2}{\kappa - 1}$

51. **α)** $x = 0$ ή $x = -1$

β) Πρέπει να γίνει ελάχιστη η $g(x) = x^2 + (x+1)^2$

γ) $+\infty$, $-\infty$

52. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$

53. **α)** σχήμα **β)** $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(1 - e^{-t}) = \kappa$

γ) Σε συνεχή βροχόπτωση μεγάλης διάρκειας η ταχύτητα της σταγόνας είναι περίπου ίση με κ.

54. **α)** $f(0) = e$ (2.718 βακτηρίδια)

β) $\lim\limits_{t\to\kappa^-} f(t) = \lim\limits_{t\to\kappa^+} f(t) = e^3$ (20.079 περίπου)

γ) $f(t) = 0$ οπότε $t = 9$

δ) $f(0) = 2.718 \quad f(\kappa) = 20.079$.

Άρα κάποια στιγμή ο αριθμός θα είναι 18.950. Ομοίως στο (4, 9)

55. **α)** $P(t) = \begin{cases} 6\left(\dfrac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}}, & 0 \le t \le 5 \\ 6\left(\dfrac{(t-5)+5}{(t-5)^2+12(t-5)+45}\right)^{\frac{1}{2}}, & 5 < t \le 10 \end{cases}$

β) 3 χιλ. **γ)** 2 χιλ **δ)** όχι

56. $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = M$

57. α)

Αφήγηση	**Α**	**Β**	**Γ**
Διάγραμμα	I	III	IV

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:

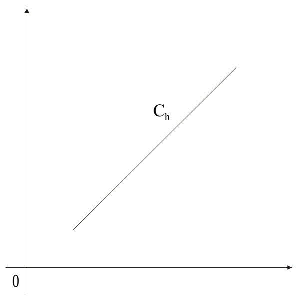
Μαθητής Δ (Διάγραμμα ΙΙ): *Ξεκίνησα βιαστικά όταν όμως κατάλαβα ότι έχω μπροστά μου πολύ χρόνο έκοψα ταχύτητα.*

Μαθητής Ε (Διάγραμμα V): *Μόλις βγήκα από το σπίτι πρόσεξα ότι είχα ένα λάστιχο κλαταρισμένο. Το επιδιόρθωσα και ξεκίνησα βιαστικά επιταχύνοντας.*

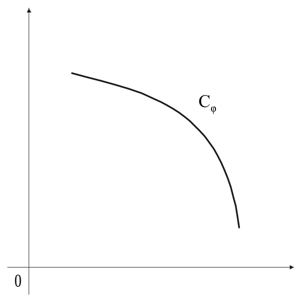
58. α)

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση	σ (x)	f (x)	g (x)

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:

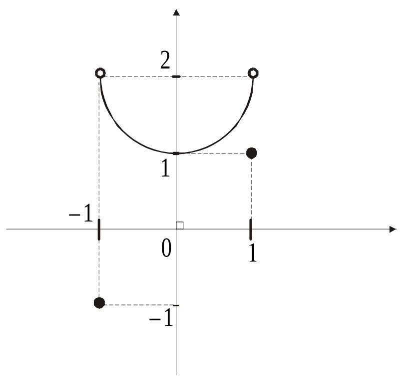


Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

59. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:



ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 1ο

Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

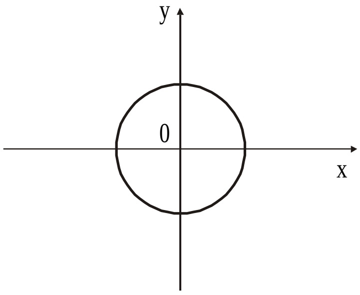
1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, ισχύει
$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. **Σ** **Λ**

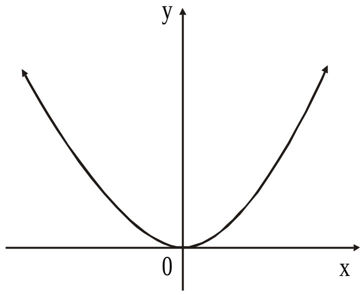
2. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in R$, ισχύει **Σ** **Λ**
$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

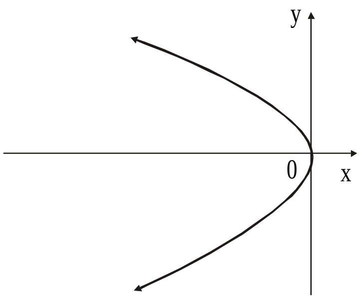
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ βρίσκεται κάτω
από τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

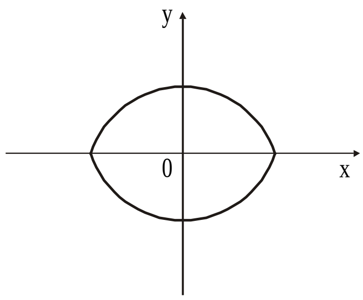
Β.

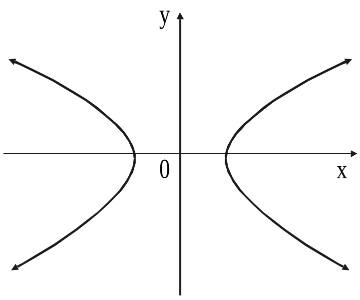
1. Από τα παρακάτω διαγράμματα, γραφική παράσταση συνάρτησης είναι το διάγραμμα

Α. 

Β. 

Γ. 

Δ. 

Ε. 

2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = ln (2x - 1) είναι το σύνολο

Α. R **Β.** $(-\infty, \frac{1}{2})$ **Γ.** $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Δ. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ **Ε.** $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

3. Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα x΄x είναι

Α. 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 5$. Αν f (1) = 8 και f (- 1) = 4, η τιμή της παράστασης κ + 2λ είναι ίση με

Α. 0 **Β.** 8 **Γ.** 13 **Δ.** - 11 **Ε.** 11

5. Για τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει ότι

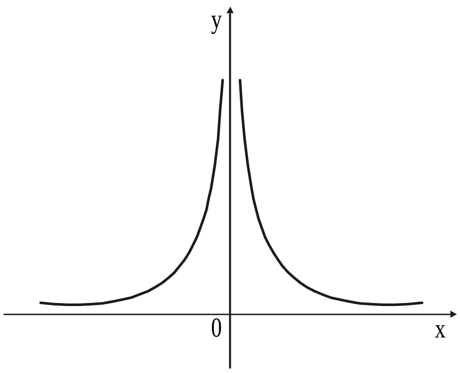
Α. είναι 1 - 1

Β. είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞)

Γ. αντιστρέφεται

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, + ∞)

Ε. κανένα από τα προηγούμενα



Γ.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα και μόνο στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

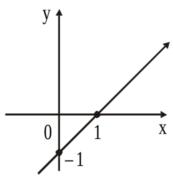
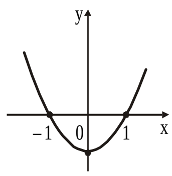
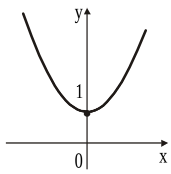
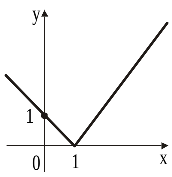
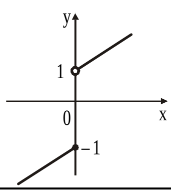
Στήλη Α	**Στήλη Β**
	α. $\dfrac{x^2+2}{x^2-2}$
1. $f(2x)$	**β.** $\dfrac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$
2. $2f(x)$	**γ.** $\dfrac{2(x+2)}{x-2}$
3. $f(x^2)$	**δ.** $\dfrac{x+1}{x-1}$
4. $[f(x)]^2$	**ε.** $\dfrac{2x+4}{2x-4}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στη γραφική της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

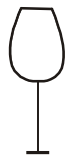
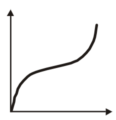
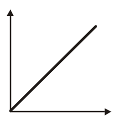
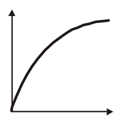
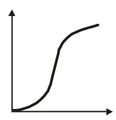
Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = x^2 - 1$	**α.** 
2. $f(x) = x - 1$	**β.** 
3. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$	**γ.** 
4. $f(x) = \lvert x - 1 \rvert$	**δ.** 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

3. Στην πρώτη σειρά του παρακάτω πίνακα Ι βρίσκονται τέσσερα ποτήρια τα οποία γεμίζουμε με σταθερή παροχή με νερό. Στη δεύτερη σειρά υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις του ύψους του νερού σε κάθε δοχείο συναρτήσει του χρόνου. Αντιστοιχίστε στο κάθε ποτήρι το κατάλληλο διάγραμμα συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

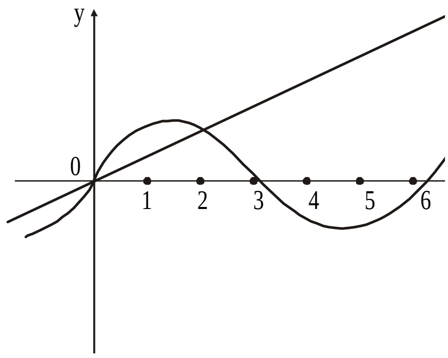
Πίνακας Ι			
 **1.**	 **2.**	 **3.**	 **4.**
 **α.**	 **β.**	 **γ.**	 **δ.**

Πίνακας ΙΙ			
1.	**2.**	**3.**	**4.**

Δ.

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}x$ και $g(x) = ημx$.

Να βρείτε στο ίδιο σχήμα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



ΘΕΜΑ 2ο

1. Το εισιτήριο του τρένου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

II. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x} - 1$.

Ισχύει $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$. **Σ** **Λ**

2. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο R, ισχύει $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$. **Σ** **Λ**

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$. **Σ** **Λ**

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο R - {1}. **Σ** **Λ**

Β.

1. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ με $x \in (0, 2)$ και $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$, τότε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{3}{2}$ **Β.** $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - g(x)] = 3$

Γ. $\lim\limits_{x \to 1} [h(x) - f(x)] = 3$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε πάντοτε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ **Β.** $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Γ. για το όριο της συνάρτησης $f \cdot g$ στο x_0 έχουμε απροσδιόριστη μορφή

Δ. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] > 0$ **Ε.** $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] < 0$

3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R η οποία είναι συνεχής και 1 - 1. Τότε η f

Α. είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα

Β. δεν μπορεί να είναι άρτια

Γ. είναι πάντοτε περιττή

Δ. $f(1) = f(-1)$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

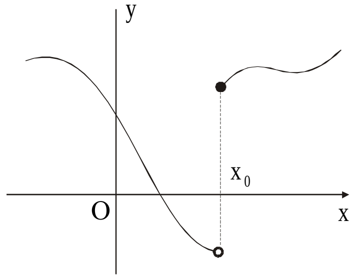
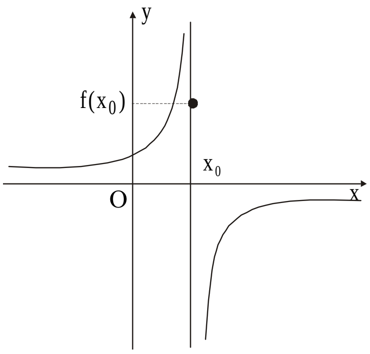
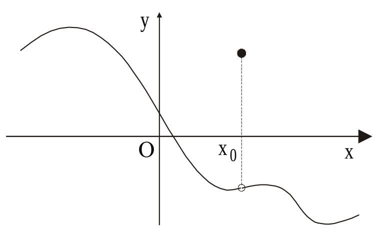
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{4x^2 + 7}$. Η τιμή $f(10^{2004})$ προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τον αριθμό

Α. 1,4 **Β.** 10^4 **Γ.** 0,75 **Δ.** 0,25 **Ε.** $\frac{1}{7}$

Γ.

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ ώστε σε κάθε γραφική παράσταση από τη στήλη Α του πίνακα Ι να αντιστοιχούν οι σχέσεις που ισχύουν από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1.  **2.**  **3.** 	**α.** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ **β.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ **γ.** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ **δ.** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ **ε.** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**

2. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
πεδίο ορισμού	***σύνολο τιμών***
1. $\Delta = [\alpha, \beta]$	**α.** $(\lim_{x \to \beta} f(x), \lim_{x \to \alpha} f(x))$
2. $\Delta = [\alpha, \beta)$	**β.** $[f(\alpha), \lim_{x \to \beta} f(x))$
3. $\Delta = (\alpha, \beta]$	**γ.** $(\lim_{x \to \beta} f(x), f(\alpha)]$
4. $\Delta = (\alpha, \beta)$	**δ.** $[f(\beta), f(\alpha)]$
	ε. $[f(\beta), \lim_{x \to \alpha} f(x))$
	ζ. $(\lim_{x \to \alpha} f(x), f(\beta)]$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**

Δ.

1. Αν κ, λ, μ, ν, ξ είναι τα όρια στο $x_0 = 1$ των συναρτήσεων f, g, h, φ, s αντιστοίχως και ισχύει:

$$h(x) \le g(x) \le f(x) \le s(x) \le \varphi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$$

να διατάξετε τους αριθμούς κ, λ, μ, ν, ξ από το μικρότερο (ή ίσο) προς το μεγαλύτερο.

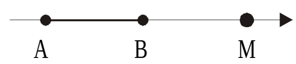
2. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R, συνεχείς και ισχύει: f γνησίως αύξουσα, g γνησίως φθίνουσα και f (2) = g (2). Να διατάξετε σε μία σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις παρακάτω διαφορές:

α) f (e) - g (e) **β)** f (π) - g (π) **γ)** f (0) - g (0)

δ) f (2) - g (2) **ε)** f (3) - g (3)

ΘΕΜΑ 2ο

1. Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και στην προέκτασή του προς το Β παίρνουμε σημείο Μ. Να βρείτε το όριο του λόγου $\frac{AM}{BM}$, καθώς το Μ απομακρύνεται στο άπειρο.



ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου 1873. Κατά την περίοδο 1881-91 ολοκλήρωσε τις σπουδές του στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχολεία του Βελγίου όπου διακρίθηκε για την επίδοσή του στα Μαθηματικά. Κατά την περίοδο 1891-95 φοίτησε στη Βελγική Στρατιωτική Σχολή απ' όπου πήρε πτυχίο μηχανικού. Κατά την περίοδο 1897-98 παρακολούθησε μαθήματα στα Πανεπιστήμια του Λονδίνου και των Παρισίων, ενώ το φθινόπωρο του 1898 έως την άνοιξη του 1900 εργάστηκε ως μηχανικός στην Αίγυπτο στην κατασκευή των φραγμάτων Assuan και Assiout. Αμέσως μετά μεταβαίνει στο Βερολίνο με μοναδικό σκοπό **τη σπουδή των Μαθηματικών.**

Το καλοκαίρι του 1902 αναχωρεί για το Göttingen, προπύργιο τότε των μαθηματικών ερευνών και τόπο συγκέντρωσης διασήμων μαθηματικών (Klein - Hilbert - Minkowski κ.ά.). Το 1905 γίνεται υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Το 1909 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Αννόβερου, ενώ το 1910 γίνεται καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Breslaw. Το 1913 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen και διαδέχεται τον Felix Klein στην σημαντικότερη μαθηματική έδρα στην Ευρώπη. Το 1918 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Το 1920 η ελληνική κυβέρνηση τον προσκάλεσε για να οργανώσει το Ιωνικό Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη. Το 1922 Ο Καραθεοδωρή κατάφερε να διασώσει την Πανεπιστημιακή Βιβλιοθήκη του Ιωνικού Πανεπιστημίου από την τουρκική εισβολή στη Σμύρνη και τη μετέφερε στην Αθήνα. Κατά το ίδιο έτος γίνεται τακτικός καθηγητής της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, το 1923 τακτικός καθηγητής της Μηχανικής στο ΕΜΠ και ανακηρύσσεται ακαδημαϊκός. Το 1924 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, όπου και διδάσκει μέχρι το τέλος της ακαδημαϊκής του καριέρας.

Η βασική επιστημονική εργασία του Καραθεοδωρή είναι στα θέματα του Λογισμού των Μεταβολών (55 συνολικά εργασίες, μεταξύ των οποίων η διδακτορική του διατριβή "περί των ασυνεχών λύσεων του λογισμού των μεταβολών", 1905). Επίσης εργάστηκε με μεγάλη επιτυχία σε θέματα Θεωρίας Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεωρίας Πραγματικών Συναρτήσεων, Θεωρίας κυρτότητας, Θεωρίας μέτρου, Θεωρίας Συνόλων, Θερμοδυναμικής, Θεωρίας σχετικότητας, Γεωμετρικής οπτικής και Θεωρητικής μηχανικής, δημοσιεύοντας συνολικά 132 πρωτότυπες εργασίες.

Η προσφορά του στη μαθηματική επιστήμη έχει αναγνωριστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Μια πρωτότυπη εργασία του αναφέρεται στις αρχιτεκτονικές καμπύλες του Παρθενώνα (δημοσιεύτηκε το 1937 στην "αρχαιολογική εφημερίδα").

Ο καθηγητής E. Schmidt γράφει για τον Κ. Σ. Καραθεοδωρή: *"Ανήκει εις την πλειάδα των μεγάλων εργατών της μαθηματικής επιστήμης, οίτινες ανεκάλυψαν απροσδόκητους και βασικάς σχέσεις εις όλους σχεδόν τους κλάδους αυτής… Θα μείνει εις τα μαθηματικά ο Καραθεοδωρή εις την πρώτην γραμμήν των ερευνητών των μάλλον ικανών, οίτινες δια της δυνάμεως της μεγαλοφυΐας των, επέτυχον καταπληκτικήν επέκτασιν του ορίου της επιστήμης ταύτης…".*

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή απεβίωσε στο Μόναχο στις 2 Φεβρουαρίου 1950 και το θάνατό του πένθησαν όλα τα πνευματικά ιδρύματα του κόσμου με τα οποία είχε σχέση κατά τη διάρκεια της ζωής του.