ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Λύση

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\beta))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

   Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

   Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

   Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

   Επομένως,

   - αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ **(2)**

   - αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ **(3)**

   Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

   Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'\left(x\right)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x+h\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x\right)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}, \nu \in \mathbf{N} - \{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^{\nu} - {x_0}^{\nu}}{x - x_0} =$$

$$\frac{(x - x_0)\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + {x_0}^{\nu-1}\right)}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + {x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \ldots + {x_0}^{\nu-1}\right) = {x_0}^{\nu-1} + {x_0}^{\nu-1} + \ldots + {x_0}^{\nu-1} = \nu {x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

<u>Λύση</u>

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha^{x}, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'\left(x\right)=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$.

<u>Λύση</u>

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha \ .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0, \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} =$$

$$\eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0 ,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in \mathbf{R}_1=\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R_1}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=4x^{3}+2\left(\lambda-1\right)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\left(0,1\right)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F\left(x\right)=x^{4}+\left(\lambda-1\right)x^{2}-\lambda x\ ,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F\left(0\right)=F\left(1\right)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$

και $F\left(0\right)=F\left(1\right)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $F'\left(\xi\right)=0$. Όμως $f\left(\xi\right)=F'\left(\xi\right)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x)=\ln(x^2)=\ln\left(|x|^2\right)=2\ln|x|$$

οπότε

$$f'(x)=\left(2\ln|x|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln|x_0|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}(-x_0)\Leftrightarrow \ln|x_0|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e \text{ , και } f(x_0)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e,2)$ και $B(-e,2)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y'y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\,,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty\,.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι: $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow y=\frac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\frac{8}{x_0}\right)$ και $B\left(2x_0,0\right)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$\left(OAB\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(OA\right)\cdot\left(OB\right)=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_0}\right|\left|2x_0\right|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$\left(\frac{2x_0+0}{2},\frac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\frac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x,\ x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x,\ x<0 \end{cases}.$$

<u>Λύση</u>

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x’x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x’x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1 \Leftrightarrow 2x-3=-1 \Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x’x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2, οπότε $f'(x)=-2 \Leftrightarrow 2x-3=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}$, $x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}$, $x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

<u>Λύση</u>

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right).$

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right).$

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'=\dfrac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\dfrac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-2x+1\right)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)= f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1\le f(x)-f(0)\le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x\le f(x)-f(0)\le x^4-2x$, οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε $\dfrac{-2x}{x}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\dfrac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε $\dfrac{-2x}{x}\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\dfrac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0{}^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0{}^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\frac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}.$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\left[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\right]=$$

$$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}\ .$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

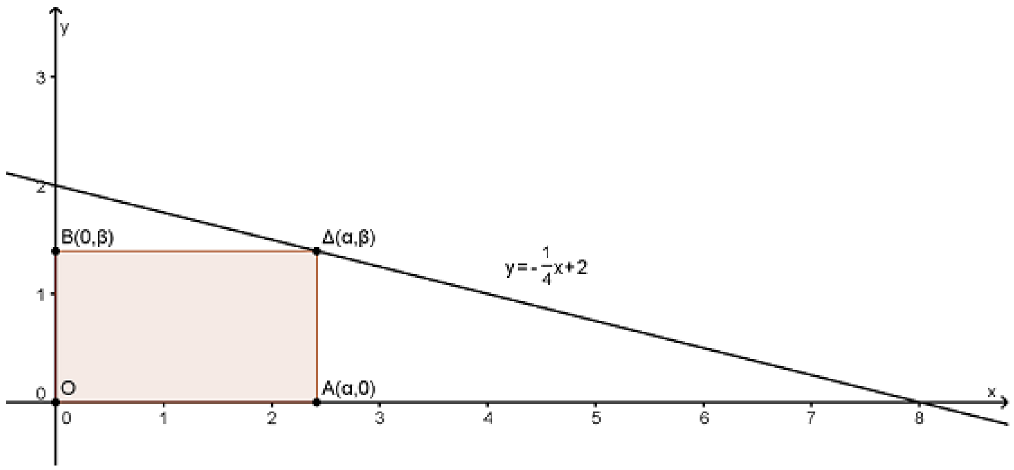
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=a\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

α	0		4		8
$E'(\alpha)$		+	0	-	
$E(\alpha)$		$\nearrow$	$E(4)$	$\searrow$	

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 4$. Οπότε $\beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2 .$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2 .$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x)$

Λύση

Έχουμε

$f'(x) = \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$,

$f''(x) = \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και

$f^{(3)}(x) = \left(2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x$.

Οπότε

$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x + 2\left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) =$

$4e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2f''(x)$.

Άρα

$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x)$.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

<u>Λύση</u>

Επειδή

$$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \le 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$f(3)=0$	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

<u>Λύση</u>

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon : y=3x-2 .$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g , θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2 . \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon : y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Λύση

Έχουμε $f'(x)=2x-4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda=2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 2x_0-4=2 \Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } f(3)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$ είναι η παρακάτω:

$$y-0=2(x-3) \text{ ή}$$

$$y=2x-6.$$

ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0) \Leftrightarrow -x_0^{\,2}+4x_0-3=-2x_0^{\,2}+4x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^{\,2}=3 \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^2+4x_1-3=-2x_1^2+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^2-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3\Leftrightarrow e^0+k=3\Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε

$$f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+48x+5,$$

$$f''(x)=12x^2+12\alpha x+48=12\left(x^2+\alpha x+4\right).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\alpha^2-16$.

Όταν $\Delta<0$ τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta=0$ τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow \alpha^2-16\leq 0\Leftrightarrow \alpha^2\leq 16\Leftrightarrow |\alpha|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq\alpha\leq 4.$$

2. Πρέπει

$f''(1)=0\Leftrightarrow 12+12\alpha+48=0\Leftrightarrow \alpha=-5$.

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x=1$.

Για $\alpha=-5$, $f''(x)=12\left(x^2-5x+4\right)$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=4)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο $[1, 4]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\big(1, f(1)\big)$, συνεπώς το $A\big(1, f(1)\big)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για $\alpha = -5$ το $A\big(1, f(1)\big)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

    i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

    ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \dfrac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έχουμε

    $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

    Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

    Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

    Ισχύει

    $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

    οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

    και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

    οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$

    Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

    Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1 - x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$, $x \in [0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{x^2} - 1 + x\right)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1 - x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \dfrac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1\right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = \left(e^x + 1 - x\right)' = e^x - 1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)> f'\left(0\right)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f\left(0\right)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0 \text{, για κάθε } x\in\left[0,+\infty\right) \text{, άρα}$$

$$e^x+x\geq\frac{x^2}{2}+1 \text{, για κάθε } x\in\left[0,+\infty\right).$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'(x)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5 \Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f(2x-1)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \text{ για κάθε } x,y\in\mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0+h)=f(x_0)\cdot e^{h}+f(h)\cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{e^{h}-1}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}\right]=$$

$$f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}=f(x_0)\cdot e^{0}+1\cdot e^{x_0}=f(x_0)+e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-e^{0}}{h-0}=g'(0)=e^{0}$ με $g(x)=e^{x}$.

Άρα $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει:

$$\alpha^x+\beta^x\geq 5e^x-3,\ \text{για κάθε } x\in\mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=e^5$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\alpha^x+\beta^x\geq 5e^x-3\Leftrightarrow \alpha^x+\beta^x-5e^x+3\geq 0$ και θέτοντας

$f(x)=\alpha^x+\beta^x-5e^x+3$ παίρνουμε: $f(x)\geq 0=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0)=0$.

Όμως $f'(x)=\alpha^x\cdot\ln\alpha+\beta^x\cdot\ln\beta-5e^x$, οπότε

$f'(0)=0\Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha+\beta^0\ln\beta-5e^0=0\Leftrightarrow \ln(\alpha\cdot\beta)=5\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=e^5$.

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $\left[0,1\right]$ και παραγωγίσιμες στο $\left(0,1\right)$ με

$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$ και $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(0,1\right)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h\left(x\right)=f^{2}\left(x\right)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $\left[0,1\right]$.
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^{2}\left(x\right),e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $\left[0,1\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^{2}\left(x\right),e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\left(0,1\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h\left(0\right)=h\left(1\right)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $\left[0,1\right]$.

ii. Είναι $h'\left(x\right)=2f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)\cdot e^{g(x)}+f^{2}\left(x\right)\cdot e^{g(x)}\cdot g'\left(x\right)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow 2f\left(\xi\right)\cdot f'\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}+f^{2}\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow$$

$$f\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)\cdot g'\left(\xi\right)\right]=0\Leftrightarrow 2f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)\cdot g'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f\left(x\right)-3x^2-\lambda^2x+2}{f\left(x\right)+\lambda x+1}=-1$$

<u>Λύση</u>

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f\left(x\right)-3x^2-\lambda^2x+2}{f\left(x\right)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f\left(x\right)-3x\right)-\lambda^2+\dfrac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\dfrac{f\left(x\right)}{x}+\lambda+\dfrac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1 = f(1)+f(0)\cdot i$ και

$z_2 = -3+f(0)\cdot i$.

Αν $z_1\cdot z_2 \in \mathbf{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2\xi$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει

$z_1\cdot z_2 = \left[f(1)+f(0)\cdot i\right]\cdot\left[-3+f(0)\cdot i\right] = \left[-3f(1)-f^2(0)\right]+\left[f(1)\cdot f(0)-3f(0)\right]i$.

Για να ισχύει $z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$ πρέπει

$\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)=0$, άρα $f(1)\cdot f(0)-3f(0)=0 \Leftrightarrow f(1)\cdot f(0)=3f(0)$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει
$g(0)\cdot g(1)=f(0)\left[f(1)-2\right]=f(0)\cdot f(1)-2f(0)$, το οποίο λόγω της **(1)** γίνεται $g(0)\cdot g(1)=f(0)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα ξ της g στο $(0,1)$.

Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)=0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2}\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L’ Hospital)

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f.

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

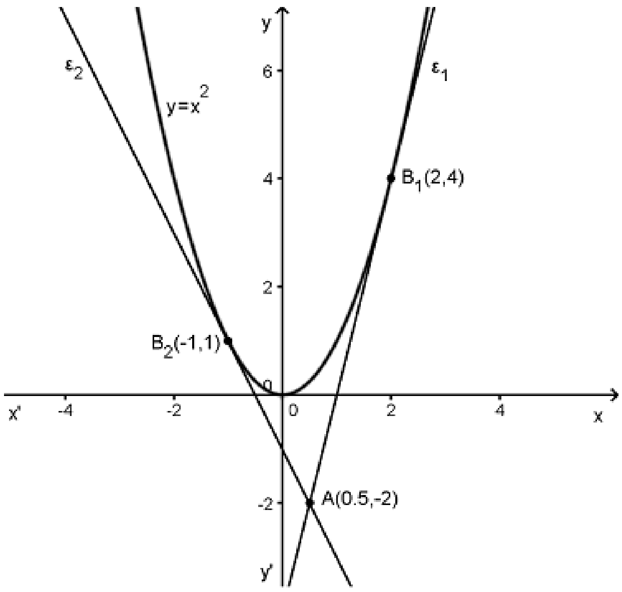
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-x_0^2=2x_0\left(\frac{1}{2}-x_0\right) \Leftrightarrow x_0^2-x_0-2=0 \Leftrightarrow \left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$$\varepsilon_1: y=4x-4 \text{ και σημείο επαφής το } B_1(2,4) \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: y=-2x-1 \text{ και σημείο επαφής το } B_2(-1,1).$$



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3) \Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

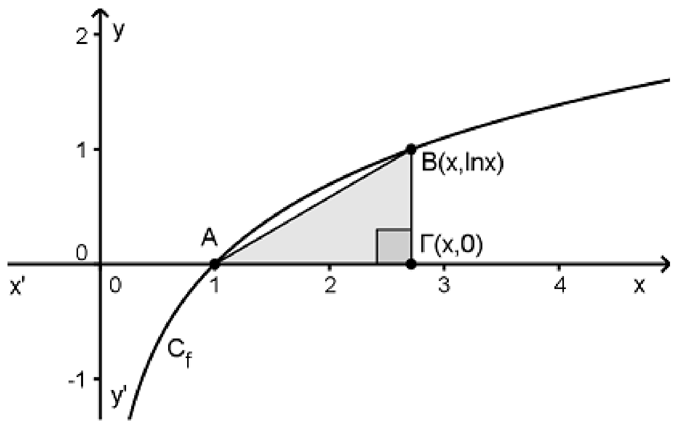
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0{,}5cm/\sec$.

Λύση

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0)$, $x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0{,}5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}[2-1]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$.
Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα
$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2 .$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0 .$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\frac{1}{x}-2x$, άρα

$g'(1)=f'(1)-e^{0}-\frac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

<u>Λύση</u>

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

    i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

    ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

    i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

    ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ **(1)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ **(2)**

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u) \right)' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

$$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x \right)' \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x \right) \cdot \left(e^{f(x)} \right)' + \left(\eta\mu x + x \right)' =$$

$$\left(5x^4 - \eta\mu x \right) \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x \right) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

Οπότε $g'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu(2\pi)=0$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu(\pi)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Έτσι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)'=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε $g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x)=6x^2-30x+24$ και

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow (x=1$ ή $x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞		1		4		+∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f((-\infty,1])=(-\infty,11]$,

$f([1,4])=[-16,11]$ και

$f([4,+\infty))=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.
- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.
- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\frac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

<u>Λύση</u>

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu-1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu-1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & (\mathbf{1}) \\ 4\alpha\beta = \beta & (\mathbf{2}) \\ \beta^2 = \gamma & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

και

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty .$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$,

αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

και

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$.

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

   $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

   υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

   Επομένως στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

<u>Σχόλιο</u>: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

  ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

  άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{f(6) - f(2)}{4} . \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = f(2) - f(1) + 4 \cdot \frac{f(6) - f(2)}{4} = f(6) - f(1) = 0 .$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x) = 2 + \eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow 2-1 \le 2+\eta\mu x \le 2+1 \Leftrightarrow$$

$$1 \le 2+\eta\mu x \le 3 \Leftrightarrow 1 \le f''(x) \le 3,$$

άρα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = \pi > 0$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, οπότε:

για $x<x_0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$ και

για $x>x_0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1 \Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0 \Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

   $$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2\right] < 0$$

   άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.
2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

   $$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$
3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

   $$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g\left(x\right)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\left(0,+\infty\right)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g\left(1\right)=1$, άρα $g\left(x\right)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\ln x\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=}1-\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(x\right)'}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

<u>Σχόλιο</u>: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right) = -\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^{y} = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = 1$,

όμως $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \ln x + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0 .$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0$. Έχουμε $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,

- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g(x)>g(x_0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

<u>Λύση</u>

Ισχύει

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot\eta\mu x = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = c\cdot e^x.$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = c\cdot e^0\Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\dfrac{2\cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
f′(x)	-	0	+

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0	1	$+\infty$
g′(λ)	+	0	-

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + \left(1 + xe^x\right) \cdot i, x \in \mathbf{R}$.

i. Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z)$.

ii. Να βρείτε τα $x \in \mathbf{R}$ για τα οποία η εικόνα του z βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.

iii. Να βρείτε το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει το $|z - \bar{z}|$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει

$\mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow e^x \le 1 + xe^x \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \ge 0$.

Θέτουμε $f(x) = 1 + xe^x - e^x$ και έχουμε

$f'(x) = \left(1 + xe^x - e^x\right)' = xe^x$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \ge 0$.

ii. Ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow f(x) = 0$ και η τελευταία ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Είναι: $|z - \bar{z}| = 2\left|1 + xe^x\right|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + xe^x$, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ Θα βρούμε το σύνολο τιμών της:

$g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x + 1)$ και έχουμε

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[-1,+\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$, δηλαδή

$g(x)\geq g(-1)=\dfrac{e-1}{e}>0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=1$, αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^x\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το

$\left[\dfrac{e-1}{e},+\infty\right)$.

Επομένως $|z-\overline{z}|\in\left[2\dfrac{e-1}{e},+\infty\right)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

Λύση

1. Έχουμε $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{5} < 0,$$

   αφού $\frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{5} < \ln 1 = 0$ και $\frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{5} < \ln 1 = 0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x)\Leftrightarrow\left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0}\overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow}c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x \geq -4+\sqrt{3}.$$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'(x)=(2x+4)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+4)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$,

$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$ και

$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$.

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3},\, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3},\, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0,\, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0,\, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1, +\infty)$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επίσης $f'(0) = 0$, άρα

για $-1 < x < 0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0$ και

για $x > 0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0$.

Επιπλέον $f(0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - 1\right] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{\text{fί γν.φθ .}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και

για $x>0 \overset{\text{fύγν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \ne 0$ τότε, επειδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2) \le -f(2\alpha+\beta-1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2) < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^{2}}.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0		e		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$	f(e)	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,e\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f\left(e\right)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f\left(3\right)>f\left(5\right)>f\left(6\right)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και
$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$ και

$$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}\,,$$

$$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 .$$

Επομένως $g(x) \ge g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2+1\right) \cdot \ln x\right]' = 2x\ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$, αφού

$x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$f^{(3)}(x) = \left(2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0 < x < x_0 \overset{f''\ \text{γν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \overset{f''\ \text{γν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0 .$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2+1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2+1)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) = 4 + \ln(4^2+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln\frac{x^4+1}{x^6+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4+1) - \ln(x^6+1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln\left((x^3)^2+1\right) > x^2 + \ln\left((x^2)^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \overset{f\acute{\upsilon}\gamma\nu.\alpha\ \xi.}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$,

$f''(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -2-\sqrt{2}]$ και $[-2+\sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2} < 0$, έπεται ότι για $x > 0$ ισχύει $[x, x+1] \subseteq [-2+\sqrt{2}, +\infty)$ και αφού $f''(x) > 0$ στο $(-2+\sqrt{2}, +\infty)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $[-2+\sqrt{2}, +\infty)$, άρα και στο $[x, x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x, x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)\,.$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi) \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\ \ \xi.}{\Leftrightarrow} x+1>\xi\,,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\frac{12-2}{\frac{5}{2}}=4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\dfrac{1}{e},\beta>\dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

   γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

   το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

   Επίσης $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2)\geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha>\beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$.

Ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x)=\frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1}+\frac{2-(\ln\beta)^2}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f(\ln\alpha)+f(\ln\beta) \geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.